前　言

本书目的　泛函分析在数学及应用科学中的作用，都在不断地增长着。因此，人们越来越希望能在学生学习的早期阶段，就将他们引入到这个领域。本书目的就是要使读者熟悉泛函分析的基本概念、原理和方法以及它的应用。

教科书应该是为学生写的。因此，我力图在数学和物理专业的四年级大学生和一年级研究生易于理解的范围之内，给出这个学科的基本内容以及有关的实际问题。我希望工科的研究生也能从中得到益处。

必备知识　本书是初等的。大学数学的基础，特别是线性代数和普通微积分，作为必备知识也就够了。测度论既不要求，也不讨论。拓扑方面的知识也不需要。几处涉及到紧性的地方，本书自给自足。除了后面供选用的，因而也是易于删掉的一节（§7.5）外，用不着复习分析。附录1列出了供复习与参考的资料摘要。

因而本书能为广大范围的学生所接受，并且使得从线性代数过渡到高等泛函分析更容易。

课程安排　本书适用于每周五小时的一个学期的课程或每周三小时的两个学期的课程。

本书也可作为少学时的课程。事实上，可以删掉某些章而不破坏连续性或使其余部分残缺不全（详见下图）。例如：

第一章至第四章或第五章，可构成一个很短的课程。

第一章至第四章加第七章，构成一个包含谱论和其它课题的课程

内容及安排　图1示出组成本书内容的五个主要方框

希尔伯特空间的理论（第三章）放在赋范空间和巴拿赫空间的基本定理（第四章）之前，是因为它比较简单，能给第四章提供更多的例子。而更重要的是，能使学生对于从希尔伯特空间过渡到一般的巴拿赫空间所遇到的困难有一个较好的感性认识。

第五章和第六章可以删去。因此，在第四章之后可以直接去读其余几章（七至十一章）。

谱论　包含在第七章至第十一章中，这部分有很大的灵活性。可以只研究第七章或第七章与第八章。或者先集中精力于第七章的基本概念（§7.2与§7.3），随后再转入研究有界自伴算子谱论的第九章。

应用问题　在本书中有多处提到了。第五章与第六章是单独讲应用的两章。可以按顺序学下来，如果有必要的话，也可提前学（见图1）：

第五章可以放在第一章之后学习。

第六章可以放在第三章之后学习。

第五、第六章是供选用的，因为它们不是其它各章的必备知识。

第十一章是讲应用的另一个单独章。研究的是无界算子（在量子物理中的），但实际上是与第十章相互独立的。

表述方式　本书的内容已成为美国、加拿大和欧洲的数学、物理和工程专业的大学生和研究生课堂教学和讨论的基础。为使初学者易于掌握，本书的叙述是详尽的，特别是前面几章。关于证明，宁愿采用要求较低的，而不用虽稍简短但却艰深的方法。

在概念和方法都必须是抽象的一本书里，对于它的形成与发展都必须给予极大的重视。我力图通过一般性的讨论，并精选大量而适当的例子，其中包括很多简单的，来做到这一点。我希望这样能使学生认识到：抽象的概念、思想和技巧，通常是在比较具体的事物的启示

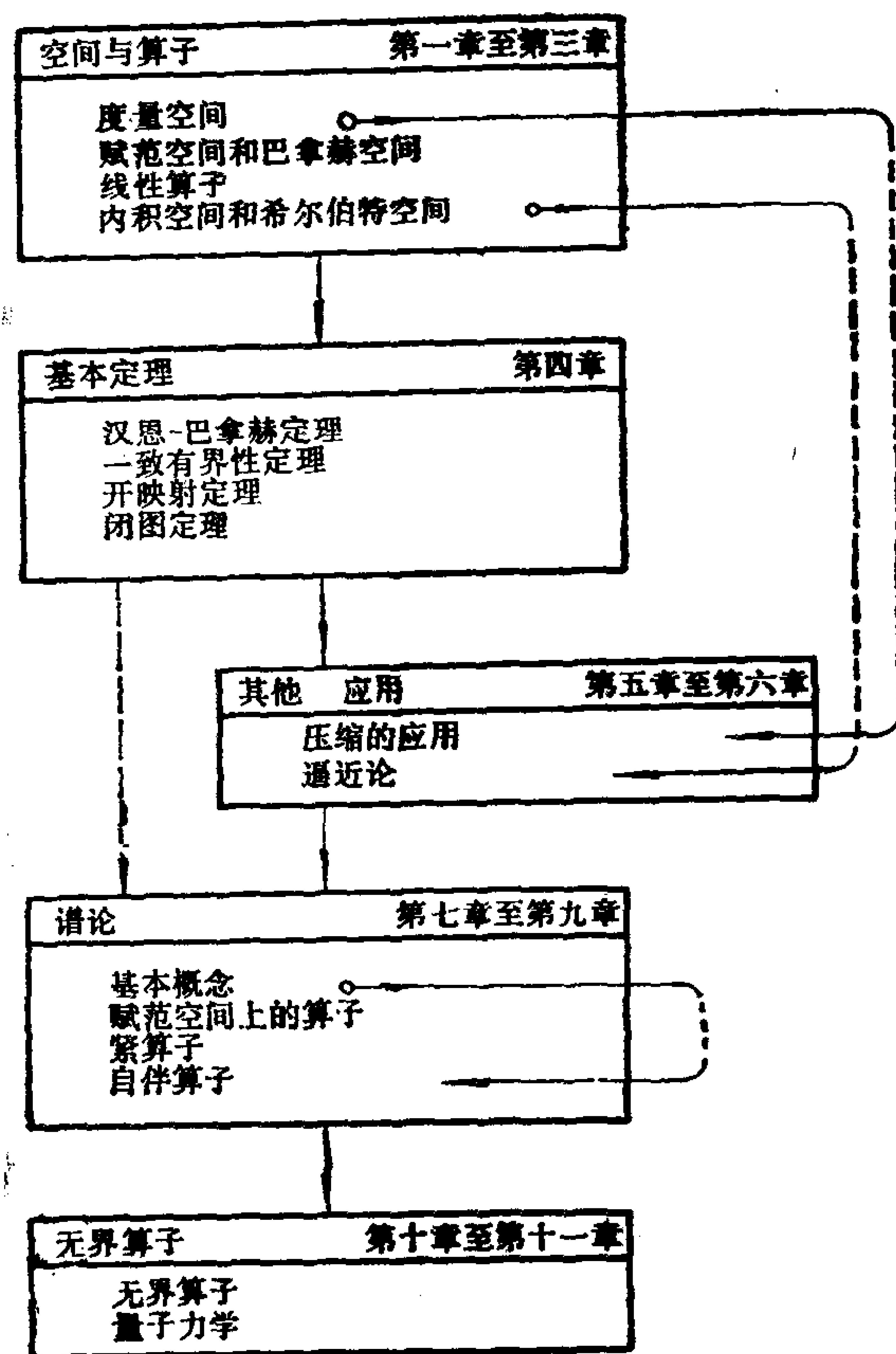


图1 本书的内容及安排

下而形成的。学生应该懂得实际问题可以作为说明抽象理论的具体模型，也可以作为从一般理论产生具体结果的研究对象。此外，它还是理论向前发展中的新思想、新方法的重要源泉。

习题和解答 本书包含900多道精选的习题。这是为了帮助读者更好地理解泛函分析及其应用方面的内容，提高技巧和直观的能力而设置的。有些很简单，用以鼓励初学者。附录2给出了全部习题的答案。事实上，很多习题在附录2中给出了完整的解答。

本书的课文是自成体系的，即定理和引理的证明都包含在课文内，而没放在习题里。因此，内容的展开不依赖于习题，所以省略一部分甚至全部习题，都不会破坏叙述的连贯性。

参考资料 包含在附录1中，其中包括关于集合、映射、族等初等内容。

参考文献 涉及的书藉和论文，都搜集在附录3中，以助于读者对本书内容和某些有关的专题作进一步的研究。本书中引用了列出的所有论文和大多数的书藉。引文中包含有姓名和年份。请看两个例子："存在不具有邵德尔（*Schauder*）基的可分巴拿赫空间；参阅*P*·*Enflo*（1973）."读者便可在附录3中*Enflo*，*P*·(1973)处找到相应的论文。"本定理已由*H*·*F*·*Bohnenblust*和*A*·*Sobczyk*(1938) 推广到复向量空间。"这指明在附录3中列出了这些作者1938年写的一篇论文。

符号与记法 在目录之后列表作了说明。

谢 启 （略）

ERWIN KREYSZIG

译 者 的 话

自1981年以来，每届有数百名工科硕士研究生选修《应用泛函》这门课。他们绝大多数来自工科院校，不仅没学过集合论与实变函数论，就是数学分析与线性代数的基础也相当薄弱，并且还要求多讲些泛函分析的应用。这使得我在教材的选取和教学方式方法的安排上都感为难。正值这时，我阅读了Erwin Kreyszig的《泛函分析导论及其应用》一书。它不要求读者具备实变与拓扑的知识就可以读懂，而且写得深入浅出，很富于知识性与趣味性，强调了应用。体系极为完整，论证十分严密，实为一本难得的泛函分析入门书。后来，我又读过Erwin的《高等工程数学》及《数理统计引论》，同样有独特的风格，也反映出作者博大精深的功力。他的这三本书，在世界广泛流布，被欧美很多大学用作教材。所以我也用这本书作为教材。经过1981—1984年的教学实践，效果甚好。由于听课人数的增加，原文版教材脱销，所以便在前几年讲课用的译稿基础上，约同吕善伟、张式淇同志共同加工修改，烦请白文林同志校正，由北航出版社出版。本书译稿1984年就已完成，在翻译的过程中，曾得到北航应用数理系主任李心灿教授的鼓励与帮助，也得到研究生院张维叙、王玉章处长的支持，制图教研室梅冰清同志精心绘制了插图，在此一并表示谢意。由于我们的水平有限，错漏之处还请专家批评指正。

蒋正新

1986年11月

符 号 说 明

A^c	集合A的余集
A^T	矩阵A的转置
$B[a,b]$	有界函数空间
$B(A)$	有界函数空间
$BV[a,b]$	有界变差函数空间
$B(X,Y)$	有界线性算子空间
$B(x,r)$	开球
$\tilde{B}(x,r)$	闭球
c	序列空间
c_0	序列空间
$\mathbf{C}$	复平面或复数域
$\mathbf{C}^n$	n维酉空间
$C[a,b]$	连续函数空间
$C'[a,b]$	连续可微函数空间
$C(X,Y)$	紧线性算子空间
$\mathscr{D}(T)$	算子T的定义域
$d(x,y)$	从x到y的距离
$\dim X$	空间X的维数
δ_{jk}	克罗奈克δ符号
$\mathscr{E}=(E_\lambda)$	谱族
$\|f\|$	有界线性泛函f的范数
$\mathscr{G}(T)$	算子T的图
I	恒等算子
inf	下确界（最大下界）
$L^p[a,b]$	函数空间
l^p	序列空间
l^∞	序列空间
$L(X,Y)$	线性算子空间
$M^\perp$	集合M的零化子
$\mathscr{N}(T)$	算子T的零空间
0	零算子
ϕ	空 集

$\mathbf{R}$	实直线或实数域
$\mathbf{R}^n$	n 维欧几里德空间
$\mathscr{R}(T)$	算子T的值域
$R_\lambda(T)$	算子T的预解式
$r_\sigma(T)$	算子T的谱半径
$\rho(T)$	算子T的预解集
s	序列空间
$\sigma(T)$	算子T的谱
$\sigma_c(T)$	T的连续谱
$\sigma_p(T)$	T的点谱
$\sigma_r(T)$	T的残谱
$\mathrm{span}M$	集合M的张成空间
sup	上确界（最小上界）
$\\|T\\|$	有界线性算子T的范数
T^*	T的希尔伯特伴随算子
$T^\times$	T的伴随算子
T^+，T^-	T的正部和负部
T_λ^+，T_λ^-	$T_\lambda=T-\lambda I$的正部和负部
$T^{1/2}$	T的正平方根
$\mathrm{Var}(w)$	w的全变差
$\xrightarrow{w}$	弱收敛
X^*	矢量空间X的代数对偶空间
X'	赋范空间X的对偶空间
$\\|x\\|$	x 的范数
$\langle x, y\rangle$	x与y的内积
$x\perp y$	x与y正交
$Y^\perp$	闭子空间Y的正交补

目　　录

第一章　度量空间

第二章　赋范空间，巴拿赫空间

第三章　内积空间，希尔伯特空间

第四章　赋范空间和巴拿赫空间的基本定理

第九章 有界自伴线性算子的谱论

第十章 希尔伯特空间中的无界线性算子

第十一章 量子力学中的无界线性算子

附录1 复习与参考资料

附录2 习题解答

附录3 参考文献

第一章　度量空间

泛函分析是数学的一个抽象分支，它起源于经典分析。它的发展开始于大约八十年之前，而今天，泛函分析的方法和结果在数学及其应用的各个领域变得十分重要。其产生的原动力来自线性代数，线性常微分和偏微分方程，变分学，逼近论，特别是线性积分方程，其理论对现代概念的创立和发展起着最大的作用。数学家们观察到各种不同领域的问题往往具有相互关联的特征和性质。人们根据这一事实，通过对问题去伪存真的提炼，而获得了处理这些问题的一个有效而统一的途径。这种抽象地处理问题的优点是，能把握住事物的最本质的核心部分。这样一来，研究者的精力就免受非本质的细节的干扰，从而对问题看得更深入和更清晰。从这样一个角度来看，抽象的方法是处理数学体系的最简单、最经济的手段。一般地讲，任何这样的一种抽象体系，都有各种具体的实现(具体模型)。所以，我们将会看到抽象的方法在应用于具体情况时，也是十分多变的。这对于把毫不相干的各个领域联系起来，建立其间的关系和互相转化的途径是大有帮助的。

在这样一个抽象的研究方法中，人们通常都是从一个满足某些公理的集合出发，而集合的元素的特征不予指定，这也是我们的目的。由公理导出的一些逻辑结果作为定理而被反复使用。这就意味着我们从公理体系出发而得到一个数学结构，这个数学结构的理论又以抽象的方法展开讨论。而后，可把得到的通用定理应用到满足公理体系的各种特殊的集合上去。

例如，在代数中曾用这种方法研究域、环和群；在泛函分析中，我们将用这种方法来研究抽象空间。这些空间是基本的，也是重要的，我们将详细地研究其中的某些空间（如巴拿赫空间、希尔伯特空间）。以后我们还会看到，“空间”这个概念是一个广泛到具有惊人程度的观念。一个抽象空间不过是满足有关公理体系的元素（非特指的）集合。如果选用不同的公理体系，便得到不同类型的抽象空间。

以系统的方式使用抽象空间的观念，要追溯到弗列谢（*M・Frechet*，1906）①，他以其巨大的成功而被认可。

在这一章我们研究度量空间。度量空间在泛函分析中是最基本的，其在泛函分析中的作用有如实直线**R** 在微积分中的作用。事实上，它是**R** 的推广，并且为统一处理分析的各个分支中的重要问题提供了一个共同的基础。

我们首先定义度量空间及其有关的概念，并举一些典型的例子来说明它们。对其中一些在实用上特别重要的空间，还要详细地讨论。我们要花很多精力在完备性的概念上，这个性质不是每个度量空间都能具备的。完备性在全书中都起着关键性的作用。

---

① 在附录3中给出了参考文献，并且还将引用附录3中所列出的书籍和论文。

本章内容概要

所谓度量空间（见1.1-1），就是指在其上定义了度量的一个集合X。而度量是指X中任意两点（或元）之间的距离。度量是以公理化的方式来定义的。这些公理是根据实直线**R**或复平面**C**上两点间的距离所具备的一些简单性质提炼出来的。一些基本例子（1.1-2到1.2-3）表明，度量空间的概念是极为一般化的。某些空间可能具备一个极为重要的附加性质，即完备性（见1.4-3），将在§1.5和§1.6中详细地讨论。另外一个在理论上和实用上都有意义的概念是度量空间的可分性（见1.3-5）。可分的度量空间比不可分的度量空间要简单些。

§1.1 度量空间

在微积分中，我们研究的是定义在实直线**R**上的函数。稍微回顾一下便知，在求极限的过程和其它的许多研究中，我们利用了**R**上的现成的距离函数d，即对于每两个点x，$y \in \mathbf{R}$，其间的距离为$d(x, y)=|x-y|$，如图2所示。在平面和通常的三维空间中，情况是类似的。

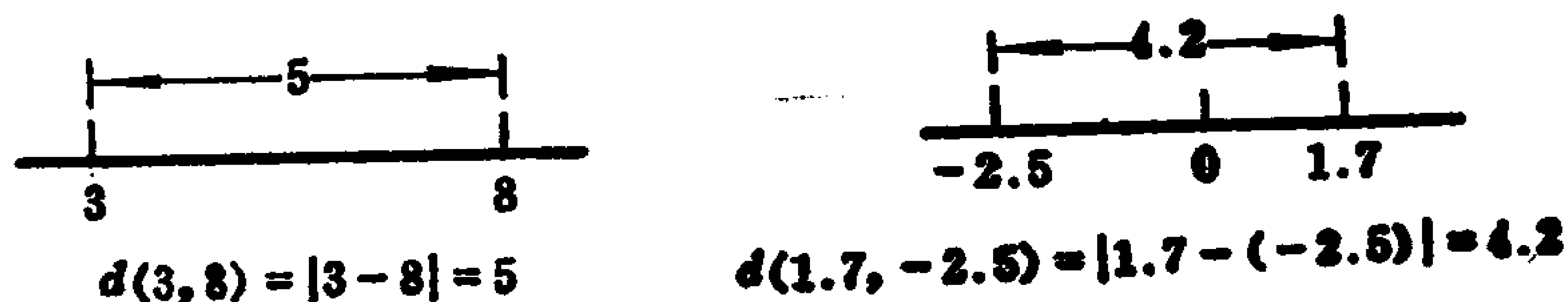


图2 R上的距离

在泛函分析中，我们将研究更为一般的“空间”及定义其上的“函数”。我们以充分一般化和多方适应的方式提出“空间”的概念如下：我们用抽象的集合X（其元素的特征为何，不予指定）代替实数集合**R**，并在X上引入这样一个“距离函数”，它仅满足**R**上的距离函数所具备的几条最根本的性质。但是，所谓“最根本”是指的什么呢？要回答这个问题远非那么简单。事实上，要选取和形成定义中的公理体系，总是要反复实验，并与具体问题进行类比，最后才能得到一个清晰而完整的概念。目前所给出的度量空间的概念，就是经过六十多年的发展过程才奠定的，它在泛函分析及其应用中是基本的，也是极为有用的。

1.1-1定义（度量空间，度量） 所谓度量空间，就是指对偶(X, d)，其中X是一个集合，d是X上的一个度量（或X上的距离函数），即d是定义在$X \times X$①上且对所有x，y，$z \in X$满足以下四条公理的函数：

(M1) d是实值、有限和非负的。

(M2) 当且仅当$x=y$时，$d(x, y)=0$。

① 符号×表示集合的笛卡尔积；$A \times B$是所有序偶(a, b)的集合，其中$a \in A, b \in B$。因此，$X \times X$是X的元素构成的所有序偶的集合。

(**M3**)　$d(x, y)=d(y, x)$　(对称性)。

(**M4**)　$d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)$　(**三角不等式**)

为叙述方便，给出下面几个有关的术语。X叫做(X, d)的基集，X的元素叫做空间(X, d)的点。给定$x, y\in X$，我们把$d(x, y)$叫做x，y之间的距离。$(M1)$到$(M4)$叫做度量公理。“三角不等式”的名字是受初等几何的启示而得到的，如图3所示。

用归纳法从$(M4)$可以推得广义的三角不等式

$$d(x_1, x_n)\leqslant d(x_1, x_2)+d(x_2, x_3)+\cdots+d(x_{n-1}, x_n) \tag{1}$$

在不至引起混乱的情况下，我们常将度量空间(X, d)简写成X。

如果取子集$Y\subset X$且把d限制在$Y\times Y$上，则可得(X, d)的一个**子空间**$(Y, \tilde{d})$；因而Y上的度量就是限制①

$$\tilde{d}=d\Big|_{Y\times Y}$$

$\tilde{d}$叫做d在Y上**诱导出来的度量**。

现在我们列举一些度量空间的例子，其中有一些已为读者所熟悉。为了证明它们确是度量空间，我们必须逐个验证各例中的d是满足公理$(M1)$至$(M4)$的。通常情况下，验证$(M4)$比验证$(M1)$至$(M3)$要做更多的工作。然而，对于这里的几个例子来讲，不是很难的，所以把它们留给读者去完成(见习题集)。对于验证(M_4)来说不是这么容易的一些度量空间，将放在下一节讨论。

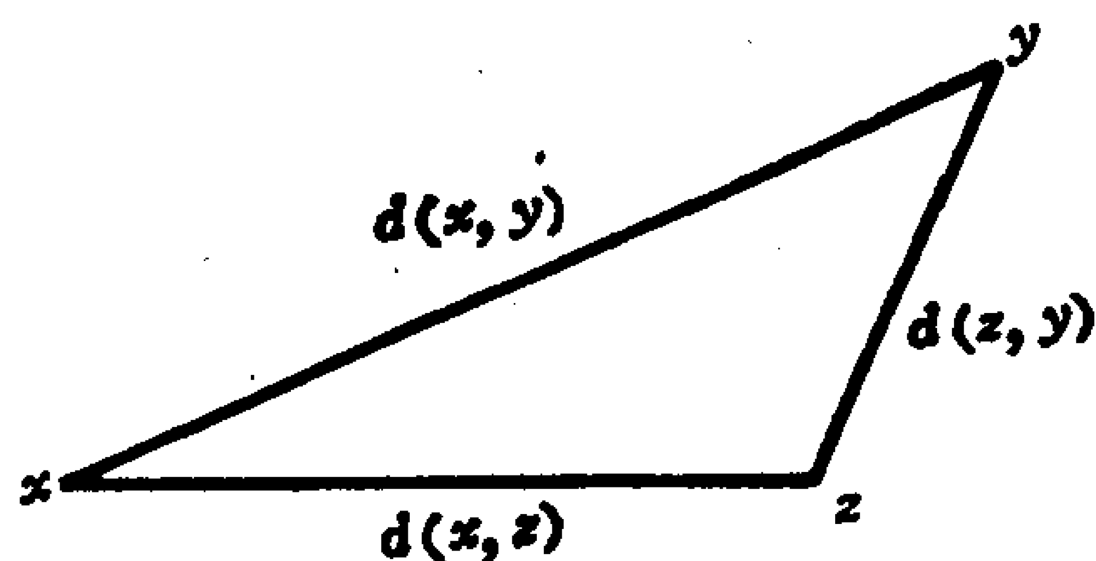


图3　平面中的三角不等式

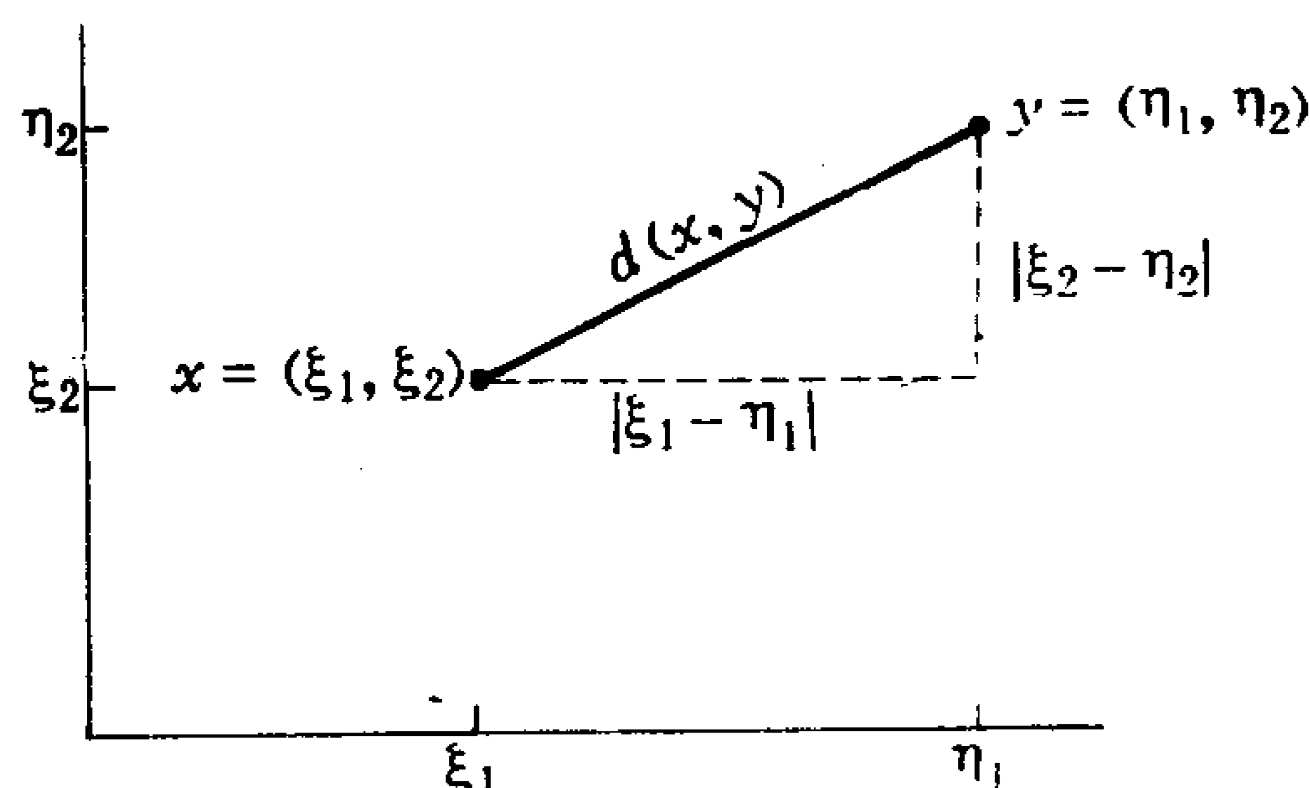


图4　平面上的欧几里德度量

例　子

1.1-2实直线R　它是所有实数的集合，取具有普通的度量定义

$$d(x, y)=|x-y| \tag{2}$$

1.1-3欧几里德平面$\mathbf{R}^2$　如果我们取实数序偶$x=(\xi_1, \xi_2)$②，$y=(\eta_1, \eta_2)$等的集合作为基集，用

$$d(x, y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2}\quad(\geqslant 0) \tag{3}$$

来定义欧几里德度量(见图4)，则得到度量空间$\mathbf{R}^2$，称之为欧几里德平面。

---

① 附录1中有映射的复习，也包括限制的概念。

② 在这里我们之所以不把$x=(\xi_1, \xi_2)$记成为$x=(x_1, x_2)$，是因为后面(从§1.4开始)在研究序列时需要用到$x_1, x_2, \ldots$。

如果我们选用同样的实数序偶集合作基集，而改用

$$d_1(x,y)=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2| \tag{4}$$

定义另一个度量d_1，则得到的是另一个度量空间。这说明了如下的重要事实：对于一个给定的集合（至少包含两个元素），在其上定义不同的度量，可得到不同的度量空间。（以d_1作为度量的空间没有一个标准名字，而d_1有时叫做出租汽车（*taxicab*）度量。为什么？$\mathbf{R}^2$有时也用E^2表示。）

1.1-4三维欧几里德空间$\mathbf{R}^3$ 这个空间的基集是所有形如$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$的三元实序组的集合，用

$$d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+(\xi_3-\eta_3)^2} \qquad (\geqslant 0) \tag{5}$$

在其上定义欧几里德度量。

1.1-5欧几里德空间$\mathbf{R}^n$，酉空间$\mathbf{C}^n$，复平面$\mathbf{C}$ 前面的几个例子是n维欧几里德空间$\mathbf{R}^n$的特殊情况。如果我们取所有形如$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$的$n$元实序组集合作为基集，用

$$d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2} \qquad (\geqslant 0) \tag{6}$$

在其上定义欧几里德度量，便得到这个空间。

n维酉空间$\mathbf{C}^n$的基集是所有n元复序组的集合，其上的度量定义为

$$d(x,y)=\sqrt{|\xi_1-\eta_1|^2+|\xi_2-\eta_2|^2+\cdots+|\xi_n-\eta_n|^2} \qquad (\geqslant 0) \tag{7}$$

当$n=1$时，便得到复平面$\mathbf{C}$，具有普通的度量定义

$$d(x,y)=|x-y| \tag{8}$$

（$\mathbf{C}^n$有时又叫做n维复欧几里德空间。）

1.1-6序列空间l^∞ 这个例子和下一个例子给人的第一个印象是，度量空间的概念具有如此惊人的一般性。我们取一切有界的复数序列的集合作为基集X，也就是说X中的每个元素都是形如$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$的复数序列，简记为$x=(\xi_j)$，且对所有的$j=1, 2, \cdots$，都有

$$|\xi_j| \geqslant c_x$$

成立，其中c_x是依赖于x的实数，但与j无关。我们在X上用

$$d(x,y)=\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j| \tag{9}$$

来定义度量，其中$y=(\eta_j)\in X$，$\mathbf{N}=\{1, 2, \cdots\}$，而sup表示上确界（最小上界）①。这样所得到的度量空间通常记为l^∞。（这个有点奇怪的记法由下一节的1.2-3诱导出来。）因为X中的每个元素（或X的每个点）都是一个序列，所以l^∞是一个序列空间。

① 读者能够在A1.6中找到关于上确界和下确界的复习，见附录1。

1.1-7函数空间C〔a, b〕 我们取定义在闭区间$J=[a,b]$上的所有连续实值函数$x(t)$，$y(t)$，…的集合作为基集X，用

$$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)| \tag{10}$$

在X上定义度量，其中max表示最大值。这样所得到的一个度量空间记作为$C[a,b]$（其中字母C是取英文单词"*Continuous*"的第一个字母）。因为$C[a,b]$的每个点都是一个函数，所以它是一个函数空间。

读者将体会到，这里考虑问题的方式与微积分大不相同。在微积分中，我们通常是研究一个函数或同时研究几个函数。而这里，一个函数却变成为更大的一个空间中的点了。

1.1-8离散度量空间 我们取任意一个集合X，并在其上定义所谓离散度量为

$$d(x,x)=0,\ d(x,y)=1,\quad (x\neq y)$$

空间(X,d)便叫做离散度量空间。虽然在应用中很少出现这种空间，但我们将以它为例来说明一些概念（粗心的话容易出错）。

从1.1-1我们看到，度量是用公理来定义的。顺便指出，在今天公理化的定义已被广泛地应用到数学的很多分支。它的有用价值，在希尔伯特关于几何基础的研究公布以后才被公认。有趣的是，对最古老最简单的数学部分的研究，却给予现代数学一个最重要的促进。

习　题

1.证明实直线是一个度量空间。

2.在实数集合上，$d(x,y)=(x-y)^2$能定义一个度量吗？

3.证明$d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$在实数集合上定义了一个度量。

4.求在由两个点所组成的集合X上的所有度量。由一个点构成的集合又怎样？

5.令d是X上的一个度量。试确定使得（1）kd，（2）$d+k$是X上度量的所有常数k。

6.证明1.1-6中的d满足三角不等式。

7.若A是l^∞的这样一了子空间，其元素是由零和1构成的序列。试问在A上诱导的度量是什么？

8.证明用

$$\tilde{d}(x,y)=\int_a^b\left|x(t)-y(t)\right|dt$$

在1.1-7中的集合X上定义了另一个度量$\tilde{d}$。

9.证明1.1-8中的d是一个度量。

10.**哈明（Hamming）距离** 令X是由0和1构成的所有三元序组集合。证明X由八个元素组成，且由$d(x,y)=x$与y的不同的对应分量的个数在X上定义了一个度量d。（这个空间和类似的n元序组空间，在开关和自动理论以及编码中都起着重要作用，$d(x,y)$叫做x，y之间的哈明距离。参看附录3所列*R·W·Hamming*（1950）的论文。）

11.证明（1）式。

12.**（三角不等式）** 三角不等式有一些有用的推论。例如，用（1）证明

$$|d(x,y)-d(z,w)|\leqslant d(x,z)+d(y,w)$$

13. 利用三角不等式证明

$$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y)$$

14.（度量公理） （$M1$）至（$M4$）可以用另外的公理来代替（而不改变定义）。例如，证明可从（$M2$）和

$$d(x,y)\leqslant d(z,x)+d(z,y)$$

得到（$M3$）和（$M4$）。

15. 证明度量的非负性可从（$M2$）至（$M4$）推出。

§1.2 度量空间的其他例子

为了说明度量空间的概念和验证度量公理，特别是验证三角不等式（$M4$），我们再给出三个例子。最后一个例子（空间 l^p）在应用中是其中最重要的一个。

1.2-1 序列空间 s 这个空间的基集X是所有（有界或无界）复数序列的集合，而其上的度量d 定义为

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}$$

其中$x=(\xi_j)$，$y=(\eta_j)$。注意，在例子1.1-6中的度量，在这里是不合适的（为什么？）。

容易看出，公理（$M1$）至（$M3$）是满足的，让我们来验证（$M4$）。为此，我们利用一个定义在**R**上的辅助函数

$$f(t)=\frac{t}{1+t}$$

对它微分可得$f'(t)=1/(1+t)^2$，显然对任意的 $t\in\mathbf{R}$有$f'(t)>0$。因此f是单调递增的。从而由

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

可推出

$$f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|)$$

将上述函数写出并应用关于数的三角不等式，便得到

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

在上面的不等式中，令$a=\xi_j-\zeta_j$，$b=\zeta_j-\eta_j$，其中$z=(\zeta_j)$，则$a+b=\xi_j-\eta_j$，且有

$$\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}\leqslant\frac{|\xi_j-\zeta_j|}{1+|\xi_j-\zeta_j|}+\frac{|\zeta_j-\eta_j|}{1+|\zeta_j-\eta_j|}$$

上式两端同时乘上 $1/2^j$ 并关于 j 从 1 到∞求和，便得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\zeta_j|}{1+|\xi_j-\zeta_j|}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\zeta_j-\eta_j|}{1+|\zeta_j-\eta_j|}$$

此即所要证明的三角不等式（$M4$）

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

从而证实了 s 是一个度量空间。

1.2-2有界函数空间B(A)　由定义，每个元素 $x\in B(A)$ 都是定义在给定集合 A 上，而且是有界的函数。度量定义为

$$d(x,y)=\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|$$

其中sup表示上确界（参看1.1-6中的脚注）。在 $A=[a,b]\subset\mathbf{R}$ 的情况下，把 $B(A)$ 写成 $B[a,b]$。

让我们来证明 $B(A)$ 是一个度量空间。显然，($M1$)和($M3$) 是成立的。而 $d(x,x)=0$ 也是很明显的。反之，$d(x,y)=0$ 意味着对所有的 $t\in A$ 有 $x(t)-y(t)=0$，所以 $x=y$ 。这就给出了（$M2$）。此外，对于每个 $t\in A$，都有

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\leqslant\sup_{t\in A}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in A}|z(t)-y(t)|$$

这就证明了 $x-y$ 在 A 上是有界的。由于上式右端的表达式所给出的上界与 t 无关，所以可对左端取上确界，从而得到（$M4$）。

1.2-3空间 l^p，希尔伯特序列空间 l^2，贺尔德和闵可夫斯基关于和式的不等式　令 $p\geqslant 1$ 是一个固定的实数。据定义，空间 l^p 中的每个元素是一个数列 $x=(\xi_j)=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)$ 且使得

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p<\infty\qquad(p\geqslant 1\text{ 是固定的})\tag{1}$$

而 l^p 上的度量定义为

$$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j-\eta_j|^p\right)^{1/p}\tag{2}$$

其中 $y=(\eta_j)$ 且 $\sum|\eta_j|^p<\infty$。如果我们只取满足（1）的实数序列，便得到实空间 l^p，而若取满足（1）的复数序列，便得到复空间 l^p。（当需要区分上述两种情况时，我们分别用 $l^p_{\mathbf{R}}$ 及 $l^p_{\mathbf{C}}$ 标记。）

在 $p=2$ 的情况下，便是著名的希尔伯特序列空间 l^2，其度量定义为

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j-\eta_j|^2}\tag{3}$$

这个空间是希尔伯特（1912）引进并加以研究的，当时主要是根据研究积分方程的需要而提

出的，它也是现在称作希尔伯特空间的一个最早的例子。（从第三章开始，我们将详细地研究希尔伯特空间。）

下面来证明 l^p 是一个度量空间。显然，在保证（2）的右端级数收敛的情况下，（2）满足（$M1$）至（$M3$）。所以只须证（2）的右端级数收敛和满足（$M4$）。我们将按下面步骤推导：

（a）建立一个辅助不等式；

（b）从（a）推出贺尔德不等式；

（c）从（b）推出闵可夫斯基不等式；

（d）从（c）推出三角不等式（$M4$）。

详细证明如下：

（a）令 $p>1$ 且定义 q 满足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{4}$$

则把 p，q 称作为**共轭指数**，这是一个标准术语。从（4）可推得

$$1=\frac{p+q}{pq} \qquad pq=p+q \qquad (p-1)(q-1)=1 \tag{5}$$

因此$1/(p-1)=q-1$，所以若令$u=t^{p-1}$，便有$t=u^{q-1}$。令α，β是任意两个正数，由于 $\alpha\beta$ 为图 5 中长方形的面积，故通过积分可得不等式

$$\alpha\beta\leqslant\int_0^\alpha t^{p-1}dt+\int_0^\beta u^{q-1}du=\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q} \tag{6}$$

注意，当$\alpha=0$或$\beta=0$时，不等式也是成立的。

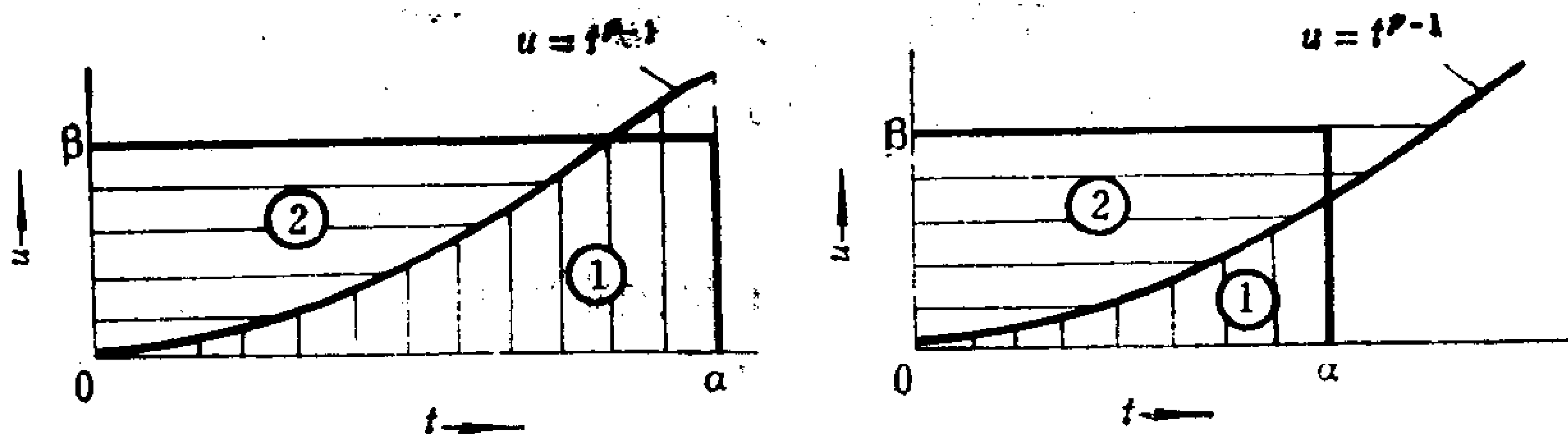


图5 不等式（6）

图中①②的面积分别表示（6）中第一个积分和第二个积分的值

（b）令序列（$\tilde{\xi}_j$）和（$\tilde{\eta}_j$）分别满足

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\tilde{\xi}_j\right|^p=1,\quad \sum_{j=1}^{\infty}\left|\tilde{\eta}_j\right|^q=1 \tag{7}$$

置 $\alpha=|\tilde{\xi}_j|$，$\beta=|\tilde{\eta}_j|$ 代入（6），可得

$$\left|\tilde{\xi}_j\tilde{\eta}_j\right|\leqslant\frac{1}{p}\left|\tilde{\xi}_j\right|^p+\frac{1}{q}\left|\tilde{\eta}_j\right|^q$$

对该不等式的两端关于 j 取和，并利用（7）和（4）便得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\tilde{\xi}_j\tilde{\eta}_j\right|\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{8}$$

现在取任意的非零序列 $x=(\xi_j)\in l^p$，$y=(\eta_j)\in l^q$ 并置

$$\tilde{\xi}_j=\frac{\xi_j}{\left(\sum|\xi_k|^p\right)^{1/p}}\qquad\tilde{\eta}_j=\frac{\eta_j}{\left(\sum|\eta_m|^q\right)^{1/q}} \tag{9}$$

则它们满足(7)，所以能够应用不等式(8)，把(9)代入到(8)，再用 $\left(\sum|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum|\eta_m|^q\right)^{1/q}$ 去乘所得到的不等式的两端，便得到关于和式的贺尔德不等式（*Hölder inequality*）

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\eta_j\right|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left|\eta_m\right|^q\right)^{1/q} \tag{10}$$

其中 $p>1$ 且 $1/p+1/q=1$。这个不等式是贺尔德在1889年给出的。

若 $p=2$，则 $q=2$，这时（10）给出关于和式的**柯西-许瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等式**

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\eta_j\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k\right|^2}\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}\left|\eta_m\right|^2} \tag{11}$$

要详谈 p 等于其共轭指数，即 $p=q=2$ 的情况，还为时过早。但至少可作如下的简短说明：这种情况在以后的一些章节中起着特别重要的作用，它所导出的空间 l^2（一个希尔伯特空间）要比一般的 $l^p(p\neq2)$ "优越"。

(*c*) 现在来证明关于和式的**闵可夫斯基不等式**（*Minkowski inequality*）

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j+\eta_j\right|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k\right|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left|\eta_m\right|^p\right)^{1/p} \tag{12}$$

其中 $x=(\xi_j)\in l^p$，$y=(\eta_j)\in l^p$，$p\geqslant1$。对于有限的和式，这个不等式是由闵可夫斯基在1896年给出的。

对于 $p=1$ 的情况，这个不等式很容易从关于数的三角不等式推出。令 $p>1$。为了简化公式，我们记 $\xi_j+\eta_j=\omega_j$。关于数的三角不等式给出

$$|\omega_j|^p=|\xi_j+\eta_j||\omega_j|^{p-1}\leqslant(|\xi_j|+|\eta_j|)|\omega_j|^{p-1}$$

上式两端对 j 从1到任一固定的 n 求和，便得

$$\sum|\omega_j|^p\leqslant\sum|\xi_j||\omega_j|^{p-1}+\sum|\eta_j||\omega_j|^{p-1} \tag{13}$$

对于上式右端的第一个和式，应用贺尔德不等式可得

$$\sum|\xi_j||\omega_j|^{p-1}\leqslant\left[\sum|\xi_k|^p\right]^{1/p}\left[\sum\left(|\omega_m|^{p-1}\right)^q\right]^{1/q}$$

因为 $pq=p+q$，见（5），故 $(p-1)q=p$，从而上式右端又可简化。对于（13）右端的第二个和式作类似地处理，可得

$$\sum|\eta_j||\omega_j|^{p-1}\leqslant\left[\sum|\eta_k|^p\right]^{1/p}\left[\sum|\omega_m|^p\right]^{1/q}$$

合在一起便得到

$$\sum |\omega_i|^p \leqslant \{[\sum |\xi_k|^p]^{1/p} + \sum |\eta_k|^p]^{1/p}\}(\sum |\omega_m|^p)^{1/q}$$

两端用$(\sum|\omega_m|^p)^{1/q}$去除，并注意到$1-1/q=1/p$，便得到（12）的有限形式。再令$n\to\infty$，并考虑到右端的两个级数的收敛性（因为x，$y\in l^p$），便知左端的级数也是收敛的。从而证明了（12）。

（d）从（12）推出，对任意的x，$y\in l^p$，（2）中的级数是收敛的。同时（12）也给出了三角不等式。事实上，任取x，y，$z\in l^p$，并记$z=(\zeta_i)$，先利用关于数的三角不等式，再利用（12），　得

$$\begin{aligned} d(x,y) = \sum |\xi_i-\eta_i|^p)^{1/p} &\leqslant (\sum[|\xi_i-\zeta_i| + |\zeta_i-\eta_i|]^p)^{1/p} \\ &\leqslant (\sum |\xi_i-\zeta_i|^p)^{1/p} + (\sum |\zeta_i-\eta_i|^p)^{1/p} \\ &= d(x,z)+d(z,y) \end{aligned}$$

这便证明了 l^p 是一个度量空间。

在上面证明过程中所得到的不等式（10），（11）和（12），在各种理论和实际的问题中都是不可缺少的工具，有普遍的重要性。在我们进一步的研究中要屡次用到它。

习　题

1．证明在1.2-1中，把 $1/2^i$ 换成使$\sum\mu_i<\infty$的任一$\mu_i>0$，可得到其它度量。

2．利用（6）证明两个正数的几何平均不超过其算术平均。

3．证明柯西-许瓦兹不等式（11）蕴含着

$$(|\xi_1|+\cdots+|\xi_n|)^2 \leqslant n(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2)$$

4．（空间l^p）求一个收敛到零的序列，它不属于任何一个l^p空间，其中$1\leqslant p<+\infty$。

5．求一个序列$x\in l^p$（$p>1$），但$x\notin l^1$。

6．**（直径，有界集）** 度量空间（X，d）中的非空集A的直径$\delta(A)$定义为

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$$

若$\delta(A)<\infty$，则称A是有界的。证明$A\subset B$意味着$\delta(A)\leqslant\delta(B)$。

7．证明：当且仅当A是单集时$\delta(A)=0$（参考习题6）

8．**（集合之间的距离）** 度量空间（X，d）的两个非空子集A，B间的距离$D(A,B)$定义为

$$D(A,B) = \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} d(a,b)$$

证明D不能在X的幂集上定义一个度量。（就是这个原因，我们才利用了另一个符号D，但它仍然使我们联想到d。）

9．若$A\cap B\neq\phi$，证明习题8中的$D(A,B)=0$。关于它的逆又怎样？

10．在度量空间（X，d）中，一点到一个非空子集B的距离，和习题8一样定义为

$$D(x,B) = \inf_{b\in B} d(x,b)$$

证明：对任意的x，$y \in X$，有

$$|D(x,B)-D(y,B)| \leqslant d(x,y)$$

11.设（X，d）是任一度量空间。证明由下式

$$\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

在X上定义了另一个度量，并且在度量$\tilde{d}$之下，X是有界的。

12.证明度量空间中两个有界集A和B的并仍是一个有界集（习题6中的定义）。

13.**（度量空间的积）** 两个度量空间(X_1, d_1)和(X_2, d_2)的笛卡尔积$X=X_1 \times X_2$能够以多种方式造成为一个度量空间。例如，由下式

$$d(x,y)=d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)$$

就可在X上定义一个度量，其中$x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$，试证明之。

14.证明由下式

$$\tilde{d}(x,y)=\sqrt{d_1(x_1,y_1)^2+d_2(x_2,y_2)^2}$$

可在习题13中的X上定义另一个度量。

15.证明由下式

$$\tilde{\tilde{d}}(x,y)=\max[d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)]$$

可在习题13中的X上定义第三个度量（习题13至15中的度量具有实际的重要性。当然，还可在X上定义其它度量。）

§1.3 开集，闭集，邻域

有一些值得考虑的辅助概念，在研究度量空间时起着重要的作用。本节包含了以后需要用到的这些概念。因此本节包含的概念比本书其它各节都多，但读者将会注意到，其中的一些在应用到欧几里德空间时，是大家非常熟悉的。当然，引入这些概念对研究问题极为方便，也表明了术语的优越性。这些术语是在经典几何的启发下得到的。

我们首先考虑度量空间$X=(X,d)$中的一些重要类型的子集。

1.3-1定义（球和球面） 给定一点$x_0 \in X$及一个实数$r>0$，我们定义三个类型的子集①：

$$\begin{aligned}
&(a)\quad B(x_0;r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<r\} &&\text{（开球）}\\
&(b)\quad \tilde{B}(x_0;r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)\leqslant r\} &&\text{（闭球）}\\
&(c)\quad S(x_0;r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)=r\} &&\text{（球面）}
\end{aligned} \tag{1}$$

在上述三种情况中，x_0叫做球心，r叫做半径。

我们看到，一个半径为r的开球是X中这样的一个点集，它的所有的点到球心的距离都小于r。此外，由定义直接可推得

① 假定读者对常用的集合论记法有一定的了解，在附录1中已包括一个复习。

$$S(x_0;r)=\tilde{B}(x_0;r)-B(x_0;r) \tag{2}$$

注意 在研究度量空间中，我们利用和欧几里德几何相类似的术语，无疑是有极大的优越性。然而，应该警惕这样的一个危险：任意度量空间中的球和球面也都享有 $\mathbf{R}^3$ 中的球及球面所具有的性质。其实并不总是如此。一个不寻常的性质是：一个球面可以是空集。例如，在离散度量空间 1.1-8 中，当 $r\neq 1$ 时，$S(x_0;r)=\phi$。（请考虑半径为 1 的球面是什么？）另外一个不寻常的性质将在后面指出。

让我们再给出下面两个相关的概念。

1.3-2定义（开集，闭集） 度量空间X的子集M，如果以M的每一点为球心，都能作一个开球整个包含在M内，则称M是开的。X的子集K，如果它（在X中）的余集是开的，也就是说$K^c=X-K$是开的，则称K是闭的。

读者容易从定义看出，一个开球是开集，而闭球是闭集。

半径为 ε 的开球$B(x_0;\varepsilon)$常常叫做 x_0 的一个 ε-邻域。（据定义 1.3-1，这里的 $\varepsilon>0$。）所谓 x_0 的一个**邻域**①，是指X的含有 x_0 的一个 ε-邻域的任一子集。

从定义直接看出，x_0 的每个邻域都含有 x_0；换句话说，x_0 是它的每一邻域中的点。而当N是 x_0 的一个邻域且$N\subset M$时，则M也是 x_0 的一个邻域。

如果$M\subset X$是 x_0 的一个邻域，则称 x_0 是集合M的一个**内点**。M的所有内点构成的集合叫做M的**内部**，可以记为M^0或$\mathrm{Int}(M)$，而没有公认的记法。$\mathrm{Int}(M)$是开的，并且是包含在M中的最大开集。

若把X的所有开子集构成的集族记为$\mathscr{T}$，则不难证明有如下性质：

（**T1**） $\phi\in\mathscr{T}$，$X\in\mathscr{T}$；

（**T2**） $\mathscr{T}$中任意多个成员之并仍属于$\mathscr{T}$；

（**T3**） $\mathscr{T}$中有限多个成员之交仍属于$\mathscr{T}$。

证明：由于ϕ没有元素，故ϕ是开集。显然，X是开集，这就证明了（$T1$）。现证（$T2$）。开集之并U的任意一点 x，至少属于其中的某一开集M，并且M含有一个以 x 为中心的球B。由并的定义，则知$B\subset U$。这就证明了（$T2$）。最后，若 y是开集$M_1, M_2, \cdots, M_n$之交的任一点，则每个M_i都含有一个以 y 为中心的球，而这些球中的最小者也含在那些开集之交中。从而证明了（$T3$）。

我们要提出的是，（$T1$）至（$T3$）是如此根本的性质，以致于可望在推广到更为一般的情形下仍保留这些性质。据此，我们定义**拓扑空间**（X，$\mathscr{T}$）如下：给定集合X和X的一族满足（$T1$）至（$T3$）的子集$\mathscr{T}$，则（X，$\mathscr{T}$）便叫做一个拓扑空间，而集合$\mathscr{T}$叫做X的一个拓扑。从这个定义可知：

度量空间是拓扑空间。

在研究连续映射中，开集也起着重要的作用，而这里的连续性是微积分中连续性概念的一个自然推广，定义如下：

---

① 在老的文献中，所采用的邻域是开集，但根据这里的定义这一要求已被降低了。

1.3-3定义（连续映射） 令$X=(X,d)$，$Y=(Y,\tilde{d})$是两个度量空间。映射T：$X\to Y$被说成是在点$x_0\in X$连续的，如果对每个$\varepsilon>0$，都有$\delta>0$存在，使得①（见图6）对所有满足$d(x, x_0)<\delta$的x，都有$\tilde{d}(Tx, Tx_0)<\varepsilon$。如果$T$在$X$的每一点连续，则称$T$是连续的。

重要而有趣的是，连续映射能够用开集的术语表征如下：

1.3-4定理（连续映射） 度量空间X到度量空间Y的映射T，当且仅当Y的任一开子集的逆象是X中的开子集时，才是连续的。

证明：(*a*) 假定T是连续的。令$S\subset Y$是开的，而S_0是S的逆象。若$S_0=\phi$，则它是开的。现令$S_0\neq\phi$。任取$x_0\in S_0$，令$y_0=Tx_0$。由于S是开的，故它含有y_0的一个ε-邻域N，见图7。由于T是连续的，故x_0有一个δ-邻域N_0被映入N。由于$N\subset S$，故有$N_0\subset S$。因为$x_0\in S_0$是任取的，所以S_0是开的。

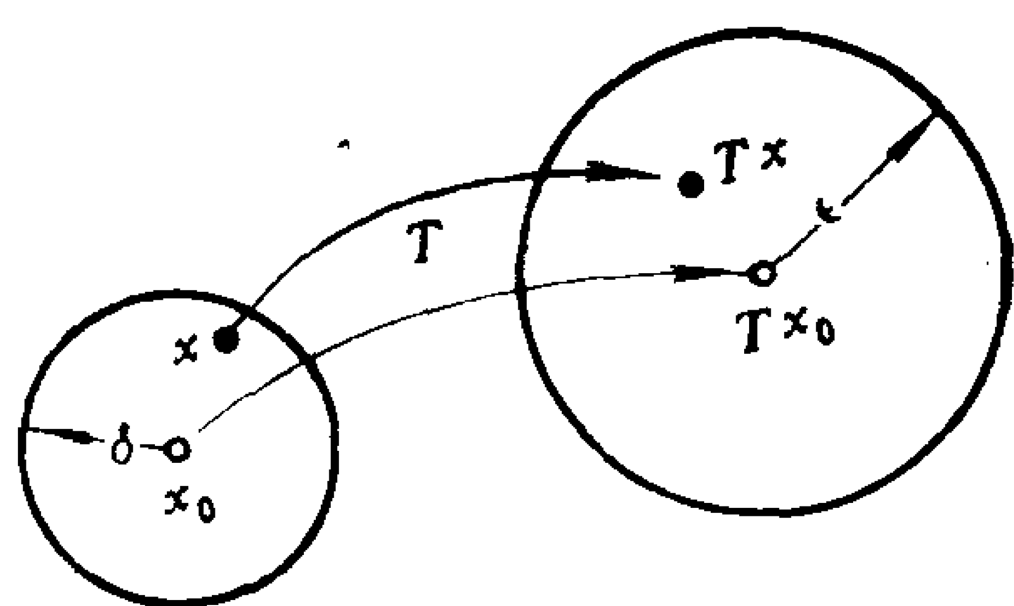


图6 在欧几里德平面$X=R^2$和$Y=R^2$的情况下，定义1.3-3中不等式的说明

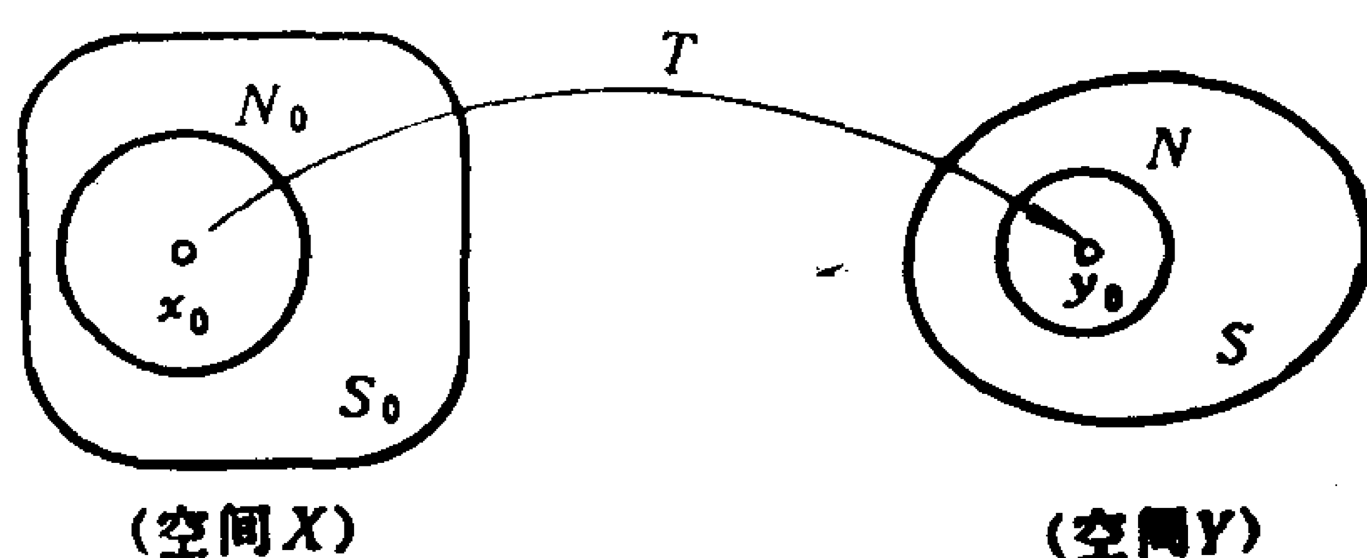


图7 定理1.3-4的证明(a)的表示

(*b*) 反之，假定Y中每个开集的逆象都是X中的开集。则对每个$x_0\in X$和Tx_0的任一ε-邻域N，N的逆象N_0是开的，这是由于N是开的，且N_0含有x_0。因此，N_0也含有x_0的一个δ-邻域，且因N_0被映入到N而它也被映入N。故由定义知，T在x_0是连续的。由于$x_0\in X$是任意的，所以T是连续的。

现在我们再引入两个互相关联的概念。令M是度量空间X的一个子集。则点$x_0\in X$（它可以是，也可以不是M的点）叫做M的**聚点**（或极限点），如果x_0的每个邻域至少含有一个异于x_0的点$y\in M$。M的所有点和所有聚点构成的集合，叫做M的**闭包**，并记为$\overline{M}$。它是包含M的最小闭集。

在继续讲解新内容之前，我们指出度量空间中的球的另一个不寻常的性质。在$\mathbf{R}^3$中，开球$B(x_0; r)$的闭包$\overline{B(x_0; r)}$就是闭球$\tilde{B}(x_0; r)$，而在一般度量空间中却未必如此。请读者举一个例子来说明它。

利用闭包的概念，我们能给出在以后的研究中特别重要的一个定义：

1.3-5定义（稠密集，可分空间） 度量空间x的子集M若满足$\overline{M}=X$，则称M在X中稠密。如果X有一个可数的稠密子集，则称X是可分的。（至于可数集的定义，如有必要可看附录1中的$A1.1$。）

---

① 在微积分中通常写为$y=f(x)$。相应的x在T之下的象被记为$T(x)$。然而，在泛函分析中为了简化公式，习惯上省略括号而记为Tx。在A1.2中有关于映射的定义的复习，见附录1。

因此，若M在X中稠密，则X中的每一个球，不管它怎样小，总要含有M的点。换句话说，在这种情况下不存在点 $x\in X$，它有一个不含M的点的邻域。

稍后将会看到，可分的度量空间比不可分的度量空间要简单点。暂且考虑几个重要的可分与不可分空间的例子，以加深对这些基本概念的理解。

例 子

1.3-6实直线R 实直线 R是可分的。

证明：在R中所有有理数的集合Q是可数的，并且是稠密的。

1.3-7复平面C 复平面C是可分的。

证明：实部和虚部都是有理数的所有复数集合，是C中的可数稠密集。

1.3-8离散度量空间 一个离散的度量空间X，当且仅当X是可数的时候，才是可分的。（参考1.1-8）

证明：离散度量决定了：X的任一真子集都不能在X中稠密。因此，只有X本身是X中的稠密子集。若要X可分，只有X可数。反之，X可数必有X可分。

1.3.9空间l^∞ 空间l^∞是不可分的（参见1.1-6）

证明：令$y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3\cdots)$是一个由零和1构成的序列。则$y\in l^\infty$。用 y 来构造一个二进位制表示的实数

$$\hat{y}=\frac{\eta_1}{2^1}+\frac{\eta_2}{2^2}+\frac{\eta_3}{2^3}+\cdots$$

我们利用区间〔0，1〕中的点集是不可数的事实。由于每个$\hat{y}\in$〔0，1〕皆有一个二进位制的表示，且不同的数有不同的二进位制表示。再由 y与$\hat{y}$的一一对应知，形如y的序列集合在l^∞中是一个不可数的子集S。由l^∞中的度量可知，S中的两个元素当且仅当它们之间的距离为1时才不相同。所以我们以S中不同的元素y为中心，以1/3为半径，可作多到不可数的互不相交的小球。假如M是l^∞中的任一稠密子集，则所作的每一个不相交小球都将含有M的点，从而说明M是不可数的。由于M是任意的稠密集，知l^∞不可能有可数的稠密子集。从而证明了l^∞是不可分的。

1.3-10空间l^p 空间$l^p(1\leqslant p<+\infty)$是可分的。（参见1.2-3）。

证明：令M是所有形如

$$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots\eta_n, 0, 0, \cdots)$$

的序列集合，其中n是任一正整数，而η_i是有理数。M是可数的。现证M在l^p中是稠密的。任取 $x=(\xi_j)\in l^p$，由于$\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p<\infty$，故对任意的$\varepsilon>0$，存在一个（与$\varepsilon$有关的）$n$，使得

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}|\xi_j|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

又由于有理数在R中是稠密的，所以对每个ξ_j，有一个接近它的有理数η_j。因此，我们可以找到一个 $y\in M$，它满足

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j-\eta_j\right|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

从而推得

$$\left[d(x,y)\right]^p=\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j-\eta_j\right|^p+\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^p<\varepsilon^p$$

因而有$d(x,\ y)<\varepsilon$，并可看出M在 l^p 中稠密。

习　题

1.通过证明（a）任一开球是一个开集，（b）任一闭球是一个闭集来验证“开球”和“闭球”的术语是合乎道理的。

2.在 **R** 上的开球$B(x_0;\ 1)$是什么？**C**中的呢？（参见1.1-5）在$C[a,\ b]$中又怎样？（参见1.1-7）解释图８。

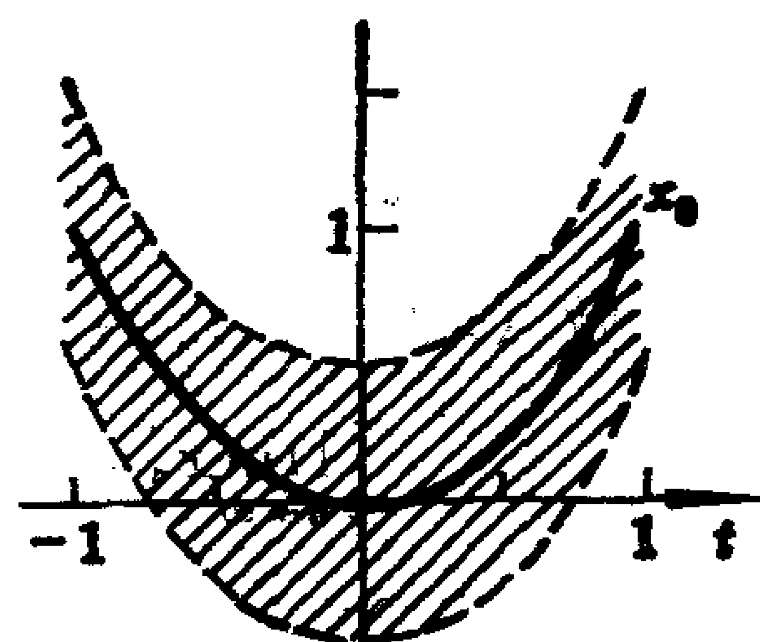


图8　凡图象落在阴影区里的所有的$x\in C[-1,1]$，构成了$x_0=t^2\in C[-1,1]$的一个ε-邻域，这里取$\varepsilon=\frac{1}{2}$。

3.考虑$C[0,\ 2\pi]$并确定使得$y\in\tilde{B}(x;\ r)$的最小的r，其中$x(t)=\sin t$，$y=\cos t$。

4.证明任一非空集合$A\subset(X,\ d)$，当且仅当是开球的并时是开集。

5.领会到一些集合可以既是开集，同时又是闭集这件事实是很重要的。（a）证明X和ϕ总属这种情况。（b）证明在离散度量空间X中（见1.1-8），每个子集都是既开且闭的。

6.若x_0是集合$A\subset(x,\ d)$的一个聚点，证明x_0的任一邻域都含有A的无穷多点。

7.描述下列各子集的闭包。(a)**R**上的整数集，(b)**R**上的有理数集，(c)**C**中具有有理实部和虚部的复数集，(d)圆盘$\{z\mid |z|<1\}\subset$**C**。

8.证明在一个度量空间中，一个开球$B(x_0;\ r)$的闭包$\overline{B(x_0;\ r)}$可以不同于闭球$\tilde{B}(x_0;\ r)$。

9.证明$A\subset\overline{A}$，$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$。

10.一个点x若是不属于闭集$M\subset(X,\ d)$，则它到M的距离不等于零。为了证明这点，只须证明：当且仅当$D(x,\ A)=0$时有$x\in\overline{A}$，其中A是X的任一非空子集(参考§1.2节的习题10）。

11.（**边界**）集合$A\subset(X,\ d)$的边界点x是X中的这样的点（它可以属于A，也可以不属于A），x的每个邻域既包含A的点，也包含不属于A的点；A的所有边界点的集合叫做A的边界。描述出(a)**R**上的区间$(-1,\ 1)$，$[-1,\ 1)$，$[-1,\ 1]$，(b)**R**上的有理数集，(c)圆盘$\{z\mid |z|<1\}\subset$**C**及圆盘$\{z\mid |z|\leqslant 1\}\subset$**C**的边界。

12.（**空间B[a, b]**）证明$B[a,\ b]$（$a<b$）是不可分的（见1.2-2）。

13.证明：当且仅当度量空间X有一个具备下列性质的可数子集Y时，才是可分的。对每个$\varepsilon>0$和每个$x\in X$，都有一个$y\in Y$满足$d(x,\ y)<\varepsilon$。

14.（**连续映射**）证明：映射T：$X\to Y$当且仅当任一闭集$M\subset Y$的逆象是X中的闭集

时，才是连续的。

15.说明：一个开集在连续映射下的象不必是开的。

§1.4 收敛性，柯西序列，完备性

我们知道，在微积分中实数序列起着重要的作用，而定义序列收敛性这一基本概念要用到**R** 上的度量。对于复数序列亦是如此，必须用到复平面上的度量。在任意的度量空间 $X=(X, d)$ 中，情形十分类似。也就是说，我们可以研究 X 中的点列(x_n)，并能用度量 d 按与微积分中相类似的方式去定义收敛性。

1.4-1定义（序列的收敛性，极限） 度量空间 $X=(X, d)$ 中的序列 (x_n) 是收敛的，是指存在一个$x\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x)=0$$

这时 x 叫做 (x_n) 的极限，并写成

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

或者简记为

$$x_n \to x$$

有时我们还说成，(x_n) 收敛到 x 或有极限 x。若 (x_n) 不收敛，则便说是**发散**的。

在这个定义中，度量d是怎样被利用的？我们看到，d 给出了一个实数序列 $a_n=d(x_n, x)$，而这个实数序列的收敛性便定义了 (x_n) 的收敛性。因此，如果$x_n\to x$，则给定 $\varepsilon>0$后，一定存在一个$N=N(\varepsilon)$，当$n>N$时，所有的x_n都落在x的一个ε-邻域$B(x; \varepsilon)$内。

为避免不足道的误解，我们要注意，一个收敛序列的极限必须是 1.4-1 中空间X的点。例如，令X是**R**上的开区间（0，1）且由$d(x, y)=|x-y|$ 来定义其上的度量。则X中的序列（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…）是不收敛的，因为这个序列可望收敛到的"0"是不属于X的。在本节的稍后部分，我们将再回到这一问题和与此类似的情形。

首先让我们证明，微积分中大家熟悉的关于收敛序列的有界性和极限的唯一性这两个性质，也能搬到现在的更为一般的度量空间中。

若X的非空子集M的直径

$$\delta(M)=\sup_{x, y\in M} d(x, y)$$

是有限的，则称M是有界集。若把X中的序列 (x_n) 看成X中的点集后是一个有界子集，则称 (x_n) 是一个**有界序列**。

显然，若M是有界的，则$M\subset B(x_0; r)$，其中 x_0 为 X中的任一点，而 r 是一个（足够大）的实数。反之亦然。

我们的论断如下：

1.4-2引理（有界性，极限） 令$X=(X, d)$ 是度量空间，则

(a) X 中的收敛序列是有界的，且极限唯一。

(b) 在X中若$x_n \to x$，$y_n \to y$，则$d(x_n, y_n) \to d(x, y)$。

证明：(a) 假定$x_n \to x$，取$\varepsilon = 1$，则可求得N，使得对所有的$n > N$有$d(x_n, x) < 1$，因此，据三角不等式（$M4$），见§1.1，对所有的n有$d(x_n, x) < 1 + a$，其中

$$a = \max\{d(x_1, x), d(x_2, x), \cdots, d(x_n, x)\}$$

这便证明了（x_n）是有界的。假若$x_n \to x$，且$x_n \to z$，则由（$M4$）可得

$$0 \leqslant d(x, z) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, x) \to 0 + 0$$

再从（$M2$）可推出极限的唯一性$x = z$。

(b) 根据§1.1的（1），可知

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

因此，便得到

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

交换x_n与x及y_n与y的位置，再乘-1，便得到一个类似的不等式

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \geqslant -[d(x_n, x) + d(y_n, y)]$$

合在一起，便得

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0$$

随着$n \to \infty$时。

下面我们来定义度量空间的完备性概念，它在我们进一步的研究中是很基本的。将会看到，完备性从§1.1中的（$M1$）至（$M4$）是推导不出来的，因为存在着不完备的度量空间。也就是说，完备性是度量空间可以有，也可以没有的一个额外性质。有各种结论使得完备的度量空间比不完备的度量空间更完美更简单。这些结论指的是什么，随着我们的深入讨论会越来越清楚。

首先让我们回顾一下，在微积分中实数或复数序列分别在实直线 **R** 上或复平面 **C** 中收敛的充分必要条件是（x_n）满足柯西收敛准则，即对任意给定的$\varepsilon > 0$，都存在$N = N(\varepsilon)$，使得对所有的m，$n > N$，都有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

（在$A1.7$中包含了一个证明；见附录1）这里的$|x_m - x_n|$表示从x_m到x_n在实直线上或复平面中的距离。因此，我们可把柯西准则中的不等式写为如下形式

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \qquad (m, n > N)$$

若序列（x_n）满足柯西准则的条件，我们便把它叫做一个柯西序列。则柯西准则简单地说就是：实数或复数序列在**R**上或**C**内收敛的充分必要条件是它为一个柯西序列。遗憾的是，在一般的度量空间中，情况变得复杂起来，可能有不收敛的柯西序列。这种空间缺少一个极为重要的性质，即所谓完备性。这一考虑导致如下的定义，它首先由弗列谢（*Frechet*）在1906年给出。

1.4-3定义（柯西序列，完备性） 度量空间$X = (X, d)$中的序列（x_n），如果对任

意给定的$\varepsilon>0$，都存在一个$N=N(\varepsilon)$，使得对每个m，$n>N$都有

$$d(x_m, x_n)<\varepsilon \tag{1}$$

则称它是一个柯西序列（或基本列）。如果空间X中的每个柯西序列都是收敛的（即有属于X的极限），则称X是完备的。

用完备性来表述的话，柯西收敛准则意味着：

1.4-4定理（实直线，复平面） 实直线和复平面都是完备的度量空间。

更为一般地直接从定义看出，完备的度量空间是这样的空间，在其中柯西条件（1）是序列收敛的充分必要条件。

在应用中，完备的和不完备的度量空间都是重要的，在下节我们将系统地研究。

我们暂且举出几个比较容易得到的不完备空间。从实直线上挖掉一个点a，便得到一个不完备空间$\mathbf{R}-\{a\}$。更厉害些，把所有无理数都挖去，则得到有理数集$\mathbf{Q}$，它也是不完备的。$\mathbf{R}$上的开区间(a, b)，按$\mathbf{R}$诱导的度量，是另一个不完备度量空间，等等。

从定义明显地看出：在任意的度量空间中，条件（1）不一定再是序列收敛的充分条件，因为空间有可能是不完备的。为了更好地理解这一情形，让我们再考虑一个简单例子。取空间$X=(0, 1]$，用$d(x, y)=|x-y|$在其上定义通常的度量。序列$(x_n)=(\frac{1}{n})$是X中的一个柯西序列，但它不收敛，因为点0（序列可望收敛到的点）不属于X。这个例子也说明了：一个序列的收敛性不单是序列本身的禀性，便且也与它所处的空间有关。换句话说，一个收敛的序列不是收敛到它本身的一点，而是收敛到所在空间的某一点。

尽管条件（1）不再是收敛的充分条件，但它仍是序列收敛的必要条件。事实上，很容易得出如下结果。

1.4-5定理（收敛序列） 度量空间中每个收敛序列都是一个柯西序列。

证明：若$x_n\to x$，则对每个$\varepsilon>0$，都存在一个$N=N(\varepsilon)$，使得对一切$n>N$，都有

$$d(x_n, x)<\frac{\varepsilon}{2}$$

因此，根据三角不等式，对m，$n>N$可得

$$d(x_m, x_n)\leqslant d(x_m, x)+d(x, x_n)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

这便证明了(x_n)是柯西序列。

我们将看到，很多基本结果，例如线性算子理论方面的，都将依赖于相应空间的完备性。在微积分中，为什么我们采用$\mathbf{R}$而不采用有理直线$\mathbf{Q}$（有通常度量的全部有理数集），就是因为实直线$\mathbf{R}$的完备性。

最后，让我们证明后面需要的与收敛性和完备性相关的三个定理来结束这一节的内容。

1.4-6定理（闭包，闭集） 令M是度量空间(X, d)的非空子集，$\bar{M}$是前一节定义的闭包，则

(a) $x\in\bar{M}$，当且仅当存在M中的一个序列(x_n)，它收敛到x。

(b) M是闭的，当且仅当M中的序列(x_n)若收敛到x时，则有$x\in M$。

证明：(*a*) 设$x\in\bar{M}$。若$x\in M$，取序列$(x, x, \cdots)$，显然它以x为极限。若$x\notin M$，则x是M的一个聚点。因此，对每个$n=1, 2, \cdots$，球$B(x; \frac{1}{n})$都包含一个$x_n\in M$，由于当$n\to\infty$时$\frac{1}{n}\to 0$，故$x_n\to x$。

反之，若(x_n)是M中的序列且$x_n\to x$，则$x\in M$或x的每个邻域都含有点$x_n\neq x$，所以x是M的聚点。由闭包的定义，故$x\in\bar{M}$。

(b) M是闭的，当且仅当$M=\bar{M}$，所以 (*b*) 很容易从 (*a*) 推出。

1.4-7定理（完备子空间） 完备度量空间X的子空间M是完备的，当且仅当集合M在X中是闭的。

证明：设M是完备的。根据1.4-6(*a*)，对每个$x\in\bar{M}$，都有M中的序列(x_n)收敛到x。由1.4-5知(x_n)是柯西序列，再由M的完备性，知(x_n)在M中收敛，从而根据1.4-2中极限的唯一性，便证明$x\in M$。因为$x\in\bar{M}$是任意的，故证明了M是闭的。

反之，设M是闭的且(x_n)是M中的一个柯西序列。则$x_n\to x\in X$，据1.4-6(*a*)知$x\in\bar{M}$，而据假设$M=\bar{M}$，故$x\in M$。因此，M中的任一柯西序列在M中收敛，这便证明了M的完备性。

这个定理非常有用，以后经常用到它。下一节的例1.5-3就包含了第一个应用，并且是很典型的。

最后一个定理表明，序列的收敛性在研究映射的连续性时，是很重要的。

1.4-8定理（连续映射） 度量空间(X, d)到度量空间$(Y, \tilde{d})$的映射$T: X\to Y$在点$x_0\in X$连续，当且仅当$x_n\to x_0$时有$Tx_n\to Tx_0$。

证明：设T在x_0是连续的，见定义1.3-3。则对给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得当$d(x, x_0)<\delta$时有$\tilde{d}(Tx, Tx_0)<\varepsilon$。令$x_n\to x_0$，则存在$N$，使得对一切$n>N$都有$d(x_n, x_0)<\delta$。因此，对一切的$n>N$，有$\tilde{d}(Tx_n, Tx_0)<\varepsilon$。据定义，此即意味着$Tx_n\to Tx_0$。

反过来，设$x_n\to x_0$蕴含着$Tx_n\to Tx_0$，现证明T在x_0是连续的。假定T在x_0不连续，则存在一个$\varepsilon>0$，使得对每个$\delta>0$都有一个$x\neq x_0$。它虽满足$d(x, x_0)<\delta$，但却$\tilde{d}(Tx, Tx_0)\geqslant\varepsilon$。特别是取$\delta=\frac{1}{n}$，有$x_n$满足$d(x_n, x_0)<\frac{1}{n}$，但却$\tilde{d}(Tx_n, Tx_0)\geqslant\varepsilon$。显然$x_n\to x_0$，但$Tx_n$却不收敛到$Tx_0$。这就与$Tx_n\to Tx_0$矛盾，从而证明了定理。

习　题

1.（**子序列**）若度量空间X中的序列(x_n)是收敛的且有极限x，证明(x_n)的每一个子序列(x_{n_k})都是收敛的，且有同一个极限x。

2.若(x_n)是一个柯西序列且有一个收敛的子序列$(x_{n_k})\to x$，证明(x_n)也是收敛的，且极限为x。

3.证明$x_n\to x$的充要条件是，对x的每个邻域V，都存在一个整数n_0，使得对所有的$n>n_0$，都有$x_n\in V$。

4.（**有界性**）证明柯西序列是有界的。

5.在度量空间中，序列的有界性对于序列为柯西序列是充分的吗？对序列为收敛的充分

吗？

6.若 (x_n) 和 (y_n) 是度量空间 (X, d) 中的柯西序列，证明 $a_n = d(x_n, y_n)$ 是收敛的。举例说明。

7.给出一个引理1.4-2(b) 的间接证明。

8.若d_1和 d_2是同一基集X上的两个度量，且存在正数 a 和 b 使得对所有的 x，$y \in X$ 有

$$ad_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant bd_1(x,y)$$

证明 (X, d_1) 中的柯西序列也是 (X, d_2) 中的柯西序列，反之亦然。

9.利用习题 8，证明 § 1.2中的习题13至15中的度量空间有相同的柯西序列。

10.利用 **R** 的完备性去证明 **C** 的完备性。

§ 1.5 例子—完备性的证明

在各种应用中，集合X被给定（例如，序列的集合或函数的集合，）并且要使之成为一个度量空间，也就是在X上选定一个度 量 d。而留下的工作是决定 (X, d) 究竟有没有所希望的完备性。为了证明完备性，就需在X中任取一个柯西序列 (x_n)，然后证明它在X中是收敛的。对于不同的空间，其证明的复杂性可以很不一样。但大体上都有共同的款式：

(i) 构造一个元素 x（作为极限点）。

(ii) 证明x属于所考虑的空间。

(iii) 证明收敛性$x_n \to x$（在给定的度量下）。

对于某些在理论和实际研究中经常出现的空间，我们将给出其完备性的证明。读者将会注意到，在这些证明中（例子 1.5-1 至 1.5-5），我们都是借助于实直线或复平面的完备性（定理1.4-4）。这也是很典型的。

例 子

1.5-1 **R^n和 C^n的完备性** 欧几里德空间R^n和酉空间C^n是完备的（参见1.1-5）。

证明：首先考虑R^n。我们还记得R^n上的度量（欧几里德度量）为

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \eta_j)^2\right)^{1/2}$$

其中$x = (\xi_j)$，$y = (\eta_j)$；见 § 1.1中（6）。现考察R^n中的任一柯西序列 (x_m)，并记$x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots \xi_n^{(m)})$。由于 (x_m) 是柯西序列，故对每个$\varepsilon > 0$，都存在N使得

$$d(x_m, x_r) = \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2\right)^{1/2} < \varepsilon \quad (m, r > N) \tag{1}$$

平方后，对m，$r > N$和$j = 1, 2, \cdots, n$，便有

$$(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2 < \varepsilon^2 \quad 且 \quad |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}| < \varepsilon$$

这表明对每个固定的 j $(1 \leqslant j \leqslant n)$，序列 $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \xi_j^{(3)}, \cdots)$ 是实数柯西序列。由定理1.4-4知，它是收敛的。不妨记 $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ $(m \to \infty)$。利用这样的 n 个极限，可定义

$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$。显然。$x \in \mathbf{R}^n$。在（1）中令$r\to\infty$，便得

$$d(x_m, x) \leqslant \varepsilon \qquad (m>N)$$

这就证明了x是(x_m)的极限，从而证明了$\mathbf{R}^n$的完备性。用同样的方法从定理1.4-4可证明$\mathbf{C}^n$的完备性。

1.5-2 l^∞的完备性　空间l^∞是完备的（见1.1-6）。

证明：令(x_m)是空间l^∞中的任一柯西序列，其中$x_m=(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots)$。由于$l^\infty$中的度量是

$$d(x, y)=\sup_j |\xi_j-\eta_j|$$

其中$x=(\xi_j)$，$y=(\eta_j)$，(x_m)是柯西序列，故对任意的，$\varepsilon>0$，存在N使得对一切$m, n>N$有

$$d(x_m, x_n)=\sup_j |\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon$$

毫无疑问，对每个固定的j，也有

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon \qquad (m, n>N) \qquad (2)$$

因此，对每个固定的j，序列$(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \cdots)$是一个柯西数列。据定理1.4-4知，它是收敛的，不妨设$\xi_j^{(m)}\to\xi_j$ $(m\to\infty)$。利用这无穷多个极限：$\xi_1, \xi_2, \cdots$，可定义$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$。现在来证明$x\in l^\infty$且$x_m\to x$。在（2）中令$n\to\infty$，便有

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j|\leqslant\varepsilon \qquad (m>N) \qquad (2^*)$$

由于$x_m=(\xi_j^{(m)})\in l^\infty$，故存在实数$k_m$，使得$|\xi_j^{(m)}|\leqslant k_m$对所有的$j$成立。因此利用三角不等式可得

$$|\xi_j|\leqslant|\xi_j-\xi_j^{(m)}|+|\xi_j^{(m)}|\leqslant\varepsilon+k_m \qquad (m>N)$$

这个不等式对每个j都是成立的，而右端$\varepsilon+k_m$又不含有j，故(ξ_j)是一个有界数列。这就意味着$x\in l^\infty$。从(2^*)还可得到

$$d(x_m, x)=\sup_j|\xi_j^{(m)}-\xi_j|\leqslant\varepsilon \qquad (m>N)$$

这便证明了$x_m\to x$。由于(x_m)是任意的柯西序列，故l^∞是完备的。

1.5-3 c 的完备性　空间c是所有收敛的复数序列$x=(\xi_j)$构成的，其上的度量是空间l^∞的度量诱导出来的。

空间c是完备的。

证明：c是l^∞的子空间，如果能证明c在l^∞是闭的，则据定理1.4-7便推出c是来备的。

任取$x=(\xi_j)\in\bar{c}$，其中$\bar{c}$为c的闭包。根据1.4-6(a)，存在$x_n=(\xi_j^{(n)})\in c$使得$x_n\to x$。因此，任给定$\varepsilon>0$，存在一个N使得对$n\geqslant N$和所有的j，有

$$|\xi_j^{(n)}-\xi_j|\leqslant d(x_n, x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

特别是对$n=N$和所有的j成立。由于$x_N\in c$，故它的所有项$\xi^{(N)}$形成一个收敛序列。这一序列是柯西序列，因此存在N_1，使得

$$|\xi_j^{(N)}-\xi_k^{(N)}|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (j,\ k\geqslant N_1)$$

这个不等式关于所有的 $j, k\geqslant N_1$ 给出如下的不等式：

$$|\xi_j-\xi_k|\leqslant|\xi_j-\xi_j^{(N)}|+|\xi_j^{(N)}-\xi_k^{(N)}|+|\xi_k^{(N)}-\xi_k|<\varepsilon$$

这就证明了序列 $x=(\xi_j)$ 是收敛的，因此 $x\in c$。由于 $x\in\bar{c}$ 是任取的，这就证明了 c 在 l^∞ 中的闭性。从而据1.4-7推出 c 的完备性。

1.5-4 l^p 的完备性 空间 l^p 是完备的；这里的 p 是固定的且 $1\leqslant p<+\infty$。(见1.2-3)

证明：设 (x_n) 是空间 l^p 中的任一柯西序列，其中 $x_m=(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots)$。则对每个 $\varepsilon>0$ 都存在一个 N，使得对所有的 $m, n>N$，有

$$d(x_m, x_n)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}\right|^p\right)^{1/p}<\varepsilon \qquad (3)$$

这就推出了，对每个 $j=1, 2, \cdots$，有

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon \qquad (m,\ n>N) \qquad (4)$$

选定 j 后，从（4）看出 $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \cdots,)$ 是一个柯西数列。由于 **R** 和 **C** 是完备的（见1.4-4），故它是收敛的，设 $\xi_j^{(m)}\to\xi_j(m\to\infty)$。用这些极限定义 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots,)$ 并可证明 $x_m\to x$ 及 $x\in l^p$。

从（3）可知，对所有的 $m, n>N$ 有

$$\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|^p<\varepsilon^p \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

令 $n\to\infty$，对 $m>N$ 可得到

$$\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^{(m)}-\xi_j|^p\leqslant\varepsilon^p \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,)$$

再令 $k\to\infty$，则对 $m>N$ 有

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(m)}-\xi_j|^p\leqslant\varepsilon^p \qquad (5)$$

这就证明了 $x_m-x=(\xi_j^{(m)}-\xi_j)\in l^p$。由于 $x_m\in l^p$，用闵可夫斯基不等式（12）（见§1.2），则可推得

$$x=x_m+(x-x_m)\in l^p$$

此外，（5）中的级数表示 $[d(x_m, x)]^p$，所以（5）意味着 $x_m\to x$，由于 (x_m) 是 l^p 中任取的柯西序列，这就证明了 l^p 的完备性，其中 $1\leqslant p<+\infty$。

1.5-5 $C[a, b]$ 的完备性 函数空间 $C[a, b]$ 是完备的；这里 $[a, b]$ 是 **R** 上任意给定的闭区间。（参见1.1-7）

证明：设 (x_m) 是 $C[a, b]$ 中的任一柯西序列。则给定任一 $\varepsilon>0$，存在 N 使得对所有的 $m, n>N$，都有

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in J} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \tag{6}$$

其中$J = [a, b]$。因此，对任一固定的 $t = t_0 \in J$，

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \varepsilon \qquad (m, n > N)$$

这证明了（$x_1(t_0)$，$x_2(t_0)$，…）为一个实数柯西序列。由于**R** 是完备的（见1.4-4），这序列是收敛的，不妨设$x_m(t_0) \to x(t_0)$（$m \to \infty$）。以这种方式针对每个 $t \in J$ 有唯一的实数$x(t)$与之对应。这就（点态地）在J上定义了一个函数x。下面证明$x \in C[a,b]$ 且$x_m \to x$。

在（6）中令$n \to \infty$，便有

$$\max_{t \in J} |x_m(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon \qquad (m > N)$$

因此对每个 $t \in J$，有

$$|x_m(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon \qquad (m > N)$$

这证明了$(x_m(t))$ 在J上一致收敛到$x(t)$，由于每个x_m都在J上连续，且收敛性是一致的，作为微积分的一个已知结果（参考习题 9），其极限函数x在J上是连续的。因此$x \in C[a,b]$且也有$x_m \to x$。从而证明了$C[a, b]$ 的完备性。

在 1.1-7 以及在这里，我们都假定函数x 是实值的，这是为了简单起见。我们把这个空间叫做实的$C[a, b]$。类似地，若我们取定义在区间 $[a, b] \subset$ **R** 上 的 复值连续函数，便得到复空间$C[a, b]$。这个空间也是完备的，其证明几乎与前面相同。

此外，上述证明也说明如下事实。

1.5-6定理（一致收敛性） 在空间$C[a, b]$ 中收敛性 $x_m \to x$ 是一致 收 敛 的。也就是说，(x_m) 在 $[a, b]$ 上一致收敛到x。

因此，$C[a, b]$ 上的度量描述了 $[a, b]$ 上的一致收敛性。为此，有时把 它 叫做一致度量。

为了对完备性和有关的概念能达到更好的理解，让我们最后再研究一些例子。

不完备的度量空间的例子

1.5-7空间Q 如果所有有理数的集合，其上的度量就是通常的度量$d(x, y) = |x - y|$，其中x，$y \in$ **Q**。并且把**Q**叫做有理直线，**Q**是不完备的。（如何证明？）

1.5-8多项式 令X是所有多项式的集合，而每个多项式看作是定 义 在 某 有 限 闭区间 $J = [a, b]$ 上的 t 的函数。在X上定义度量 d 如下

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$$

这个度量空间（X，d）不是完备的。事实上，能构造一个多项式序列，它在 J 上一致 收敛到不是多项式的一个连续函数。这就给出了在X中没有极限的柯西序列。

1.5-9连续函数 令X是 $J = [0, 1]$ 上的所有连续实值函数的集合，且定义

$$d(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt$$

这一度量空间（X，d）是不完备的。

证明：在图9中的函数x_m构成一个柯西序列，这是因为$d(x_m, x_n)$等于图10中三角形的面积，而对每个给定的$\varepsilon>0$，只要$m, n>\frac{1}{\varepsilon}$，便有$d(x_m, x_n)<\varepsilon$。下面来证明这个柯西序列是不收敛的。首先有

$$x_m(t)=\begin{cases}0 & t\in[0, \frac{1}{2}]\\ 1 & t\in[a_m, 1]\end{cases}$$

其中$a_m=\frac{1}{2}+\frac{1}{m}$，因此。对每个$x\in X$都有

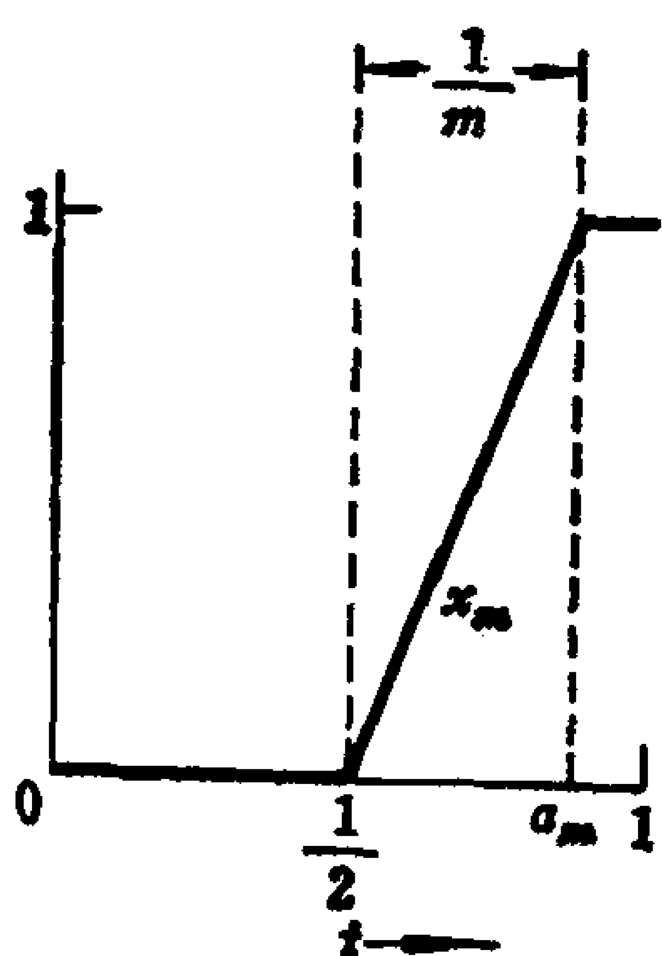


图9　例1.5-9

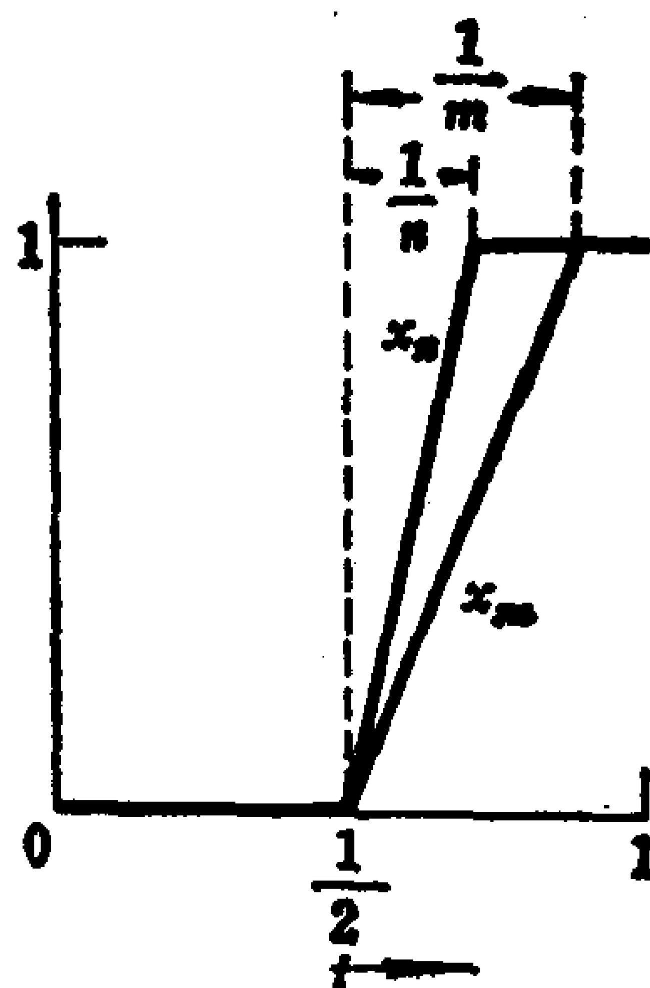


图10　例1.5-9

$$\begin{aligned}d(x_m, x)&=\int_0^1|x_m(t)-x(t)|\,dt\\&=\int_0^{1/2}|x(t)|\,dt+\int_{1/2}^{a_m}|x_m(t)-x(t)|\,dt\\&\quad+\int_{a_m}^1|1-x(t)|\,dt\end{aligned}$$

由于被积函数是非负的，所以上式右端的每个积分也都是非负的。因此由$d(x_m, x)\to 0$可推出每个积分都趋向于零，而又由于x是连续的，便得出

$$x(t)=\begin{cases}0 & t\in[0, \frac{1}{2})\\ 1 & t\in(\frac{1}{2}, 1]\end{cases}$$

但是，对于连续函数这是不可能的。所以(x_m)是不收敛的，也就是说，它在X中没有极限。这就证明了X是不完备。

习　题

1.令$a, b\in\mathbf{R}$且$a<b$，证明开区间(a, b)是$\mathbf{R}^1$的不完备子空间，而闭区间$[a, b]$是完备的。

2.令X是所有n元实序组$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots\xi_n)$的空间，在其上定义度量为

$$d(x,y)=\max_j|\xi_j-\eta_j|$$

其中$y=(\eta_j)$。证明（X，d）是完备的。

3．令$M\subset l^\infty$是所有有限非零序列$x=(\xi_j)$构成的子空间。在M当找出一个柯西序列它在M中是不收敛的，所以M是不完备的。

4．应用定理1.4-7来证明习题3中的M是不完备的。

5．令X是所有整数的集合，用$d(m,n)=|m-n|$在其上定义度量d。证明（X，d）是完备的度量空间。

6．令X是所有实数的集合，如果我们用

$$d(x,y)=|\text{arc tan}x-\text{arc tan}y|$$

在其上定义度量d，则（X，d）是不完备的，试证明之。

7．令X是所有正整数的集合，定义度量为$d(m,n)|m^{-1}-n^{-1}|$。证明（X，d）是不完备的。

8．（**空间C〔a，b〕**）　$Y\subset C$〔a，b〕是所有满足$x(a)=x(b)$的$x\in C$〔a，b〕构成的子空间，说明Y是完备的。

9．在1.5-5中我们引用了微积分中的下述定理：若〔a，b〕上的连续函数序列（x_n）在〔a，b〕上收敛，且在〔a，b〕上一致收敛，则极限函数x在〔a，b〕上是连续的。请证明这个定理。

10．（**离散度量**）　证明离散度量空间（见1.1-8）是完备的。

11．（**空间s**）　证明在空间s中（见1.2-1），$x_n\to x$，当且仅当对所有$j=1, 2, \cdots$，有$\xi_j^{(n)}\to\xi_j$，其中$x_n=(\xi_j^{(n)})$，$x=(\xi_j)$。

12．利用习题11，证明1.2-1中的序列空间s是完备的。

13．证明在1.5-9中还有另一个柯西序列

$$x_n(t)=\begin{cases} n & 0\leqslant t\leqslant n^{-2} \\ t^{-\frac{1}{2}} & n^{-2}\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

14．证明习题13中的柯西序列（x_n）是不收敛的。

15．令X是只有有限个非零项的实序列$x=(\xi_j)$的集合，在其上定义度量$d(x,y)=\sum|\xi_j-\eta_j|$，其中$y=(\eta_j)$。注意这是一个有限和式，其项数与$x$，$y$有关。证明序列($x_n$)，其中$x_n=$（$\xi_j^{(n)}$），且

$$\xi_j^{(n)}=\begin{cases} j^{-2} & 1\leqslant j\leqslant n \\ 0 & j>n \end{cases}$$

是一个柯西序列，但不收敛。

§1.6　度量空间的完备化

我们知道，有理直线**Q**是不完备的（见1.5-7），但是能够扩充为完备的实直线**R**，并且**Q**的这个完备化**R**使得**Q**在其中是稠密的（见1.3-5）。象我们将要看到的，任一不完备的

度量空间，都能以类似的方式完备化。这是一个很重要的结论。为了便于精确地描述，我们要采用两个相关的概念。当然，这两个概念还有其它的各种应用。

1.6-1定义（等距映射，等距空间） 令$X=(X, d)$和$\tilde{X}=(\tilde{X}, \tilde{d})$是两个度量空间。则

(a) 如果映射$T: X\to\tilde{X}$能保持距离不变，也就是说对所有的$x, y\in X$都有

$$\tilde{d}(Tx, Ty)=d(x, y)$$

便称T是等距映射，或等距，其中Tx，Ty分别是x，y的象。

(b) 若存在一个从X到$\tilde{X}$上的等距对射①，则称X和$\tilde{X}$是等距的。空间X和$\tilde{X}$也称为等距空间。

因此，在等距空间之间，至多是它们的元素的特征有所不同，但从度量的角度来看，是没有什么区别的。而在抽象的研究中，点的特征不是本质的。所以可把两个等距空间视为同一个空间，或同一个抽象空间的两个拷贝。

现在我们可以陈述并证明如下定理：每一个度量空间都能够被完备化。在这个定理中的空间$\hat{X}$又叫做给定空间X的**完备化**。

1.6-2定理（完备化） 对度量空间$X=(X, d)$，一定存在一个完备的度量空间$\hat{X}=(\hat{X}, \hat{d})$，并且有子空间$W\subset\hat{X}$与$X$等距且在$\hat{X}$中稠密。如果对等距空间不加区分的话，则空间$\hat{X}$是唯一的，也就是说，若完备空间$\tilde{X}$也有稠密子空间$\tilde{W}$和$X$等距，则$\tilde{X}$与$\hat{X}$是等距的。

证明：这个定理的证明虽然有点长，但却简单。我们把它分成（a）至（d）四个步骤：

(a) 构造$\hat{X}=(\hat{X}, \hat{d})$；

(b) 构造X到W上的等距映射T，其中$\overline{W}=\hat{X}$；

(c) 证明$\hat{X}$是完备的；

(d) 证明$\hat{X}$是唯一的，若对等距不加区别的话。粗略地讲，我们的任务是对X中的不收敛的柯西序列，给它设计一个合适的极限。然而，我们不想引入“太多”的极限，而是考虑某些“可望收敛到同一极限”的序列，由于这些序列的项最终会变得相互任意接近。这一直观的思想在数学上能够用适当的等价关系来表达。（见后面的（1））这样做不是主观臆想的，而是受到本节开头介绍的有理数集**Q**的完备化过程的启发才提出的。详细的证明如下：

(a) 构造$\hat{X}=(\hat{X}, \hat{d})$。令$(x_n)$和$(x_n')$是$X$中的柯西序列，如果满足

$$\lim d(x_n, x_n')=0 \tag{1}$$

则称(x_n)与(x_n')是等价的②，并记为$(x_n)\sim(x_n')$。在X中互相等价的柯西序列看作一个等价类，而所有等价类$\hat{x}$，$\hat{y}$，…的集合记作$\hat{X}$。所谓$(x_n)\in\hat{x}$是指(x_n)为$\hat{x}$中的一员（或等价类$\hat{x}$的一个代表）。我们置

---

① 对射是一对一且到上的。有关映射的基本概念的复习，请看附录1中的A1.2。注意，等距映射总是一个内射。

② 等价性概念的复习，见附录1中A1.4。

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \tag{2}$$

其中 $(x_n)\in\hat{x}$ ，$(y_n)\in\hat{y}$ 。现证这个极限是存在的。首先有

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$

因此可得到

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leqslant d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

把 m 和 n 的位置交换，可得到一个类似的不等式，合在一起便有

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leqslant d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n) \tag{3}$$

由于 (x_n) 和 (y_n) 是柯西序列，所以不等式右端可取任意小。因为 **R** 是完备的，所以推出了（2）中的极限存在。

我们还必须证明（2）中的极限与等价类中的代表的选择无关。事实上，若 $(x_n)\sim(x_n')$ ，$(y_n)\sim(y_n')$ ，则由（1），当$n\to\infty$时有

$$|d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n')| \leqslant d(x_n, x_n') + d(y_n, y_n') \to 0$$

这就推出断言

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n')$$

下面证（2）中的$\hat{d}$是$\hat{X}$上的一个度量。显然，$\hat{d}$ 满足§1.1中（$M1$）及 $\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}) = 0$ 和（$M3$）。此外，

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \Rightarrow (x_n)\sim(y_n) \Rightarrow \hat{x} = \hat{y}$$

给出了（$M2$），而关于$\hat{d}$ 的（$M4$），对下式

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$$

取 $n\mapsto\infty$ 时的极限便可推出。

(b) 构造等距映射T：$X\to W\subset\hat{X}$。针对每一个 $b\in X$，我们都有一个等价类$\hat{b}\in\hat{X}$包含常数柯西序列 $(b, b, \cdots,)$ 。这就定义了一个从X到W上的映射，其中子空间$W = T(X)\subset\hat{X}$。映射T是由$b\mapsto\hat{b} = Tb$给出的，其中 $(b, b\cdots)\in\hat{b}$。由于（2）简化为

$$\hat{d}(\hat{b}, \hat{c}) = d(b, c)$$

所以可看出T是等距映射。这里$\hat{c}$是 (y_n) 所在的等价类，而对所有的 n，$y_n = c$。任一等距映射是一个内射，并且T：$X\to W$是一个满射，因为$T(X) = W$，因此W和X是等距的；见定义1.6-1(b)。

我们再证明W在$\hat{X}$中稠密。考虑任一$\hat{x}\in\hat{X}$，令 $(x_n)\in\hat{x}$。对每个$\varepsilon>0$都存在N使得

$$d(x_n, x_N) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n>N)$$

令 $(x_N, x_N, \cdots)\in\hat{x}_N$，则$\hat{x}_N\in W$。据（2），有

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_N) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_N) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

这就证明了任意 $\hat{x}\in \hat{X}$的每个 ε-邻域都含有W的一个元素。因此 W 在$\hat{X}$中稠密。

(c) $\hat{X}$的完备性。令 $(\hat{x}_n)$是$\hat{X}$中的任一柯西序列。由于W在$\hat{X}$中稠密，故对每个$\hat{x}_n$，都存在一个$\hat{z}_n\in W$使得

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) < \frac{1}{n} \tag{4}$$

因此据三角不等式，有

$$\hat{d}(\hat{z}_m, \hat{z}_n) \leqslant \hat{d}(\hat{z}_m, \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n)$$

$$< \frac{1}{m} + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \frac{1}{n}$$

因为 $(\hat{x}_n)$ 是柯西序列，所以只要取足够大的 m 和 n，不等式右端就可小于任意给定的 $\varepsilon>0$。因此 $(\hat{z}_m)$是柯西序列。由于：T：$X\to W$是等距的，又$\hat{z}_m\in W$，令$z_m = T^{-1}\hat{z}_m$，则序列(z_m)是X中的柯西序列。令$\hat{x} \in \hat{X}$是(z_m)所属于的等价类，则可证明$\hat{x}$是 $(\hat{x}_n)$ 的极限。据 (4) 有

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) \leqslant \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}) < \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}) \tag{5}$$

由于 $(z_m)\in \hat{x}$ （见前面所令）且$\hat{z}_n\in W$，故有 $(z_n, z_n, z_n, \cdots)\in \hat{z}_n$不等式（5）变成为

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} d(z_n, z_m)$$

只要n 足够大，上式右端就可小于任意给定的$\varepsilon> 0$。因此，$\hat{X}$中的任一柯西序列 $(\hat{x}_n)$都有极限 $\hat{x}\in \hat{X}$，从而说明$\hat{X}$是完备的。

(d) 在等距空间不加区分的前提下，证明$\hat{X}$的唯一性。若 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ 是另一个完备的度量空间且有稠密子空间$\tilde{W}$与X等距，则对任意$\tilde{x}$，$\tilde{y}\in \tilde{X}$有 $(\tilde{x}_n)$，$(\tilde{y}_n)$，它们是$\tilde{W}$中的序列且$\tilde{x}_n\to \tilde{x}$和$\tilde{y}_n\to \tilde{y}$因此有

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$$

这从不等式

$$|\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| \leqslant \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}_n) + \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{y}_n) \to 0$$

可以推出。（这个不等式和（3）类似）由于$\tilde{W}$是和$W\subset \hat{X}$等距的，且$\overline{\tilde{W}} = \tilde{X}$，故$\tilde{X}$和$\hat{X}$上的距离必定是相同的。因此$\tilde{X}$和$\hat{X}$是等距的。

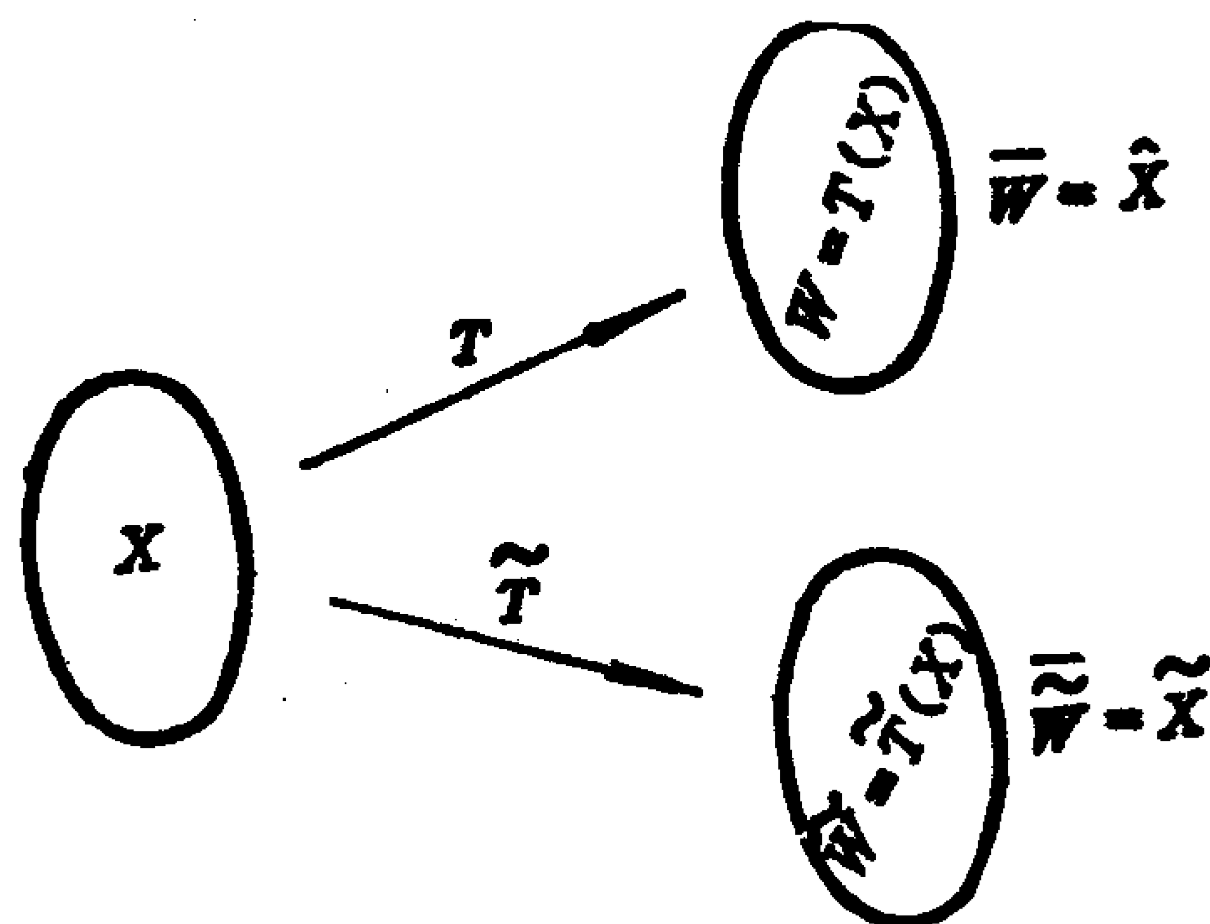


图11 定理1.6-2证明中的(d)的表示

在后面两章（特别是在2.3-2，3.1-5及3.2-3）中，我们将看到这个定理对个别的以及全部的不完

备空间，都有极为基本的应用。

习　题

1.证明：若Y是度量空间中有限多个点组成的子空间，则Y是完备的。

2.度量空间（X，d）的完备化是什么？这里的X是所有有理数集，$d(x,y)=|x-y|$。

3.离散度量空间X的完备化是什么？（见1.1-8）

4.若X_1和X_2是等距的，且X_1是完备的，证明X_2也是完备的。

5.（**同胚**）如果映射T：$X\to Y$是连续对射且其逆也是连续的，则称T是一个同胚。这时度量空间X和Y也叫做是同胚的。(a) 证明：若X和Y是等距的，则它们是同胚的。(b) 举例说明，一个完备的度量空间可以与一个不完备的度量空间同胚。

6.证明$C[0,1]$和$C[a,b]$是等距的。

7.若（X，d）是完备的，令$\tilde{d}=d/(1+d)$，证明（X，$\tilde{d}$）是完备的。

8.证明：在习题7中，（X，$\tilde{d}$）的完备性蕴含着（X，d）的完备性。

9.若（X，d）中的（x_n）和（x_n'）满足

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_n')=0$$

且$x_n\to l$，证明（x_n'）收敛，且以l为极限。

10.若（X，d）中的（x_n）和（x_n'）都收敛，且有相同的极限l，证明一定有

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_n')=0$$

11.证明：$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_n')$在$X$的元素的所有柯西序列的集合上，定义了一个等价关系。

12.若（x_n）是（X，d）中的一个柯西序列，而X中的序列（x_n'）满足$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_n')=0$，证明（$x_n'$）也是$X$中的柯西序列。

13.（**伪度量**）所谓集合X上的一个有限伪度量，是指满足§1.1中的（$M1$），（$M3$），（$M4$）和

（$M2^*$）　　　　$d(x,x)=0$

的函数d：$X\times X\to \mathbf{R}$。试问，度量与伪度量之间的差别是什么？证明$d(x,y)=|\xi_1-\eta_1|$在所有实数序偶的集合上定义了一个伪度量，其中$x=(\xi_1,\xi_2)$，$y=(\eta_1,\eta_2)$。（顺便指出，有些作者用半度量来代替伪度量。）

14.若X是（i）$[a,b]$上的所有实值连续函数的集合，（ii）$[a,b]$上的所有实值黎曼可积函数的集合，问

$$d(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt$$

在X上定义了度量，还是伪度量。

15.若（X，d）是一个伪度量空间，我们把

$$B(x_0;r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<r\}\qquad (r>0)$$

叫做X中的一个以x_0为中心，r为半径的开球。（注意，这和1.3-1类似）试问：习题13中的半径为1的开球是什么？

第二章 赋范空间，巴拿赫空间

当我们取矢量空间作基集，并用范数在其上定义度量时，便得到最重要和特别有用的度量空间。这种空间叫做赋范空间。若赋范空间是完备的度量空间，则又叫做巴拿赫空间。赋范空间的理论，特别是巴拿赫空间的理论，以及定义在这些空间上的线性算子的理论，是泛函分析中研究的最为完善的理论。本章就是专门研究这些理论的基本思想。

本章内容概要

赋范空间（参见2.2-1）是一个在其上用范数定义了度量的矢量空间（参见2.1-1）。而范数推广了平面中或三维空间中向量的长度。巴拿赫空间（见2.2-1）是一个完备的赋范空间。任何一个赋范空间都可完备化而成为一个巴拿赫空间（见2.3-2）。在赋范空间中，我们还能够定义和使用无穷级数（见§2.3）。

从赋范空间X到赋范空间Y的映射叫做算子。从X到标量域**R**或**C**的映射叫做泛函。其中特别重要的是所谓有界线性算子（见2.7-1）和有界线性泛函（见2.8-2），这是因为它们是连续的，并且便于采用矢量空间的结构。事实上，定理2.7-9表明：线性算子当且仅当为有界时，才是连续的。这是一个基本结果。矢量空间在这里之所以重要，主要是因为只有在它们上面才能定义线性算子和线性泛函。

一个根本的事实是，从给定的赋范空间X到给定的赋范空间Y的所有有界线性算子的集合，可以被造成为一个赋范空间（见2.10-1），并用$B(X, Y)$来表记它。类似地，X上的所有有界线性泛函的集合也能作成一赋范空间，叫做X的对偶空间，记为X'（见2.10-3）。

在分析当中，无穷维赋范空间比有限维空间更重要。后者要简单些（见§2.4，2.5），且其上的线性算子可用矩阵表示（见§2.9）。

记法说明

我们用X，Y表示空间，用大写字母（最好是T）表示算子，用Tx表示x在T之下的象（不带括号），用小写字母（最好是f）表示泛函，而f在x的值用$f(x)$（带有括号）表示。这是广泛使用的记法。

§2.1 矢量空间

在数学的很多分支及其应用中，矢量空间都起着重要的作用。事实上，在各种实际的或理论的问题中，要研究的集合X，其元素可以是通常三维空间中的矢量，或者是数列和函数，并且这些元素能以天然的方式相加和与数相乘，运算结果仍是X的元素。这些具体的情况便促使我们提出如下所定义的矢量空间的概念。这个定义要涉及到一个一般的域**K**。但在泛

函分析中，K应是R或C。K的元素叫做标量，因此，在本书中它们将是实数或复数。

2.1-1定义（矢量空间） 所谓域K上的一个矢量空间（或线性空间）是指一个非空集合X，且其元素x，y，…（称为矢量）关于X和K定义了两种代数运算。这两种运算分别叫做矢量的加法和矢量与标量（即K中的元素）的乘法。

矢量的加法是，对于X中的每一对矢量（x，y），与其相联系的一个矢量$x+y$，叫做x与y之和。按这种方式它还具有下述性质①：矢量加法是可交换的和可结合的，即对所有矢量都有

$$x+y=y+x$$

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

此外，存在零矢量$0\in X$，并对每个矢量x，存在有$-x$，使得对一切矢量有

$$x+0=x$$

$$x+(-x)=0$$

矢量与标量的乘法是，对于每个矢量x和每个标量α，与其相联系的一个矢量αx（也写着$x\alpha$），叫做α与x之积。按这种方式对一切x，y和标量α，β，具有

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$$

$$1x=x$$

和分配律

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta y$$

从这个定义我们看到，矢量加法是从$X\times X$到X的一个映射，而矢量与标量的乘法是从K$\times X$到X的一个映射。

K叫做矢量空间X的标量域或系数域。并且在K=R（实数域）时，把X叫做实矢量空间，而在K=C（复数域②）时，把X叫做复矢量空间。

一般情况下，零矢量与标量零都使用一个记号0不致于引起混乱。若为更清楚起见，我们可用θ表示零矢量。

读者可以证明，对所有的矢量和标量，有

$$0x=\theta \tag{1a}$$

$$\alpha\theta=\theta \tag{1b}$$

和

$$(-1)x=-x \tag{2}$$

例 子

2.1-2 空间R^n 这个空间为曾在1.1-5中定义的欧几里德空间。它的基集是所有形如

① 熟悉群的概念的读者会注意到，我们可把矢量加法的性质总结为：X是一个阿贝尔加法群。

② 记住，R和C又分别叫做实直线和复平面（见1.1-2，1.1-5），但在这里不会引起混乱，故不需要再用别的字母。

$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$ 的 n 元实序组构成的集合。我们看到，它是按通常的方式定义了两种代数运算：

$$x+y=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots, \xi_n+\eta_n)$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots, \alpha\xi_n) \qquad (\alpha\in\mathbf{R})$$

它是一个实矢量空间。下面的例子与上面在本质上是类似的，因为其中每一种做法都和前面一样。

2.1-3 空间$\mathbf{C}^n$ 这个空间曾在1.1-5中定义，它是所有形如$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 的 n 元复序组构成的集合，代数运算的定义与上面一样，只是其中的$\alpha\in\mathbf{C}$，它是一个复矢量空间。

2.1-4 空间$C[a, b]$ 这个空间曾在1.1-7中定义。这个空间的每一个点都是$[a, b]$上的一个连续实值函数。所以这种函数的集合按通常的方式定义代数运算

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t)$$

$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t) \qquad (\alpha\in\mathbf{R})$$

后，便形成一个实矢量空间。事实上，当x，y是$[a, b]$上的连续实值函数且α是实数时，$x+y$与αx也是$[a, b]$上的连续实值函数。

另外一些重要的函数型的矢量空间是（a）曾在1.2-2中定义的矢量空间$B(A)$，（b）定义在$\mathbf{R}$上的所有可微函数构成的矢量空间，（c）定义在$[a, b]$上且按照某种意义是可积的所有实值函数所构成的矢量空间。

2.1-5 空间l^2 这个空间曾在1.2-3中引入。象通常对序列的研究一样，定义代数运算

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots)+(\eta_1, \eta_2, \cdots)=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots)$$

$$\alpha(\xi_1, \xi_2, \cdots)=(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots)$$

后，它便是一个矢量空间。事实上，由于$x=(\xi_i)\in l^2$，$y=(\eta_i)\in l^2$，只要用§1.2中的闵可夫斯基不等式（12）便可推出$x+y\in l^2$。同样可证$\alpha x\in l^2$。

其它的序列型的矢量空间有在1.1-6中定义的l^∞和1.2-3中的l^p，其中$1\leqslant p<+\infty$，以及1.2-1中的s。

矢量空间X的**子空间**是指满足下述条件的一个非空子集Y：对所有的y_1，$y_2\in Y$及所有的标量α，β，都有$\alpha y_1+\beta y_2\in Y$。因此$Y$本身也是一个矢量空间，且其上的两种代数运算是从$X$诱导出来的。

X的一个特殊子空间是非真子空间$Y=X$，$X(\neq\{0\})$的其余子空间都叫做真子空间。

矢量空间X的另一个特殊的子空间是$Y=\{0\}$。

矢量空间X的一组矢量x_1，x_2，$\cdots x_m$的**线性组合**是指如下形式的表示

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_mx_m$$

其中系数α_1，α_2，$\cdots$，α_m是任意的标量。

对于任一非空子集$M\subset X$，M中的矢量的所有线性组合构成的集合，叫做M的**张成**（*span*），记作

$$spanM$$

显然，$spanM$是X的一个子空间Y，我们又说Y是由M**张成**或**生成的**。

现在我们引进两个重要的相互关联的概念，它们在后面要反复地用到。

2.1-6 定义（线性无关，线性相关） 在矢量空间X中给定一组矢量$M=\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$（$r\geqslant 1$），是线性无关还是线性相关由方程

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_r x_r=0 \tag{3}$$

来确定的，其中α_1，α_2，…，α_r是标量。显然，方程(3)在$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$是成立的。若（3）仅仅对$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$成立，则便说$M$是线性无关的。反之，若$M$不是线性无关，即对不全为零的一组标量$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_r$（3）也成立，即称$M$是线性相关的。

对X的任一子集M来说，如果M的每一个非空有限子集都是线性无关的，则称M是线性无关的。反之，若M不是线性无关的，便称为是线性相关的。

这个术语的产生是由下述事实引起的，若$M=\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$是线性相关的，则$M$至少有一个矢量能写成其余矢量的线性组合。例如，若（3）成立且$\alpha_r\neq 0$，则M是性线相关的，并且可以从（3）关于x_r解出

$$x_r=\beta_1 x_1+\cdots+\beta_{r-1}x_{r-1}, \qquad \beta_j=-\alpha_j/\alpha_r$$

我们可以用线性相关和线性无关的概念来定义矢量空间的维数。

2.1-7 定义（有限维和无穷维的矢量空间） 对矢量空间X来说，如果存在一个正整数n，使得X包含n个线性无关的矢量，而且X中任意$n+1$个或多于$n+1$个的矢量都是线性相关的，则称X是有限维的，n就叫做X的维数，记作$n=\dim X$。由定义知$X=\{0\}$是有限维的，且$\dim X=0$。若X不是有限维的，便叫做无穷维的。

在分析中，无穷维的矢量空间比有限维空间更有意义。例如$C[a, b]$和l^2都是无穷维的，而$\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$都是n维的。

若$\dim X=n$，则X的任意n个线性无关的矢量都叫做X的一个**基**。若$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是$X$的一个**基**，则每一个$x\in X$作为$e_1$，$e_2$，…，$e_n$的线性组合，其表达式是唯一的，即

$$x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n$$

是唯一的。

例如，$\mathbf{R}^n$的一个基是

$$\begin{aligned} e_1&=(1, 0, 0, \cdots, 0)\\ e_2&=(0, 1, 0, \cdots, 0)\\ &\vdots\\ e_n&=(0, 0, 0, \cdots, 1)\end{aligned}$$

有时又把这组矢量叫做$\mathbf{R}^n$的标准基。

更一般地说，任一矢量空间X，不必是有限维的。若B是X的个一线性无关子集且$\operatorname{span}B=X$，则称B是X的一个**基**〔或**哈梅尔**(**Hamer**)**基**〕。因此，若B是X的一个基，则每一个非零的$x\in X$作为B中（有限多个！）元素以非零标量作为组合系数的线性组合，有唯一的表达式。

每一个矢量空间$X\neq\{0\}$都有一个基。

在有限维的情况下，这个结论是显然的。对任意无穷维的矢量空间，存在性的证明将要用到佐恩（*Zorn*）引理。这个引理涉及到另外一些概念，而要阐明这些概念需花费时间。由于目前我们有更重要的事情要做，所以不打算在这上面耽搁，而把存在性的证明放在§4.1中。在那里出于另外的目的，必须引进佐恩引理。

还要指出，对于给定的矢量空间X（有限维或无穷维），它的所有基都有相同的基数（这个证明要求有一点较为高深的的集合论的工具，可参阅*M·M·Day*(1973)，*P*.3.)。这个基数又叫做X的**维数**。注意，这一结果包含并推广了定义2.1-7。

后面我们将需要下述简单定理：

2.1-8 定理（子空间的维数） 设X是一个n维矢量空间，则X的任一真子空间Y的维数都小于n。

证明：若$n=0$，则$X=\{0\}$，所以它没有真子空间。若$\dim Y=0$。则$X\neq Y$且$Y=\{0\}$，这就意味着$\dim X\geqslant 1$，显然$\dim Y<\dim X=n$。若是$\dim Y=n$，则Y有一基包含n个矢量，而由于$\dim X=n$，故这个基也是X的一个基，故$X=Y$。这就证明了Y中的任一线性无关组所含元素的个数必少于n，从而$\dim Y<n$。

习　题

1. 证明：所有实数的集合，按通常的加法和乘法，构成一个一维的实矢量空间。而所有复数的集合构成一个一维的复矢量空间。

2. 证明式（1）和（2）。

3. 描述出在$\mathbf{R}^3$中由$M=\{(1,1,1,),(0,0,2)\}$张成的子空间。

4. 判定下述$\mathbf{R}^3$的子集中的哪些构成$\mathbf{R}^3$中的子空间（这里$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$）。

(*a*) 所有具有$\xi_1=\xi_2$且$\xi_3=0$的x；

(*b*) 所有具有$\xi_1=\xi_2+1$的x；

(*c*) 所有具有正的ξ_1，ξ_2，ξ_3的x；

(*d*) 所有具有$\xi_1-\xi_2+\xi_3=K=const$的$x$，

5. 证明：$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，其中$x_j=t^j$是空间$C[a,b]$中的线性无关组。

6. 证明：在n维矢量空间X中，任一x作为给定基矢量e_1，e_2，…，e_n的线性组合，其表达式是唯一的。

7. 令$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是复矢量空间X的一个基。把X看作为实矢量空间，求它的一个基。并问对应于这两种情况，它们的维数各是多少？

8. 若M是复矢量空间X中的一个线性相关集。当把X看作为实矢量空间时，M还是线性相关吗？

9. 在给定的区间$[a,b]\subset\mathbf{R}$上，考虑所有次数不超过（给定的）n的实系数多项式及

多项式$x=0$（在通常的讨论中，对它没有规定次数）的集合X。证明：按照通常的多项式的加法和多项式与实数的乘法，它是一个$n+1$维的实矢量空间。求X的一个基。证明：若系数取复数，可以类似的方式得到一个复矢量空间$\tilde{X}$。问X是$\tilde{X}$的一个子空间吗？

10. 若Y和Z是矢量空间X的子空间。证明：$Y\cap Z$是X的子空间，而$Y\cup Z$则不一定是，给出一个例子。

11. 若$M\neq\phi$是矢量空间X的任一子集，证明$span M$是X的一个子空间。

12. 证明：所有二阶实方阵的集合构成一个矢量空间X。问X的零矢量为何；确定$\dim X$，求出X的一个基。给出X的子空间的例子。X中的所有对称阵构成一个子空间吗？奇异矩阵的集合呢？

13.（**积**）证明：同一个域上的两个矢量空间X_1和X_2的笛卡尔积$X=X_1\times X_2$，按下述方式定义代数运算：

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$$

$$\alpha(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2)$$

则它成为一个矢量空间。

14.（**商空间，余维**）令Y是矢量空间X的一个子空间。元素$x\in X$关于Y的陪集，记为$x+Y$，定义为（见图12）：

$$x+Y=\{v\mid v=x+y,\ y\in Y\}$$

证明：不同的陪集形成X的一个划分。证明：在定义代数运算（见图13，14）

$$(w+Y)+(x+Y)=(w+x)+Y$$

$$\alpha(x+Y)=\alpha x+Y$$

之下，这些陪集成为一个矢量空间的元素。这个空间叫做X由Y作成（或Modulo$Y$）的商空间（有时也叫因子空间），记作X/Y。其维数叫做Y的余维，并记作$\operatorname{codim}Y$，也就是

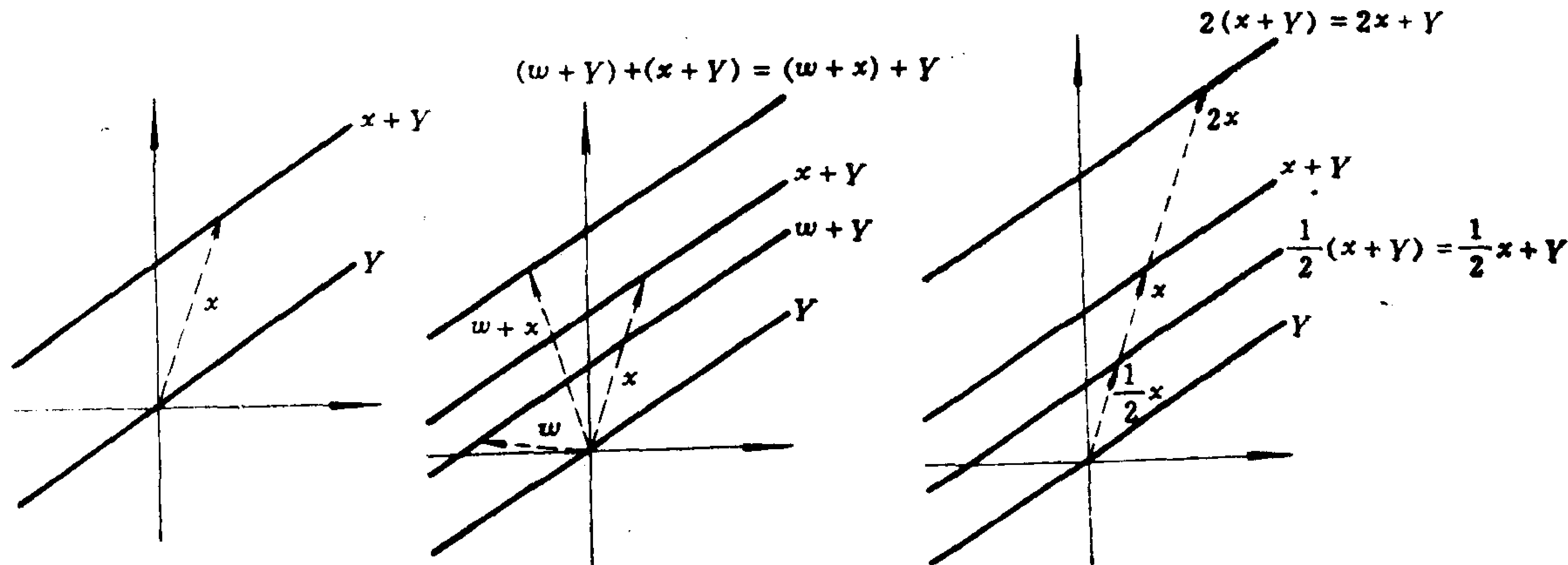


图12　习题14中记号x+y的说明　　图13　习题14中商空间的矢量加法说明　　图14　商空间中矢量与标量乘法的说明（见习题14）

$$\mathrm{codim}Y = \dim(X/Y)$$

15. 令$X=\mathbf{R}^3$，$Y=\{(\xi_1,\ 0,\ 0)\mid \xi_1\in\mathbf{R}\}$。求$X/Y$，$X/X$，$X/\{0\}$。

§2.2 赋范空间，巴拿赫空间

上节的例子说明，在很多情况之下因为矢量空间X上定义了度量d，所以X也同时是一个度量空间。然而，如果X的代数结构与度量没有什么关系的话，则我们就不能指望把代数的概念和度量的概念结合在一起，而得到有用的适当理论。为了保证X的代数性质与几何性质能有如此的关系，我们必须按如下的一种特殊方式，在X上定义度量d。首先引入一个辅助的所谓"范数"（定义在后面）概念，这就要用到矢量空间的代数运算。然后再用范数来定义我们所希望的度量d。这一想法就导出了赋范空间的概念。此后再转入对一些特殊的赋范空间的研究。这类空间为建立丰富而有意义的理论提供了基础。但这类空间虽说特殊，却也足够一般化的，因为它包括了很多在实用上很重要的具体模型。事实上，分析中所遇到的大量的度量空间，都能看作为赋范空间。所以，赋范空间大概是泛函分析中最重要的一类空间了，至少从目前应用的观点看是这样的。这里给出其定义如下：

2.2-1 定义（赋范空间，巴拿赫空间） 所谓赋范空间①X，就是指在其上定义了范数的矢量空间X。而巴拿赫空间就是完备的赋范空间（这里的完备性是按范数定义的度量来衡量的，见下面的(1)）。而所谓（实或复）矢量空间X上的**范数**，就是指定义在X上的一个实值函数，它在$x\in X$的值记为

$$\|x\| \qquad \text{（读为}x\text{的范数）}$$

并且具有如下性质

(N1) $\|x\|\geqslant 0$

(N2) $\|x\|=0 \iff x=0$

(N3) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

(N4) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ （三角不等式）

其中x，y是X中的任意矢量，α为任意标量。

X上的范数在X上定义的度量为

$$d(x,\ y)=\|x-y\| \qquad (x,\ y\in X) \tag{1}$$

并把它叫做由范数所诱导出的度量。所定义的赋范空间记为$(X,\ \|\cdot\|)$或简记为X。

对范数所规定的性质（$N1$）至（$N4$），是受初等矢量代数中矢量长度$|x|$的启发而提出的。所以在矢量代数中，也可记$\|x\|=|x|$。事实上，（$N1$）和（$N2$）是说，所有非零矢量都有正的长度，而只有零矢量长度为零。（$N3$）是说，当矢量乘上一个标量后，其长度便乘上标量的绝对值。（$N4$）在图15中给出了说明，即三角形的一边的长度不能超过其余两边的长度之和。

① 也叫做赋范矢量空间或赋范线性空间。它是由S.巴拿赫(1922)，H.汉恩(1922)和N.维纳(1922)分别独立给出的。从S.巴拿赫(1932)的论文可看出，这方面的理论自提出后的10年得到迅速的发展。

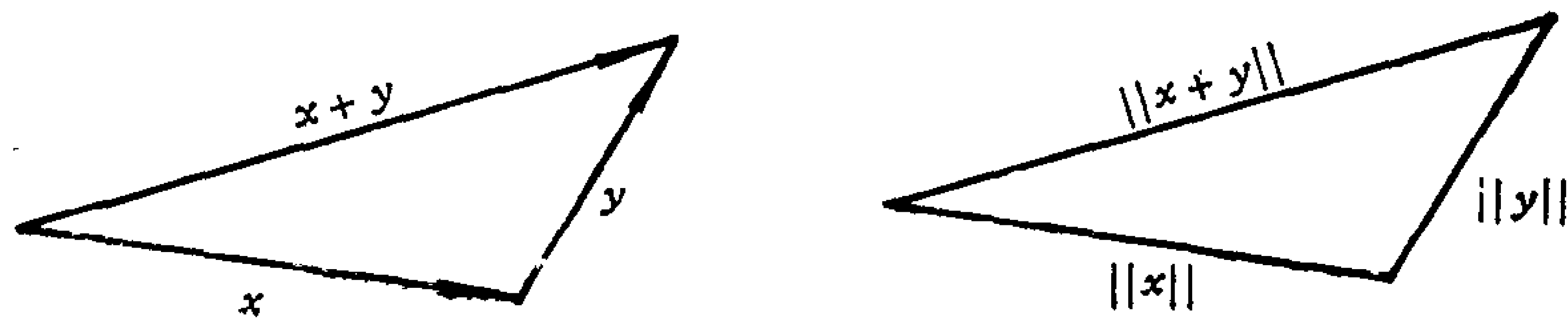


图15 三角不等式(N4)的说明

不难从（$N1$）－（$N4$）推证出式（1）定义了一个度量。因此，赋范空间和巴拿赫空间都是度量空间。

由于巴拿赫空间具有非完备的赋范空间所没有的一些性质（第四章中讨论），所以它格外的重要。

为后面的需要，注意可从（$N4$）推出

$$|\|y\| - \|x\|| \leqslant \|y-x\| \tag{2}$$

这一点读者很容易证明（见习3题）。公式（2）意味着范数有如下重要性质：

范数是连续的，即$x \mapsto \|x\|$是一个从$(X, \|\cdot\|)$到**R**的连续映射（见1.3-3）。

赋范空间的典型例子是大家熟悉的二维欧几里德平面和三维欧几里德空间。进一步的例子可从§1.1和§1.2导出，由于这两节中的一些度量空间能以自然的方式造成为赋范空间。然而，在本节的后面将会看到，并不是矢量空间上的每一个度量都能从范数诱导出来。

例　子

2.2-2　欧氏空间$\mathbf{R}^n$和酉空间$\mathbf{C}^n$　这些空间曾在1.1-5中定义。在范数取为

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2} \tag{3}$$

时，它们都是巴拿赫空间。事实上，$\mathbf{R}^n$和$\mathbf{C}^n$是完备的（见1.5-1），并且（3）给出了§1.1中的度量式（7）：

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{|\xi_1-\eta_1|^2 + |\xi_2-\eta_2|^2 + \cdots + |\xi_n-\eta_n|^2}$$

我们应特别指出的是，在三维欧氏空间$\mathbf{R}^3$中，有

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

这就使我们确信范数是初等的矢量长度$|x|$概念的推广。

2.2-3　空间l^p　这个空间曾在1.2-3中定义。取范数为

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} \tag{4}$$

时，它是一个巴拿赫空间。事实上，这个范数导出了1.2-3中的度量：

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{1/p}$$

其完备性已在1.5-4中证明。

2.2-4 空间l^∞ 这个空间在1.1-6中定义过。它的度量可从范数

$$\|x\| = \sup_j |\xi_j|$$

导出，其完备性在1.5-2中证明。所以它是一个巴拿赫空间。

2.2-5 空间C〔a，b〕 这个空间在1.1-7中定义。其范数取为

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \qquad (5)$$

其中 $J=$〔a，b〕。它的完备性已在1.5-5中证明，故C〔a，b〕是一个巴拿赫空间。

2.2-6不完备的赋范空间 从1.5-7，1.5-8，1.5-9中的不完备的度量空间，我们可以很容易得到相应的不完备的赋范空间。例如，在1.5-9中的度量，可用范数

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\, dt \qquad (6)$$

诱导出来。

如果要问：每个不完备的赋范空间，也都能象在 1.6-2 中对度量空间所做的那样被完备化吗？而矢量空间中的运算和范数经完备化又被扩展成什么？在下一节将会看到，这样做确实是可以的。

2.2-7一个不完备的赋范空间及其完备化L^2〔a,b〕 定义在〔a，b〕上的所有实值连续函数构成的实矢量空间X，如果取范数为

$$\|x\| = \left(\int_a^b x^2(t)\,dt\right)^{1/2} \qquad (7)$$

则$(X, \|\cdot\|)$是不完备的。例如，在〔a，b〕=〔0，1〕时，1.5-9 中的函数列在$(X, \|\cdot\|)$中也是一个柯西序列，从§1.5 中的图 10 几乎可以看出。事实上，当 $n>m$ 时，通过积分便得到

$$\|x_n - x_m\|^2 = \int_0^1 \left[x_n(t) - x_m(t)\right]^2 dt = \frac{(n-m)^2}{3mn^2} < \frac{1}{3m} - \frac{1}{3n}$$

但这个柯西序列是不收敛的，其证明过程和1.5-9一样，只要用上面的度量来代替1.5-9中的度量就行了。对于一般的区间〔a，b〕，我们同样可以构造一个在X中不收敛的柯西序列。

据定理1.6-2，空间X可被完备化。把它记为L^2〔a，b〕。这是一个拿巴赫空间。事实上，X上的范数和矢量空间的运算都被扩展到L^2〔a,b〕上去了。这从下节定理 2.3-2 可以看出。

更为一般地说，对任一固定的实数$p \geqslant 1$，，巴拿赫空间

L^p〔a，b〕

都是赋范空间$(X, \|\cdot\|)$的完备化，其中X象前面那样，由定义在〔a，b〕上的一切实值连续函数构成的矢量空间，并取范数为

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \qquad (8)$$

脚注 p是要我们记住，这个范数与所选定的 p有关。注意，取$p=2$，（8）便成为（7）。

对于熟悉勒贝格（*Lebesgue*）积分的读者，我们顺便指出，空间L^p〔a，b〕也能直接用勒贝格积分和定义在〔a，b〕上的勒贝格可测函数 x得到。所谓〔a，b〕上的勒贝格可测函数$x(t)$，是使$|x(t)|^p$在〔a，b〕上的勒贝格积分存在且有限的函数。而空间L^p〔a，b〕中的元素

是这种函数的等价类。所谓x与y等价，是指$|x-y|^p$在$[a, b]$上的勒贝格积分等于零（要注意，这一定义保证了公理（$N2$）的有效性）。

没有勒贝格积分和勒贝格测度方面知识的读者，也不必为此烦恼。实际上，这个例子在以后的讨论中不是很重要的。总而言之，用这个例子说明：完备化的过程可能导出一类新的元素。不过我们还须找出这类新元素有什么特征。

2.2-8空间s 矢量空间上的每一个度量都能从范数导出吗？回答是否定的。作为一个反例是1.2-1中的空间s。事实上，s是一个矢量空间，其上的度量为

$$d(x, y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}$$

它是不能从某一范数得到的。这个结果从下面引理立即可以得到。这个引理是说，由范数导出的度量d具备两个基本的性质，其一是（9a）所表示的，叫做d的平移不变性。

2.2-9引理（平移不变性） 在赋范空间X上，由范数诱导的度量d，对所有的x，y，$a\in X$及每一个标量α，都满足

$$d(x+a, y+a)=d(x, y) \tag{9a}$$

$$d(\alpha x, \alpha y)=|\alpha|\,d(x, y) \tag{9b}$$

证明：显然有

$$d(x+a, y+a)=\|x+a-(y+a)\|=\|x-y\|=d(x, y)$$

$$d(\alpha x, \alpha y)=\|\alpha x-\alpha y\|=|\alpha|\,\|x-y\|=|\alpha|\,d(x, y)$$

习　题

1. 证明x的范数$\|x\|$是从x到零的距离。
2. 验证：平面或三维空间中通常的矢量长度具有范数的性质（$N1$）至（$N4$）。
3. 证明式（2）。
4. 证明：可以用

$$\|x\|=0 \Rightarrow x=0$$

来代替（$N2$）并没有改变范数的概念。证明范数的非负性也可从（$N3$）和（$N4$）推出。

5. 证明式（3）定义了一个范数。
6. 令X是所有形如$x=(\xi_1, \xi_2)$，$y=(\eta_1, \eta_2)$，…的实数序偶构成的矢量空间。证明

$$\|x\|_1=|\xi_1|+|\xi_2|$$

$$\|x\|_2=(\xi_1^2+\xi_2^2)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty=\max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$$

都是X上的范数。

7. 验证式（4）满足（$N1$）至（$N4$）
8. 在由数的n元序组所构成的矢量空间上（见2.2-3），有一些在实用上很重要的范数，

特别是如下定义的

$$\| x \|_1 = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|$$

$$\| x \|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p \right)^{1/p} \qquad (1 < p < +\infty)$$

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{ |\xi_j| \}$$

验证上面所定义的范数都满足（$N1$）至（$N4$）。

9. 验证式（5）定义了一个范数。

10.（单位球面） 球面

$$S(0; 1) = \{x \in X \mid \| x \| = 1\}$$

在赋范空间X中叫做单位球面。证明：对于习题 6 中定义的范数及

$$\| x \|_4 = (\xi_1^4 + \xi_2^4)^{1/4}$$

来说，单位球面如图16所示。

11.（凸集，线段）对于矢量空间 X 的子集A，若x，$y \in A$蕴含着

$$M = \{z \in X \mid z = \alpha x + (1 - \alpha) y, \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\} \subset A$$

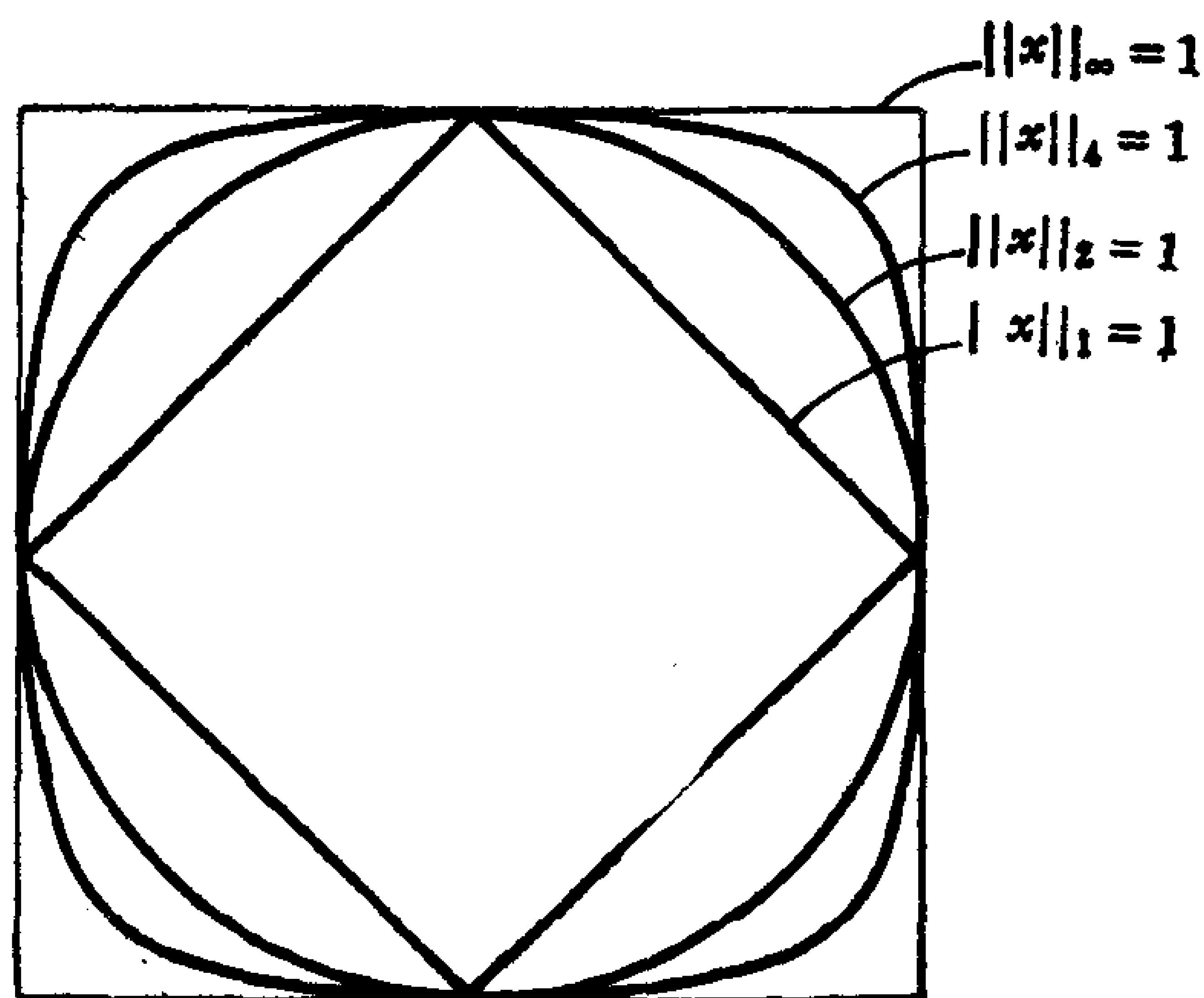


图16 习题10中的单位球面

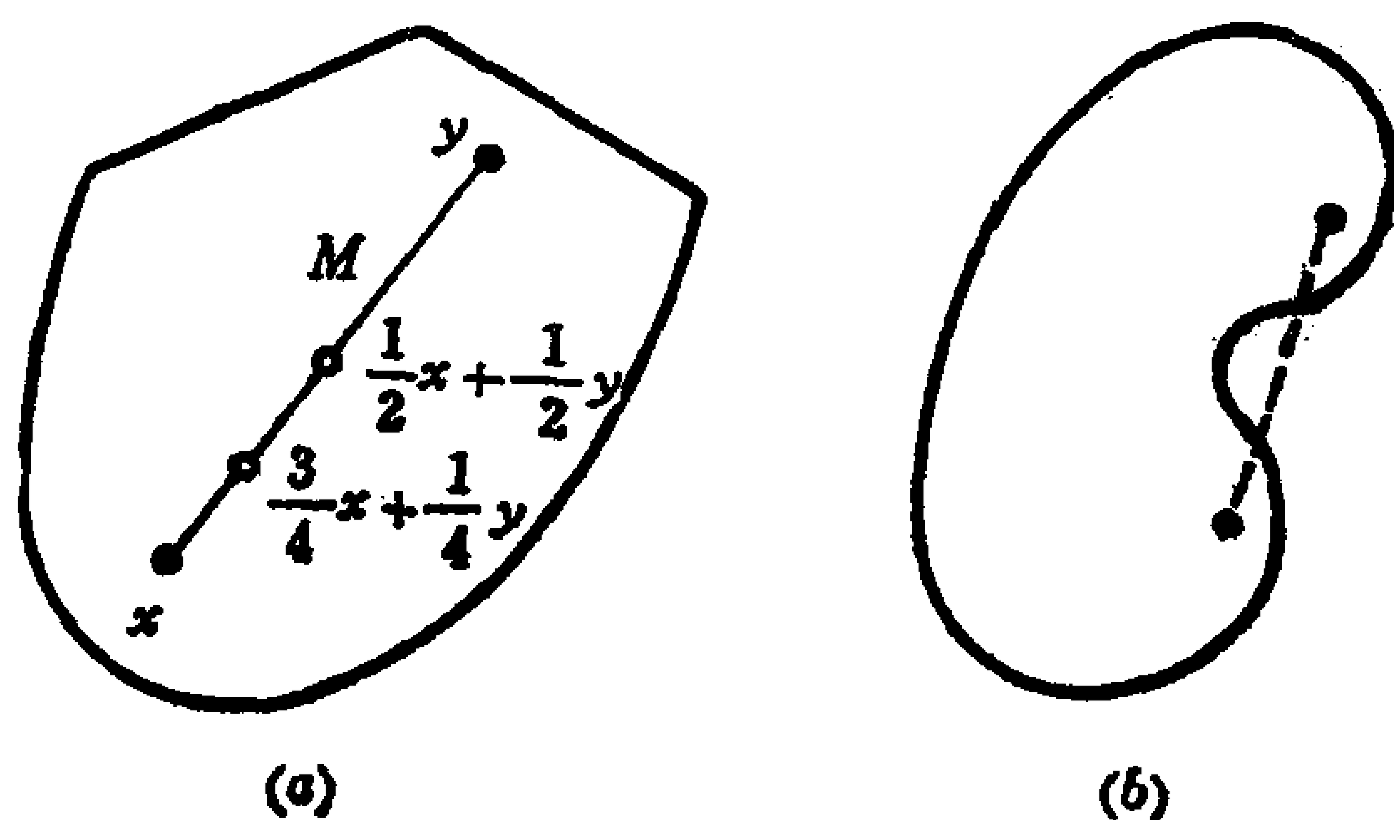


图17 凸集和非凸集的例子（习题11）

则称A为凸的，而M叫做以x，y为端点的闭线段，任一另外的$z \in M$，都叫做M的内点。证明：闭单位球

$$\tilde{B}(0; 1) = \{x \in X \mid \| x \| \leqslant 1\}$$

在赋范空间X中是凸的。

12. 利用习题11，证明

$$\varphi(x) = (\sqrt{|\xi_1|} + \sqrt{|\xi_2|})^2$$

在所有形如 $x = (\xi_1, \xi_2)$，…的实数序偶构成的矢量空间上不能定义一个范数。粗略地

画出曲线$\varphi(x)=1$，并把它和图18加以比较。

13. 证明：矢量空间$X\neq\{0\}$上的离散度量不能从范数中得到（见1.1-8）。

14. 设d是矢量空间$X\neq\{0\}$上由范数导出的度量，并定义

$$\tilde{d}(x,\ x)=0,$$

$$\tilde{d}(x,\ y)=d(x,\ y)+1,\quad (x\neq y)$$

证明$\tilde{d}$不能从范数导出。

15.（有界集） 证明：赋范空间X中的子集M是有界的，当且仅当有正数c存在，使得对每个$x\in M$，都有$\|x\|\leqslant c$（关于定义，见§1.2中的习题6）。

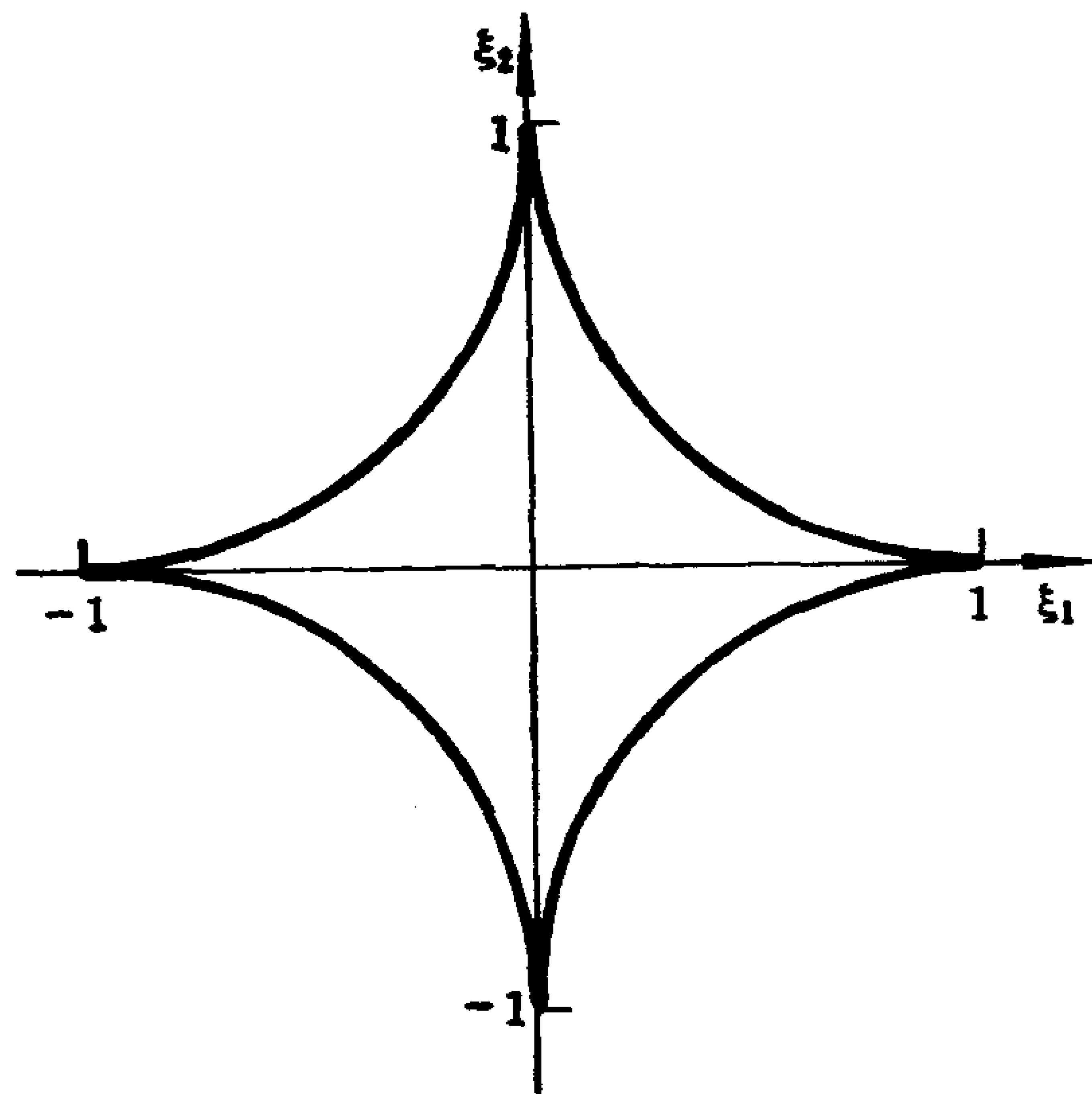


图18　习题12中的曲线$\varphi(x)=1$

§2.3　赋范空间的其他性质

赋范空间X的**子集**Y，如果是X的线性子空间，取X上的范数限制在Y上（叫做由X的范数在Y上诱导的范数），则Y也是一个赋范空间，称之为X的赋范子空间。如果Y在X中是闭的，又称为X的**闭子空间**。

巴拿赫空间X中的**赋范子空间**Y，仅要求它是一个赋范子空间，不要求它一定是完备的（注意有的作者不是这样定义的，所以当心所推出的结果）。

在研究这些概念之间的联系时，定理1.4-7是极为有用的，由它立即可推出：

2.3-1定理（巴拿赫空间的子空间）　巴拿赫空间X的赋范子空间Y是完备的，当且仅当Y在X中是闭的。

关于赋范空间中序列的**收敛性**及有关概念，只要在1.4-1，1.4-3相应的定义中，把度量换成$d(x,\ y)=\|x-y\|$，便可得到：

（i）赋范空间X中的序列(x_n)是收敛的，是指存在一个$x\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$$

则写为$x_n\to x$，把x叫做（x_n）的极限。

（ii）赋范空间X中的序列（x_n）是一个柯西序列，是指对每个$\varepsilon>0$，都存在N，使得对所有的m，$n>N$都有

$$\|x_m-x_n\|<\varepsilon \tag{1}$$

甚至在一般的度量空间，也可以用序列来研究问题。而在赋范空间中，还可跨出更重要的一步，利用级数作为研究工具。

无穷级数能够用类似于微积分中的方式来定义。事实上，若（x_k）是赋范空间X中的一个序列，我们针对它能够作一个部分和序列（s_n）

$$s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

其中$n=1, 2, \cdots$。若(s_n)是收敛的，不妨设

$$s_n \to s \qquad \text{即} \ \|s_n - s\| \to 0$$

则无穷级数或简称级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots \tag{2}$$

是收敛的，s叫做这个级数的和，并记为

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots$$

若级数$\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$收敛，则称级数（2）**绝对收敛**。然而，要提醒读者注意，当且仅当X是完备的赋范空间时（见习题7至9），绝对收敛才蕴含着收敛。

级数收敛的概念可用来定义空间的基：若赋范空间X包含一个序列(e_n)，对每个$x \in X$都存在唯一的标量序列(α_n)，使得当$n \to \infty$时有

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \to 0 \tag{3}$$

则称(e_n)为X的一个邵德尔（*Schauder*）基（或基）。而和为x的级数$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$则叫做$x$关于基$(e_n)$的表达式（或展式），并记为

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

例如，在2.2-3中的l^p，它的一个邵德尔基为(e_n)，其中$e_n = (\delta_{nj})$，也就是序列e_n的第n项等于1，其余项为零。因而

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \cdots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \cdots) \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \cdots) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4}$$

若赋范空间X有一个邵德尔基，则X是可分的（见定义1.3-5）。证明是很简单的，留给读者去完成（习题10）。反过来，如果要问，每个可分的巴拿赫空间都有一个邵德尔基吗？这是巴拿赫本人在大约四十年前提出的一个有名的问题。几乎所有已知的巴拿赫空间，都证明了它有邵德尔基。然而，这个问题的回答却令人惊异，是否定的。这是最近才由恩弗罗（*P. Enflo*，1973）给出的，他构造了一个没有邵德尔基的可分的巴拿赫空间。

最后我们再回到赋范空间的完备化问题，曾在上节中简单的提到过这个问题。

2.3-2定理（完备化） 设$X = (X, \|\cdot\|)$是一个赋范空间。则存在一个巴拿赫空间$\hat{X}$和一个从X到$\hat{X}$的稠密子空间W上的等距映射。如果把所有等距的空间不加区分的话，则这个$\hat{X}$是唯一的。

证明：从定理1.6-2可推出有完备度量空间$\hat{X} = (\hat{X}, \hat{d})$及等距映射$A: X \to W = A(X)$存在，其中$W$是在$\hat{X}$中稠密的。且在等距空间不加区分的意义下，$\hat{X}$是唯一的。（在这里用

A，而不象1.6-2中用T，为的是留着T给§8.2中的定理用）。因此，要证明目前的定理，必须把$\hat{X}$作成一个矢量空间，然后再在$\hat{X}$上引进适当的范数。

为了在$\hat{X}$上定义矢量空间的两个代数运算，我们来考虑任意的$\hat{x}$，$\hat{y}\in\hat{X}$及它们的代表：$(x_n)\in\hat{x}$，$(y_n)\in\hat{y}$。要记住$\hat{x}$，$\hat{y}$是X中的柯西序列的等价类。令$z_n=x_n+y_n$，则由于

$$\|z_n-z_m\|=\|x_n+y_n-x_m-y_m\|\leqslant\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|$$

所以(z_n)也是X中的一个柯西序列。我们定义(z_n)所属的等价类为$\hat{x}$与$\hat{y}$之和$\hat{z}=\hat{x}+\hat{y}$。$\hat{z}$的定义与在$\hat{x}$，$\hat{y}$中所具体选取的代表(x_n)，(y_n)是无关的。事实上，§1.6中的式(1)表明，若$(x_n)\sim(x'_n)$，$(y_n)\sim(y'_n)$，则$(x_n+y_n)\sim(x'_n+y'_n)$，这是因为

$$\|x_n+y_n-x_n'-y_n'\|\leqslant\|x_n-x_n'\|+\|y_n-y_n'\|$$

以类似的方式定义(αx_n)所属的等价类$\alpha\hat{x}\in\hat{X}$为$\hat{x}$与α的乘积，同样可证明$\alpha\hat{x}$不依赖于$\hat{x}$中的代表(x_n)的选取。$\hat{X}$中的零元是以零为极限的所有柯西序列组成的等价类。要证明$\hat{X}$中的这两个代数运算具有定义中所要求的性质是很容易的。所以$\hat{X}$是一个矢量空间。从定义可以推出，由$\hat{X}$在W上诱导的矢量空间的运算，以及用A从X诱导的运算是相同的。

此外，A在W上诱导的范数$\|\cdot\|_1$，它在每一点$\hat{y}=Ax\in W$的值就是$\|\hat{y}\|_1=\|x\|$。在W上相应的度量为$\hat{d}$限制在W上，因为A是等距映射。如果对每个$\hat{x}\in\hat{X}$，令$\|\hat{x}\|_2=\hat{d}(\hat{0},\hat{x})$，则可将范数$\|\cdot\|_1$扩展到$\hat{X}$。事实上，$\|\cdot\|_2$满足§2.2中的$(N1)$ $(N2)$，而通过对$\|\cdot\|_1$求极限可证明满足另外两条公理$(N3)$和$(N4)$。

习　题

1. 证明：$c\subset l^\infty$是l^∞的线性子空间（见1.5-3））并且c_0也是l^∞的线性子空间。其中c_0是所有收敛到零的标量序列构成的空间。

2. 证明：习题1中的c_0是l^∞的一个闭子空间，所以据1.5-2和1.4-7知它是完备的。

3. 在l^∞中令Y是一切有限非零序列构成的子集，证明Y是l^∞的一个子空间，但不是闭子空间。

4.（矢量空间的运算的连续性）。在赋范空间X中的矢量加法和矢量与标量的乘法，相对于范数是连续的运算。也就是说，由$(x,y)\mapsto x+y$和$(\alpha,x)\mapsto\alpha x$所定义的映射是连续的。

5. 证明：$x_n\to x$和$y_n\to y$蕴含着$x_n+y_n\to x+y$。证明$\alpha_n\to\alpha$和$x_n\to x$蕴含着$\alpha_n x_n\to\alpha x$。

6. 证明：赋范空间X的子空间Y的闭包$\bar{Y}$也是一个线性子空间。

7.（绝对收敛性）。证明$\|y_1\|+\|y_2\|+\cdots$的收敛并不意味着$y_1+y_2+\cdots$也收敛。提示：考虑习题3中的Y和(y_n)，其中$y_n=(\eta_j^{(n)})$，并且

$$\eta_j^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2} & j=n\\ 0 & j\neq n\end{cases}$$

8. 在赋范空间X中，若任意级数的绝对收敛总能推出该级数收敛，证明X是完备的。

9. 证明：在巴拿赫空间中，绝对收敛的级数也是收敛的。

10. 邵德尔基。证明：若赋范空间有邵德尔基，则它是可分空间。

11.证明：(e_n)，其中$e_n=(\delta_{nj})$，是l^p的一个邵德尔基，其中 $1\leqslant p<+\infty$。

12.（半范数 *Seminorm*）。矢量空间X上的一个半范数是满足§2.2中（$N1$）、（$N3$）、（$N4$）的一个映射p：$X\to\mathbf{R}$（有些作者又叫伪范数）。证明

$$p(0)=0$$

$$|p(y)-p(x)|\leqslant p(y-x)$$

（因此，若$p(x)=0$意味着$x=0$，则p便是一个范数。）

13.证明：在习题12中，使得$p(x)=0$的x能构成X的一个子空间N，并且X/N上的范数（见§2.1中习题14）可定义为

$$\|\hat{x}\|_0=p(x)$$

其中$x\in\hat{x}$，$\hat{x}\in X/N$。

14.（商空间）。令Y是赋范空间（X，$\|\cdot\|$）的闭子空间。证明X/Y上的范数$\|\cdot\|_0$（见§2.1中习题14）可定义为

$$\|\hat{x}\|_0=\inf_{x\in\hat{x}}\|x\|$$

其中$\hat{x}\in X/Y$，即$\hat{x}$是Y的任一陪集。

15.（赋范空间的积）。若（X_1，$\|\cdot\|_1$）和（X_2，$\|\cdot\|_2$）是两个赋范空间，证明积空间$X=X_1\times X_2$（见§2.1习题13））在定义了范数

$$\|x\|=\max(\|x_1\|_1,\ \|x_2\|_2)$$

之后，也成为一个赋范空间。其中$x=(x_1,\ x_2)$。

§2.4 有限维的赋范空间和子空间

有限维的赋范空间比无穷维的简单吗？在哪些方面？提出这样的问题是很自然的。由于有限维的空间和子空间在各种研究中（如在逼近论和谱论中）都起着作用，所以它们是很重要的。很多有意义的专题就是关于它们来研究的。不管就这部分内容本身，还是为以后的研究提供的工具，选择某些适当的内容加以讨论都是值得的。这就是安排本节和下一节内容的目的。

我们期望得到的结果在很大程度上都是基于下述引理。粗略地讲，这个引理是说，对于一组线性无关的矢量组，不能指望用绝对值较大的标量作线性组合，以得到范数很小的矢量。

2.4-1引理（线性组合） 设$\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$是赋范空间$X$（维数任意）中的一个线性无关组。则对选定的任意一组标量α_1，α_2，$\cdots\alpha_n$，必存在一个常数$c>0$，使得

$$\|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n\|\geqslant c(|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|),\quad c>0 \quad (1)$$

证明：记$s=|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|$。若$s=0$，显然，每个$\alpha_j=0$，所以式（1）对任意的$c>0$都成立。令$s>0$，用$s$除（1）式两端，并记$\beta_j=\alpha_j/s$，这时式（1）等价于

$$\|\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\cdots+\beta_n x_n\|\geqslant c \quad \left(\sum_{j=1}^{n}|\beta_j|=1\right) \tag{2}$$

因此，只要能证明，对于满足 $\sum_{j=1}^{n}|\beta_j|=1$ 的任意 n 个标量β_1，β_2，…，β_n，都存在$c>0$，使式（2）成立就够了。

采取反证。若命题不真，则存在着矢量序列

$$y_m=\beta_1{}^{(m)}x_1+\beta_2{}^{(m)}x_2+\cdots+\beta_n{}^{(m)}x_n \qquad \left(\sum_{j=1}^{n}|\beta_j{}^{(m)}|=1\right)$$

使得当$m\to\infty$时，有

$$\|y_m\|\to 0$$

而由于 $\sum_{j=1}^{n}|\beta_j{}^{(m)}|=1$，故有$|\beta_j{}^{(m)}|\leqslant 1$。因此，对固定的 j，序列

$$(\beta_j{}^{(m)})=(\beta_j{}^{(1)},\ \beta_j{}^{(2)},\ \cdots)$$

是一个有界标量序列。根据波尔察诺-维尔斯特拉斯（*Bolzano-Weierstrass*）定理，$(\beta_1{}^{(m)})$有收敛的子序列，令β_1是这个子序列的极限。让$(y_{1,m})$表示(y_m)的相应于上述子序列的子序列。显然，当$m\to\infty$时有$\|y_{1,m}\|\to 0$。以同样的推理过程可证明，标量$(\beta_2{}^{(m)})$有收敛的子序列，令β_2为其极限，$(y_{2,m})$表示$(y_{1,m})$的相应于上述子序列的子序列。这样连续做n次之后，便得(y_m)的子序列$(y_{n,m})=(y_{n,1},\ y_{n,2},\ \cdots)$，它的一般项取如下形式

$$y_{n,m}=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j{}^{(m)}x_j, \quad \left(\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j{}^{(m)}|=1\right)$$

并且标量$\gamma_j{}^{(m)}\to\beta_j(m\to\infty)$。因此，当$m\to\infty$时有

$$y_{n,m}\to y=\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j$$

其中 $\sum_{j=1}^{n}|\beta_j|=1$。所以$\beta_1$，$\beta_2$，…，$\beta_n$不全为零。由于$\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$是线性无关组，故$y\neq 0$。但另一方面，$y_{n,m}\to y$意味着$\|y_{n,m}\|\to\|y\|$（根据范数的连续性）。但根据假设$\|y_m\|\to 0$，而又$(y_{n,m})$是$(y_m)$的子序列，所以必有$\|y_{n,m}\|\to 0$，这就推出$\|y\|=\lim_{m\to\infty}\|y_{n,m}\|=0$，根据§2.2中的（$N2$）知$y=0$。从而与$y\neq 0$矛盾。引理得证。

作为这个引理的第一个应用，我们来证一个基本的定理。

2.4-2定理（完备性） 赋范空间X的每一个有限维的子空间Y都是完备的。特别是，每个有限维的赋范空间都是完备的。

证明：我们证明Y中的任一柯西序列(y_m)都在Y中收敛，这时(y_m)的极限记为y。不妨令$\dim Y=n$，$\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$是$Y$的任一基。则每个$y_m$都有如下的唯一表示

$$y_m=\alpha_1{}^{(m)}e_1+\alpha_2{}^{(m)}e_2+\cdots+\alpha_n{}^{(m)}e_n$$

由于(y_m)是柯西序列，故对每个$\varepsilon>0$，都存在N，使得当m，$r>N$时恒有$\|y_m-y_r\|<\varepsilon$。由此及引理2.4-1，我们有某一$c>0$ 使得

$$\varepsilon > \| y_m - y_r \| = \| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j \| \geqslant c \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}|$$

用$c>0$除不等式两端得到

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \varepsilon/c \qquad (m, r>N)$$

这就证明了，以下n个序列

$$(\alpha_j^{(m)}) = (\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \cdots,) \qquad j=1, 2, \cdots, n$$

皆为**R**或**C**中的柯西序列。因此，它们都是收敛的，记α_j为$(\alpha_j^{(m)})$的极限。用这n个序列的极限α_1，α_2，…，α_n定义一个矢量

$$y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

显然$y \in Y$。此外，还有

$$\| y_m - y \| = \| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j \| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \, \| e_j \|$$

在右端由于$\alpha_j^{(m)} \to \alpha_j$，故有$\| y_m - y \| \to 0$，即$y_m \to y$。这就证明了（$y_m$）在$Y$中收敛。由于（$y_m$）是$Y$中任取的柯西序列，故$Y$是完备的。

由这个定理和定理1.4-7，可以推出

2.4-3定理（封闭性） 赋范空间X中的每一个有限维子空间Y在X中都是闭的。

在我们以后的研究中，有时要用到这个定理。

要注意的是，无穷维的子空间不一定是闭的。例如，令$X = C[0, 1]$，取$Y = \mathrm{span}(x_0, x_1, \cdots)$，其中$x_j(t) = t^j$，所以$Y$是所有多项式的集合。$Y$在$X$中不是闭的（为什么？）。

有限维矢量空间X的另一个有趣的性质是，X上的所有范数导出的拓扑是相同的（见§1.3），也就是说，不管在X上选取怎样的范数，X的开子集是相同的。详细说明如下。

2.4-4定义（等价范数） 对于矢量空间X上的范数$\| \cdot \|$和$\| \cdot \|_0$，若存在正数a，b，使得对所有的$x \in X$都有

$$a \| x \|_0 \leqslant \| x \| \leqslant b \| x \|_0, \tag{3}$$

则称$\| \cdot \|$与$\| \cdot \|_0$等价。

这个概念是受到下述事实的启发。

X上的等价范数在X上定义了相同的拓扑。

事实上，从式（3）及这样一个事实：每个非空开集都是一些开球的并集（见§1.3习题4），就可推出上述结论。详细的证明留给读者（习题4）。同时还能证明，$(X, \| \cdot \|)$和$(X, \| \cdot \|_0)$中的柯西序列是相同的（习题5）。

利用引理2.4-1还能证明下述定理（注意，对无穷维的空间这个定理不再成立）。

2.4-5定理（等价范数） 在有限维矢量空间X上，任意两种范数$\| \cdot \|$和$\| \cdot \|_0$是等价的。

证明：设$\dim X = n$，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$为$X$的任意一个基，而$\| \cdot \|$与$\| \cdot \|_0$为$X$

上的任意两种范数。任取$x\in X$，它有唯一的表示

$$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n$$

根据引理2.4-1，存在正常数$c>0$，使得

$$\|x\|\geqslant c(|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|)$$

另一方面，三角不等式又给出

$$\|x\|_0\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|\ \|e_j\|_0\leqslant k\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|,\quad k=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|e_j\|_0$$

从而推出

$$\|x\|\geqslant c\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|\geqslant\frac{c}{k}\|x\|_0$$

取$a=c/k>0$，便得到式（3）中的左半个不等式：

$$a\|x\|_0\leqslant\|x\|$$

在上述的推导过程中，交换$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_0$的位置，便得到式（3）中的右半个不等式。合在一起便证明了范数的等价性。

这个定理在实用上有不可忽视的重要性。例如，在有限维的矢量空间中，序列的收敛与发散，是与具体选用的范数无关。

习　　题

1. 给出l^∞和l^2的非闭子空间的例子。

2. 若$X=\mathbf{R}^2$，$x_1=(0,1)$，$x_2=(0,1)$，问式（1）中的最大可能的c是什么？若$X=\mathbf{R}^3$，$x_1=(1,0,0)$，$x_2=(0,1,0)$，$x_3=(0,0,1)$又怎样？

3. 证明：定义2.4-4中的关系是满足等价关系公理的（见附录1中的$A1.4$）。

4. 证明：矢量空间X上的等价范数导出相同的拓扑。

5. 若$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_0$是X上的等价范数，证明：$(X,\|\cdot\|)$和$(X,\|\cdot\|_0)$中的柯西序列是相同的。

6. 定理2.4-5意味着，§2.2习题8中的$\|\cdot\|_2$和$\|\cdot\|_\infty$是等价的。给出一个直接的证明。

7. 令$\|\cdot\|_2$是§2.2习题8中所定义的范数，而令$\|\cdot\|$是那个空间X上的任一范数。直接证明（不用2.4-5），存在a，$b>0$，使得对一切$x\in X$有$\|x\|\leqslant b\|x\|_2$。

8. 证明：§2.2习题8中的范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$满足

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\|x\|_1$$

9. 若矢量空间X上的范数$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_0$等价，证明（i）$\|x_n-x\|\to0$蕴含着（ii）$\|x_n-x\|_0\to0$（当然，反之亦然。）。

10. 证明：对固定的m，n，所有的$m\times n$阶复矩阵$A=(\alpha_{jk})$构成一个mn维矢量空间Z。

证明Z上的所有范数都是等价的。相对空间Z来说，和§2.2习题8中范数$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$，$\|\cdot\|_\infty$类似吗？

§2.5 紧性和有限维

有限维赋范空间和子空间的另外几个基本性质是和紧性概念关联的。现定义如下：

2.5-1定义（紧性） 如果度量空间X的每一个序列都有一个收敛的子序列，则称X是紧的①。X的子集M，作为X的子空间若是紧的，也就是说，M的每一个序列都有一个在M中收敛的子序列，称M是紧集。

紧集的一般性质用下述引理表述。

2.5-2引理（紧性） 度量空间X的紧子集M是有界且闭的。

证明：对每个$x\in\overline{M}$，在M中有序列(x_n)，使得$x_n\to x$，见1.4-6(a)。由于M是紧的，故$x\in M$。由于$x\in\overline{M}$是任意的，因此M是闭的。下面证M是有界的。若M无界，则M必包含一个无界序列(y_n)，使得$d(y_n, b)>n$，其中b是X中的任一固定点。根据引理1.4-2，收敛序列必有界，所以(y_n)不能含收敛的子序列。这便与M的紧性矛盾。从而证明M是有界的。

这个引理的逆，一般是不成立的。

证明：为了证明这个重要的事实，只要举出反例就够了。考虑l^2中的序列(e_n)，其中的$e_n=(\delta_{nj})$，即e_n的第n项等于1，其余项都等于零，见§2.3式(4)。由于$\|e_n\|=1$，所以这个序列是有界的。把这个序列作为l^2中的一个点集来看，由于它没有聚点，所以它是一个闭集。因此(e_n)是一个有界闭集。出于同样的理由，它也不含有收敛的子序列，所以它不是紧集。

然而，对于有限维的赋范空间，我们却有

2.5-3定理（紧性） 在有限维赋范空间X中，任一子集$M\subset X$当且仅当为有界闭集时，才是紧集。

证明：根据引理2.5-2，紧性蕴含着闭性和有界性。现证其逆。令M是有界闭集，且令$\dim X=n$，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是$X$的一个基。考虑$M$中的序列$(x_m)$。每个$x_m$都有唯一的表示

$$x_m=\xi_1^{(m)}e_1+\xi_2^{(m)}e_2+\cdots+\xi_n^{(m)}e_n$$

由于M是有界的，所以(x_m)也是有界的。不妨设对所有的m，都有$\|x_m\|\leqslant k$。根据引理2.4-1，有

$$k\geqslant\|x_m\|=\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{(m)}e_j\right\|\geqslant c\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^{(m)}|$$

其中$c>0$。因此，对每个固定的j，数列$(\xi_j^{(m)})$是有界的。再据波尔察诺-维尔斯特拉斯定理，它有一个聚点ξ_j，这里$1\leqslant j\leqslant n$。象引理2.4-1中的证明那样，(x_m)有一个子序列(z_m)

① 精确些说，是列紧的。这是分析中最重要的一类紧性。顺便指出，还有另外两种紧性，但对度量空间来讲，三个概念是等同的。所以在我们的研究中没有什么区别。（有兴趣的读者在附录1的A1.5中能找到进一步的解译。）

它收敛到$z=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j$。由于$M$是闭的，故$z\in M$。这就证明了$M$中的任一序列（$x_m$）都有一个$M$中收敛的子序列（$z_m$），故$M$是紧的。

我们的讨论证明，在$\mathbf{R}^n$（或其它任一有限维赋范空间）中，紧集正好是有界闭集，所以这个性质（闭性和有界性）能够用来定义紧性。然而，在无限维的赋范空间中，不再总是如此。

其它一些有趣的结果出自于下述F.黎斯（$Riesz$）（1918 pp 75-76）给出的引理。

2.5-4黎斯引理 令Y和Z是赋范空间X（维数任意）的两个子空间，并假定Y是闭的且为Z的真子集。则对区间(0，1)中的每一个实数θ，都存在一个$z\in Z$，使得对所有的$y\in Y$有

$$\|z\|=1 \quad 及 \quad \|z-y\|\geqslant\theta$$

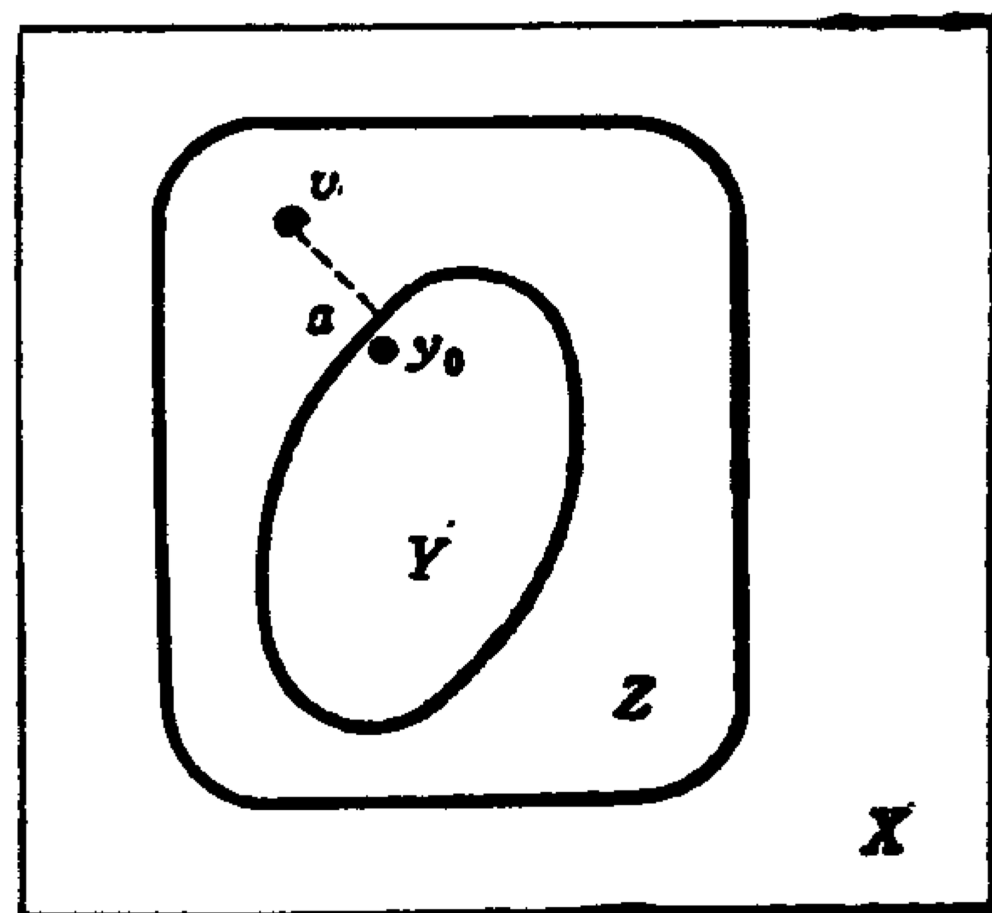


图19 黎斯引理证明的图示

证明：考虑任一$v\in Z-Y$，并用a表示v到Y的距离，即（图19）

$$a=\inf_{y\in Y}\|v-y\|$$

显然，由于Y是闭的，所以$a>0$。我们取任一$\theta\in(0,1)$，根据下确界的定义，存在$y_0\in Y$使得

$$a\leqslant\|v-y_0\|\leqslant a/\theta \qquad (1)$$

（注意，因为$0<\theta<1$，故$a/\theta>a$）。令

$$z=c(v-y_0)，其中c=1/\|v-y_0\|$$

则$\|z\|=1$，并能证明，对每个$y\in Y$有$\|z-y\|\geqslant\theta$。首先有

$$\|z-y\|=\|c(v-y_0)-y\|=c\|v-y_0-c^{-1}y\|=c\|v-y_1\|$$

其中

$$y_1=y_0+c^{-1}y$$

由于y_0，$y\in Y$，而Y是子空间，故$y_1\in Y$。从而根据a的定义可知$\|v-y_1\|\geqslant a$。写出c并利用式（1），便得到

$$\|z-y\|=c\|v-y_1\|\geqslant ca=\frac{a}{\|v-y_0\|}\geqslant\frac{a}{a/\theta}=\theta$$

由于$y\in Y$是任取的，这就完成了证明。

根据定理2.5-3，在有限维赋范空间中，闭单位球是紧的。反过来，黎斯引理给出了下述有用而值得强调的结论。

2.5-5定理（有限维） 若赋范空间X中的闭单位球$M=\{x\mid \|x\|\leqslant1\}$是紧的，则$X$是有限维的。

证明：假定闭单位球是紧的，而$\dim X=\infty$，则可导出矛盾。任取x_1且$\|x_1\|=1$，令$X_1=\mathrm{span}(x_1)$，X_1是X的一维闭子空间（见2.4-3）。又由于$\dim X=\infty$，故X_1为X的真子空间。根据黎斯引理，存在$x_2\in X$且$\|x_2\|=1$，使得

$$\| x_2 - x_1 \| \geqslant \theta = \frac{1}{2}$$

从而 $X_2 = \mathrm{span}(x_1, x_2)$ 是 X 的二维闭的真子空间。再根据黎斯引理，存在 $x_3 \in X$ 且 $\| x_3 \| = 1$，使得对每个$x \in X_2$都有

$$\| x_3 - x \| \geqslant \frac{1}{2}$$

特别有

$$\| x_3 - x_1 \| \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\| x_3 - x_2 \| \geqslant \frac{1}{2}$$

通过归纳过程，可得一个序列 $(x_n) \subset M$，它满足

$$\| x_m - x_n \| \geqslant \frac{1}{2} \qquad (m \neq n)$$

显然，(x_m) 没有收敛的子序列。这与M的紧性矛盾。因此，假设 $\dim X = \infty$ 不真，故有 $\dim X < \infty$。

这个定理有各种应用。在第八章研究所谓紧算子时，我们要把它作为一个基本工具来用。

由于紧集有类似于有限集的一些良好性态，这是非紧集所不能享有的。所以紧集是一类很重要的集合。在研究连续映射时，有一个很基本的性质是，紧集有紧象。

2.5-6定理（连续映射） 令X和Y是两个度量空间，T：$X \to Y$是一个连续映射（见1.3-3）。则X的紧子集M在T之下的象是紧的。

证明：根据紧性的定义，我们只要证明对于象$T(M) \subset Y$中的每一个序列(y_n)，都有一个在$T(M)$中收敛的子序列就够了。由于 $y_n \in T(M)$，所以存在某一$x_n \in M$，使得 $Tx_n = y_n$。又由于M是紧的，所以(x_n)含有一个在M中收敛的子序列(x_{n_k})。因为T是连续的，则据1.4-8知(x_{n_k})的象是(y_n)的在$T(M)$中收敛的子序列。因此$T(M)$是紧的。

从这个定理，我们可以断言微积分中关于连续函数的熟知性质，能搬到一般的度量空间中去。

2.5-7推论（最大与最小值） 若T是度量空间X的紧子集 **M** 到 **R** 内的连续映射，则T在 **M**的某些点可达到其最大与最小值。

证明：根据定理2.5-6和引理2.5-2，T(**M**) 是 **R**中的有界闭集。再据数学分析可知，有界闭集T(**M**) 的上下确界$\sup T(\mathbf{M})$，$\inf T(\mathbf{M}) \in T(\mathbf{M})$。这些上下确界的逆象属于**M**，且$T$在其上分别达到最大与最小值。

习　题

1. 证明$\mathbf{R}^n$和$\mathbf{C}^n$不是紧的。

2. 证明无限多个点构成的离散度量空间X（见1.1-8）不是紧的。

3. 在平面 $\mathbf{R}^2$中给出紧的和不紧的曲线例子。

4. 证明：空间s（见2.2-8）中的一个无穷子集 **M**是紧的，其必要条件是：存在数γ_1，γ_2，…，使得对一切$x = (\xi_k(x)) \in \mathbf{M}$ 都有 $|\xi_k(x)| \leqslant \gamma_k$（也可证明它是**M** 紧性的充分条件）。

5.（局部紧性） 度量空间X的每一点如果都有一个紧邻域，则称X是局部紧的。证明**R**和**C**及更一般的$\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$都是局部紧的。

6. 证明：紧度量空间X是局部紧的。

7. 若黎斯引理2.5-4中的$\dim Y<\infty$，证明：我们甚至可以选$\theta=1$。

8. 在§2.4习题7中，直接证明（不用2.4-5）存在$a>0$，使得$a\|x\|_2\leqslant\|x\|$（利用2.5-7）。

9. 若X是一个紧度量空间且$M\subset X$是闭的，证明M也是紧的。

10. 令X和Y是两个度量空间，且X是紧的，T：$X\to Y$是一个连续对射。证明T是一个同胚（见§1.6习题5）。

§2.6 线性算子

在微积分中，我们研究的是实直线**R**及**R**（或其子集）上的实值函数。显然，任意这样的函数都是一个从其定义域到**R**的映射①。在泛函分析中，我们研究的是诸如度量空间和赋范空间这样的更为一般的空间，以及这些空间之间的映射。

在矢量空间的情况下，特别是在赋范空间的情况，映射被称为**算子**。

其中特别有意义的算子，是能保持矢量空间的两个代数运算的那些算子，即所谓线性算子，其定义如下：

2.6-1（线性算子） 所谓线性算子T，是指满足下述性质的算子：

（i）T的定义域$\mathscr{D}(T)$是一个矢量空间，T的值域$\mathscr{R}(T)$落在同一个域上的矢量空间中。

（ii）对所有的x，$y\in\mathscr{D}(T)$和标量α，有

$$T(x+y)=Tx+Ty,\qquad T(\alpha x)=\alpha Tx \tag{1}$$

要注意，在这里我们用Tx代替了$T(x)$，这是泛函分析的一个标准的简化记法。此外，**本书其余部分将采用如下的记法：**

$\mathscr{D}(T)$表示T的定义域，

$\mathscr{R}(T)$表示T的值域，

$\mathscr{N}(T)$表示T的零空间。

T的**零空间**定义为如下集合

$$\mathscr{N}(T)=\{x\in\mathscr{D}(T)\,|\,Tx=0\}$$

（零空间的另一个名字是核。本书不采用这个术语，因为要把它留给积分方程理论使用。）

在研究算子时，还得谈谈箭头的使用问题。设$\mathscr{D}(T)\subset X$，$\mathscr{R}(T)\subset Y$，其中X，Y是两个实矢量空间，或两个复矢量空间。则T是一个从（或映）$\mathscr{D}(T)$到$\mathscr{R}(T)$上的算子，写成：

$$T:\ \mathscr{D}(T)\to\mathscr{R}(T)。$$

① 假定大家已熟悉映射及有关的一些简单概念，在A1.2给出一个复习材料，见附录1.

或T是一个从$\mathscr{D}(T)$到Y内的算子，写成：

$$T: \mathscr{D}(T) \to Y$$

若$\mathscr{D}(T)$是整个空间X，则这时，且仅当这时写成：

$$T: X \to Y$$

显然，式（1）等价于

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty \tag{2}$$

在式（1）中取$\alpha=0$，便得到以后常用的公式

$$T0=0 \tag{3}$$

公式（1）表明，线性算子T是一个矢量空间（它的定义域）到另一个矢量空间的**同态**。也就是说，T在下述意义下保持矢量空间的两个运算：在$\mathscr{D}(T)$中任意两个矢量的线性组合$\alpha x+\beta y$，其在T之下的象$T(\alpha x+\beta y)$，等于它们分别的象Tx，Ty，在$\mathscr{R}(T)$中以同样的方式所作的线性组合$\alpha Tx+\beta Ty$。当然，在$\mathscr{R}(T)$中是按Y中的代数运算进行的。正因为这个特性，才使得线性算子格外重要。反过来，因为只有在矢量空间上才能够定义线性算子，所以使得矢量空间在泛函分析中也是最重要的空间。

下面研究一些线性算子的基本例子，要求读者自行验证它们的线性性。

例 子

2.6-2恒等算子 恒等算子I_X：$X\to X$是这样定义的：对每个$x\in X$，都有$I_X x=x$。有时将I_X简单地写为I，因此$Ix=x$。

2.6-3零算子 零算子0：$X\to Y$是这样定义的：对每个$x\in X$，都有$0x=0\in Y$。

2.6-4微分 设X是由定义在$[a, b]$上的所有多项式构成的矢量空间，在X上定义线性算子如下：对每个$x\in X$，

$$Tx(t)=x'(t)$$

其中“$'$”表示关于t求导。这个算子T是映X到X上的。

2.6-5积分 按下式定义映$C[a, b]$到$C[a, b]$的线性算子T：

$$Tx(t)=\int_a^t x(\tau)d\tau \qquad t\in[a, b]$$

2.6-6用t乘 用下式定义了另一个从$C[a, b]$到$C[a, b]$的线性算子T：

$$Tx(t)=tx(t)$$

象我们将要在十一章看到的那样，这个算子T在物理（量子理论）中起着重要的作用。

2.6-7初等矢量代数 在矢量的叉积中，取一个矢量固定不变，便定义了一个线性算子T_1：$\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$。类似地，在矢量的点积中，取一个矢量固定不变，便又定义了线性算子T_2：$\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$，例如，

$$T_2x=x\cdot a=\xi_1\alpha_1+\xi_2\alpha_2+\xi_3\alpha_3$$

其中$a=(\alpha_j)\in\mathbf{R}^3$是固定的。

2.6-8矩阵 对于r行n列的实矩阵$A=(\alpha_{jk})$，用

$$y = Ax$$

便可定义一个算子T：$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^r$，其中$x=(\xi_j)$有$n$个分量，$y=(\eta_j)$有$r$个分量。因为要满足通常的矩阵乘法，所以$x$，$y$都写成列矢量。把$y=Ax$写出的话，便是

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

由于矩阵乘法是线性运算，所以T是线性的。若A是复矩阵，则它定义了从C^n到C^r的一个线性算子。在研究线性算子中矩阵所起的作用，在§2.9中要详细地讨论。

在以上这些例子中，很容易验证线性算子的值域和零空间都是矢量空间。这一事实是有代表性的，让我们来证明它。从而也可看到线性性是如何被用到简单的证明中去的。这个定理本身在以后的研究中也有各种应用。

2.6-9定理（值域和零空间） 设T是一个线性算子，则

(a) 值域$\mathscr{R}(T)$是一个矢量空间。

(b) 若$\dim\mathscr{D}(T)=n<\infty$，则$\dim\mathscr{R}(T)\leqslant n$

(c) 零空间$\mathscr{N}(T)$是一个矢量空间。

证明：(a)任取y_1，$y_2\in\mathscr{R}(T)$，对任意的标量α和β，我们来证明$\alpha y_1+\beta y_2\in\mathscr{R}(T)$。由于$y_1$，$y_2\in\mathscr{R}(T)$，所以存在$x_1$，$x_2\in\mathscr{D}(T)$，使得$y_1=Tx_1$，$y_2=Tx_2$。而由于$\mathscr{D}(T)$是矢量空间，故$\alpha x_1+\beta x_2\in\mathscr{D}(T)$。再据$T$的线性性可得

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=\alpha y_1+\beta y_2$$

因此$\alpha y_1+\beta y_2\in\mathscr{R}(T)$。由于$y_1$，$y_2\in\mathscr{R}(T)$及标量都是任取的，这便证明了$\mathscr{R}(T)$是一个矢量空间。

(b) 任选$\mathscr{R}(T)$中的$n+1$个矢量y_1，$y_2,\cdots,y_{n+1}$，则存在$x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}\in\mathscr{D}(T)$，使得$y_1=Tx_1$，$y_2=Tx_2$，…，$y_{n+1}=Tx_{n+1}$。由于$\dim\mathscr{D}(T)=n$，所以矢量组$\{x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}\}$是线性相关的。即有一组不全为零的标量$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}\}$，使得

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_{n+1}x_{n+1}=0$$

由于T是线性的，且$T\,0=0$，故用T作用在上式两端便得

$$T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_{n+1}x_{n+1})=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_{n+1}y_{n+1}=0$$

从而证明了$\{y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}\}$是线性相关的。又由于$\{y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}\}$是在$\mathscr{R}(T)$中任取的，说明$\mathscr{R}(T)$中的任一线性无关组所包含的矢量个数，都不会等于或大于$n+1$。根据维数的定义，便得$\dim\mathscr{R}(T)\leqslant n$。

(c) 任取x_1，$x_2\in\mathscr{N}(T)$，有$Tx_1=Tx_2=0$。由于T是线性的，故对任意的标量α，β都有

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=0$$

这说明$\alpha x_1+\beta x_2\in\mathscr{N}(T)$，故$\mathscr{N}(T)$是一个矢量空间。

证明中的(b)有一个值得注意的直接推论：

线性算子保持线性相关性。

下面我们转到线性算子的逆这个问题上来。首先要记住，映射T若对定义域中的两个不同的点有不同的象，即对任意的x_1，$x_2\in\mathscr{D}(T)$，

$$x_1\neq x_2\Rightarrow Tx_1\neq Tx_2 \tag{4}$$

或等价地

$$Tx_1=Tx_2\Rightarrow x_1=x_2 \tag{4*}$$

则T被叫做内射（*injective*）或—对一的（*one-to-one*）。在这种情况下，存在映射

$$T^{-1}:\ \mathscr{R}(T)\to\mathscr{D}(T)$$

$$y_0\mapsto x_0 \qquad (y_0=Tx_0) \tag{5}$$

它映每个$y_0\in\mathscr{R}(T)$到满足$Tx_0=y_0$的点$x_0\in\mathscr{D}(T)$上。见图20。映射T^{-1}叫做T的**逆**①。

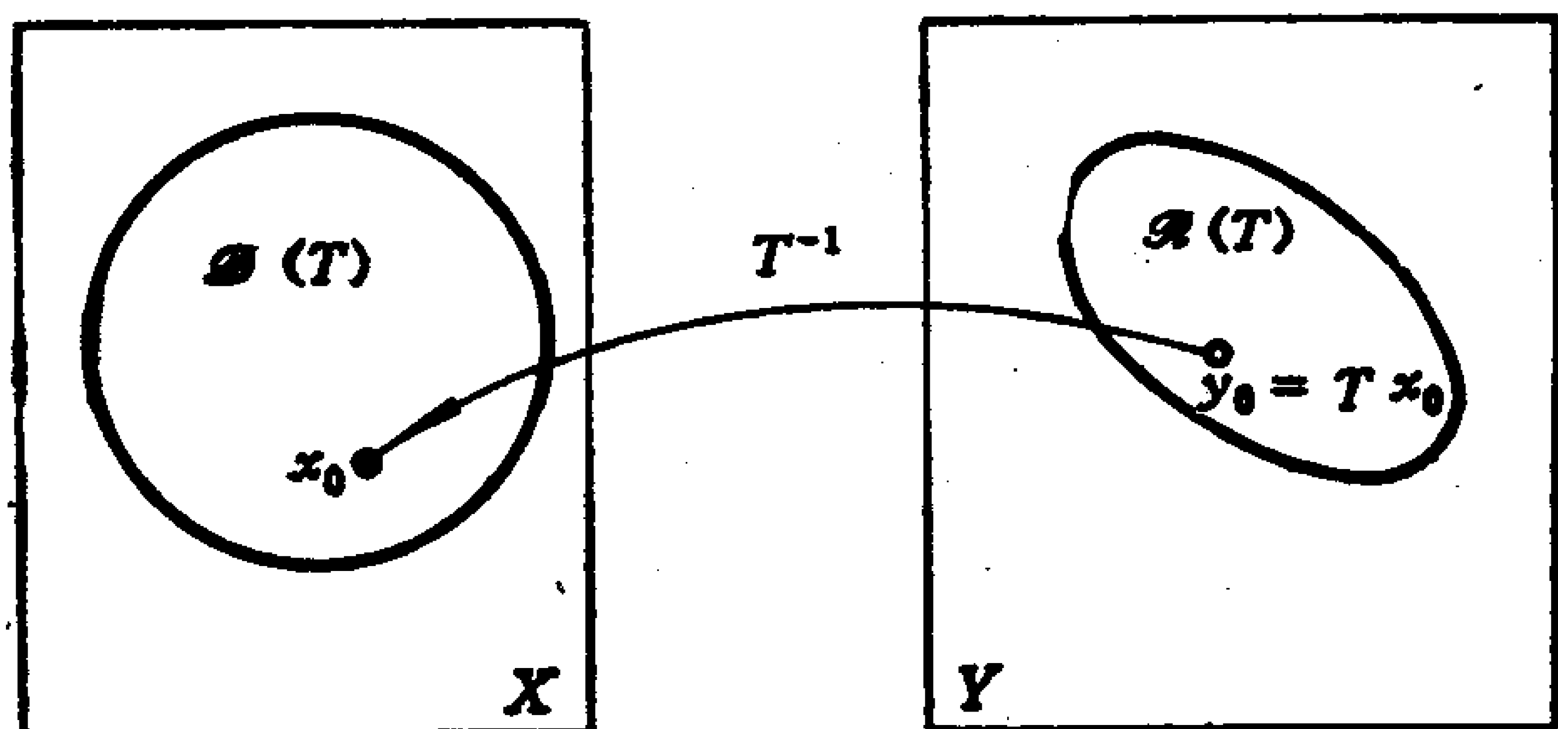


图20 关于映射的逆的示意图

显然，从式（5）可得

$$T^{-1}Tx=x \qquad \forall x\in\mathscr{D}(T)$$

$$TT^{-1}y=y \qquad \forall y\in\mathscr{R}(T)$$

在研究矢量空间上的线性算子时，情况是这样的：线性算子的逆当且仅当该算子的零空间只含有零矢量时才存在。更确切地说，我们有下述常用的判别准则。

2.6-10定理（逆算子） 设X和Y是两个实的（或复的）矢量空间，T：$\mathscr{D}(T)\to Y$是一个线性算子，且其定义域$\mathscr{D}(T)\subset X$，值域$\mathscr{R}(T)\subsetneq Y$。则

（a）逆T^{-1}：$\mathscr{R}(T)\to\mathscr{D}(T)$ 当且仅当

$$Tx=0\Rightarrow x=0$$

时才存在。

① 读者要想复习满射和对射的概念，可看附录1中的A1.2，其中也包含了使用术语"逆"的说明。

(b) 若T^{-1}存在，则T^{-1}是线性算子。

(c) 若$\dim \mathscr{D}(T)=n<\infty$且$T^{-1}$存在，则$\dim \mathscr{R}(T)=\dim \mathscr{D}(T)$。

证明：(a) 假定$Tx=0$蕴含着$x=0$。令$Tx_1=Tx_2$，因为T是线性的，故有

$$T(x_1-x_2)=Tx_1-Tx_2=0$$

所以据假设有$x_1-x_2=0$。这说明$Tx_1=Tx_2$蕴含着$x_1=x_2$。再据式（4*）知，T^{-1}存在。反之，若T^{-1}存在，则式（4*）成立。而在式（4*）中置$x_2=0$，从式（3）便得到

$$Tx_1=T0=0 \Rightarrow x_1=0$$

这就证明了(a)。

(b) 假设T^{-1}存在，我们来证明它是线性的。T^{-1}的定义域是$\mathscr{R}(T)$，而据定理2.6-9(a)知它是一个矢量空间。我们考察任意的x_1，$x_2 \in \mathscr{D}(T)$和它们的象

$$y_1=Tx_1 \qquad y_2=Tx_2$$

则

$$x_1=T^{-1}y_1 \qquad x_2=T^{-1}y_2$$

因为T是线性的，所以对任意的标量α，β有

$$\alpha y_1+\beta y_2=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=T(\alpha x_1+\beta x_2)$$

又因$x_j=T^{-1}y_j$，便可推出

$$T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha x_1+\beta x_2=\alpha T^{-1}y_1+\beta T^{-1}y_2$$

从而证明了T^{-1}是线性算子。

(c) 据定理2.6-9(b)有$\dim \mathscr{R}(T) \leqslant \dim \mathscr{D}(T)$及$\dim \mathscr{R}(T^{-1}) \leqslant \dim \mathscr{D}(T^{-1})$，而第二个不等式即$\dim \mathscr{D}(T) \leqslant \dim \mathscr{R}(T)$。所以证明了$\dim \mathscr{D}(T)=\dim \mathscr{R}(T)$。

最后我们给出一个算子乘积求逆公式，它是很有用的（读者或许已经知道算子为方阵时的这一公式）。

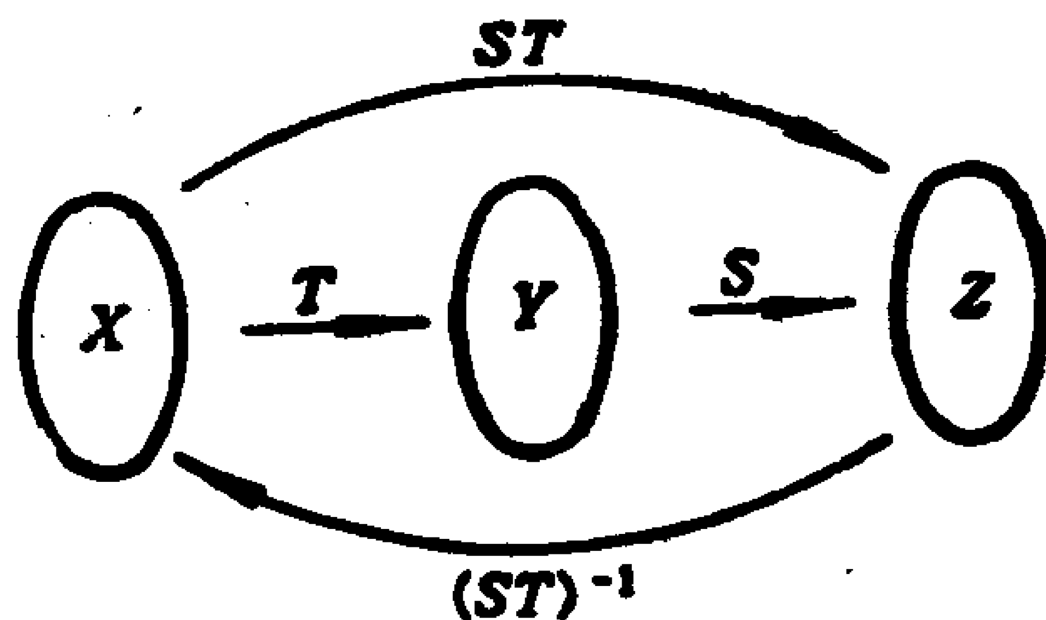


图21 引理2.6-11中的说明

2.6-11引理（乘积的逆） 设T：$X \to Y$及S：$Y \to Z$是两个对射的线性算子，其中X，Y，Z是三个矢量空间（见图21）。则积ST的逆$(ST)^{-1}$：$Z \to X$存在，且有

$$(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1} \tag{6}$$

证明：算子ST：$X \to Z$是一个对射，所以$(ST)^{-1}$存在，因而有

$$ST(ST)^{-1}=I_Z$$

其中I_Z是Z上的恒等算子。上式两端左乘S^{-1}并利用$S^{-1}S=I_Y$（Y上的恒等算子），便得

$$S^{-1}ST(ST)^{-1}=T(ST)^{-1}=S^{-1}I_Z=S^{-1}$$

再用T^{-1}左乘上式两端并利用$T^{-1}T=I_X$，便得

$$T^{-1}T(ST)^{-1}=(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}$$

这就完成了证明。

习　题

1. 证明：2.6-2，2.6-3和2.6-4中的算子是线性的。

2. 证明：分别由

$$(\xi_1,\ \xi_2)\mapsto(\xi_1,\ 0)$$
$$(\xi_1,\ \xi_2)\mapsto(0,\ \xi_2)$$
$$(\xi_1,\ \xi_2)\mapsto(\xi_2,\ \xi_1)$$
$$(\xi_1,\ \xi_2)\mapsto(\gamma\xi_1,\ \gamma\xi_2)$$

所定义的从$\mathbf{R}^2$到$\mathbf{R}^2$的算子T_1，T_2，T_3，T_4都是线性的，并对这些算子给出几何解释。

3. 习题2中各个算子的定义域、值域及零空间为何？

4. 在习题2中的T_4，2.6-7中的T_1和T_2，2.6-4中的T，它们的零空间是什么？

5. 令T：$X\to Y$是一个线性算子，证明X的子空间V在T之下的象是一个矢量空间。并且Y的子空间W的逆象也是一个矢量空间。

6. 若两个线性算子的积（合成）存在，证明它是线性的。

7. **（交换性）**。设X是任一矢量空间且S：$X\to X$和T：$X\to X$是任意两个算子，若$ST=TS$，则称S和T是可交换的。也就是说，S与T可交换意味着，对一切$x\in X$，有$(ST)x=(TS)x$。习题2中的T_1和T_3可交换吗？

8. 用2×2的矩阵表出习题2中的算子。

9. 在2.6-8中的$y=Ax$用分量写出，证明T是线性的，并给出例子。

10. 用T的零空间来描述2.6-10(a)中的条件。

11. 令X是所有2×2的复矩阵构成的矢量空间，用$Tx=bx$来定义T：$X\to X$，其中$b\in X$是固定的，bx表示通常的矩阵乘积。证明T是线性的。在什么条件下T^{-1}存在。

12. 2.6-4中的T，其逆是否存在？

13. 令T：$\mathscr{D}(T)\to Y$是一个可逆的线性算子。若$\{x_1,\ x_2,\ \cdots x_n\}$是$\mathscr{D}(T)$中的一个线性无关组，证明$\{Tx_1,\ Tx_2,\ \cdots,\ Tx_n\}$也是线性无关的。

14. 令T：$X\to Y$是一个线性算子，且$\dim X=\dim Y=n<\infty$。证明当且仅当T^{-1}存在才有$\mathscr{R}(T)=Y$。

15. 考虑所有定义在$\mathbf{R}$上且在$\mathbf{R}$上处处有各阶导数的实值函数构成的矢量空间X。用$y(t)=Tx(t)=x'(t)$来定义T：$X\to X$。证明$\mathscr{R}(T)$是整个X，但T^{-1}不存在。和习题14作一比较并加以评论。

§2.7　有界和连续线性算子

读者可能注意到，整个上一节我们都没有用到范数概念。而这一节给出的基本定义，把范数也考虑了进去。

2.7-1 定义（有界线性算子） 设X和Y是两个赋范空间，而T：$\mathscr{D}(T)\to Y$是一个线性算子，其中$\mathscr{D}(T)\subset X$。若存在一个实数c，使得对一切$x\in\mathscr{D}(T)$都有

$$\|Tx\|\leqslant c\|x\| \tag{1}$$

成立，则称T是有界的。

在式（1）中，左端是取Y上的范数，而右端是取X上的范数。为简单起见，在不致产生混乱的情况下，把两种范数都用同一符号$\|\cdot\|$表示，在这里用脚注（$\|x\|_0$，$\|Tx\|_1$等）加以区分似乎没有必要。公式（1）表明，有界线性算子把$\mathscr{D}(T)$中的有界集合映到Y中的有界集合上。这正是"有界算子"这一名字的来源。

告诫：要注意，我们现在所用的"有界"一词，是和微积分中不同的。在那里有界函数指的是其值域为有界集。遗憾的是，这两个术语都是标准的，但不会有混淆的危险。

对于所有的$x\in\mathscr{D}(T)$，使得式（1）总是成立的最小可能的c又是什么呢？〔据§2.6式（3），对于$x=0$有$Tx=0$，所以可抛开$x=0$不管。〕用$\|x\|$去除式（1）的两端，便有

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant c \qquad (x\neq 0)$$

这就表明，c至少必须有关于一切$x\in\mathscr{D}(T)-\{0\}$对上式左端取上确界那样大。因此，问题的回答是，式（1）中最小可能的c就是这样一个上确界。这个量用$\|T\|$表示，故而有

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ x\neq 0}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{2}$$

$\|T\|$叫做算子T的**范数**。若$\mathscr{D}(T)=\{0\}$，则我们规定$\|T\|=0$，在这种（相对来说没有意义的）情况下，据§2.6式（3）$T0=0$，便有$T=0$。

注意，将$c=\|T\|$代入式（1），便得到

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\| \tag{3}$$

这个公式要经常用到。

当然，我们还需验证式（2）确实定义了一个范数，这就是下述引理要做的工作。

2.7-2 引理（范数） 设T是2.7-1中定义的一个有界线性算子，则

(a) 关于T的范数有一个等价的定义

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ \|x\|=1}}\|Tx\| \tag{4}$$

(b) 由式（2）定义的范数满足§2.2中的（N1）至（N4）。

证明：(a) 记$\|x\|=a$，置$y=x/a$，其中$x\neq 0$，则$\|y\|=\|x\|/a=1$。由于T是线性的，所以式（2）成为

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ x\neq 0}}\frac{1}{a}\|Tx\|=\sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ x\neq 0}}\|T(x/a)\|=\sup_{\substack{y\in\mathscr{D}(T)\\ \|y\|=1}}\|Ty\|$$

将右端的y再换成x，便得到式（4）。

(b)（N1）是显然的，且$\|0\|=0$。若$\|T\|=0$，对所有的$x\in\mathscr{D}(T)$，便有$\|Tx\|$

$=0$，从而 $Tx=0$，故 $T=0$。这便证明（N2）成立。此外，由

$$\sup_{\|x\|=1}\|\alpha Tx\|=\sup_{\|x\|=1}|\alpha|\ \|Tx\|=|\alpha|\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$$

其中 $x\in\mathscr{D}(T)$，证明了满足（N3）。再由

$$\sup_{\|x\|=1}\|(T_1+T_2)x\|=\sup_{\|x\|=1}\|T_1x+T_2x\|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|T_1x\|+\sup_{\|x\|=1}\|T_2x\|$$

其中 $x\in\mathscr{D}(T)$，便证明了（N4）。

在我们考虑有界线性算子的一般性质之前，先让我们看一些典型的例子，这对我们进一步体会有界线性算子的概念有好处。

例子

2.7-3恒等算子 赋范空间 $X\neq\{0\}$ 上的恒等算子I：$X\to X$ 是有界的，且范数 $\|I\|=1$（见2.6-2）。

2.7-4零算子 赋范空间 X 上的零算子0：$X\to Y$ 是有界的且范数 $\|0\|=0$(见2.6-3)。

2.7-5微分算子 令 X 是 $J=[0,1]$ 上的所有多项式构成的赋范空间，其上的范数为 $\|x\|=\max\limits_{t\in J}|x(t)|$。用

$$Tx(t)=x'(t)$$

在 X 上定义微分算子 T，其中"$'$"是关于 t 求导。这个算子是线性的，但是无界的。事实上，令 $x_n(t)=t^n$，其中 $n\in N$。则 $\|x_n\|=1$，且

$$Tx_n(t)=x_n'(t)=nt^{n-1}$$

所以 $\|Tx_n\|=n$ 并且 $\|Tx_n\|/\|x_n\|=n$。由于 $n\in N$ 是任意的，这就证明了不存在固定的数 c，使得 $\|Tx_n\|/\|x_n\|\leqslant c$。由此和式（1）便推出 T 是无界的。

由于微分是一个重要的运算，上述结论似乎表明：无界算子也有其实际的重要性。正象我们在第十章和第十一章所要看到的那样，情况的确如此。在我们详细地研究了有界算子的理论和应用之后，将会看到有界算子比无界线子要简单些。

2.7-6积分算子 我们能够用

$$y=Tx,\ 其中\ y(t)=\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

来定义一个积分算子 T：$C[0,1]\to C[0,1]$。这里的 k 是一个给定的函数，叫做 T 的核，并假定它在 t-τ 平面上的闭正方形 $G=J\times J$ 上是连续的，其中 $J=[0,1]$。这个算子是线性的。

T 也是有界的。

为了证明这点，首先注意到 k 在 G 上连续蕴含着 k 是有界的。比如说，对所有的 $(t,\tau)\in G$ 有 $|k(t,\tau)|\leqslant k_0$，其中 k_0 为一实数。此外，

$$|x(t)|\leqslant\max_{t\in J}|x(t)|=\|x\|$$

因此有

$$\|y\|=\|Tx\|=\max_{t\in J}\left|\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau\right|$$

$$\leqslant\max_{t\in J}\int_0^1|k(t,\tau)|\ |x(\tau)|\,d\tau\leqslant k_0\|x\|$$

从而推出 $\|Tx\| \leqslant k_0' \|x\|$，在（1）中取$c=k_0$，便证明了$T$是有界的。

2.7-7矩阵 一个 r 行 n 列的实矩阵$A=(\alpha_{jk})$用

$$y=Ax \tag{5}$$

能定义一个算子T：$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^r$，其中$x=(\xi_i)$和$y=(\eta_j)$分别是$n$维和$r$维的列矢量，象2.6-8那样，采用了矩阵乘法规则。用分量表出，式（5）便是

$$\eta_j=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ r) \tag{5'}$$

因为矩阵乘法是线性运算，所以T是线性的。

T也是有界的。

为了证明这点，我们还记得在2.2-2中，$\mathbf{R}^n$上的范数被定义为

$$\|x\|=\left(\sum_{m=1}^{n}\xi_m^2\right)^{1/2}$$

$\mathbf{R}^r$上的范数是类似的。从式（5′）和§1.2中的柯西-许瓦兹不等式（11），便得到

$$\|Tx\|^2=\sum_{j=1}^{r}\eta_j^2=\sum_{j=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k\right]^2\leqslant\sum_{j=1}^{r}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\right)^{1/2}\right]^2$$

$$=\|x\|^2\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^2$$

注意上式最后一行的二重和式与x无关，所以可写成如下形式

$$\|Tx\|^2\leqslant c^2\|x\|^2,\quad 其中c^2=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^2$$

这就给出了式（1），并完成了T是有界的证明。

关于矩阵在研究线性算子方面的作用，我们将单用一节（§2.9）来研究，其有界性具有典型的意义。正象后面所述，在有限维的情况下，总能用它对算子作根本性的简化。

2.7-8定理（有限维） 若X是一个有限维的赋范空间，则X上的每个线性算子都是有界的。

证明：设$\dim X=n$，并设$\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$是$X$的一个基。任取$x=\sum\xi_je_j\in X$，考虑$X$上的任一线性算子$T$。由于$T$是线性的，所以

$$\|Tx\|=\|\sum\xi_jTe_j\|\leqslant\sum|\xi_j|\,\|Te_j\|\leqslant\max_k\|Te_k\|\sum|\xi_j|$$

（和式是从1到n取的）。对最后一个和式，应用引理2.4-1，其中$\alpha_j=\xi_j$，$x_j=e_j$，则得到

$$\sum|\xi_j|\leqslant\frac{1}{c}\|\sum\xi_je_j\|=\frac{1}{c}\|x\|$$

合在一起，便有

$$\|Tx\|\leqslant\gamma\|x\|,\quad 其中\gamma=\frac{1}{c}\max_k\|Te_k\|$$

由此和式（1）便看出T是有界的。

下面我们来考察有界线性算子的共同的重要性质。

算子既是映射，所以可定义它们的连续性（见1.3-3）。对线性算子来讲，一个最基本的事实是：连续性与有界性是两个等价的概念。其详细的论证如下：

设$T: \mathscr{D}(T) \to Y$是任意的算子，不必是线性的，其中$\mathscr{D}(T) \subset X$，而X和Y是两个赋范空间。根据定义1.3-3，若对每个$\varepsilon>0$，都存在着相应的$\delta>0$，使得对所有满足$\|x-x_0\|<\delta$的$x \in \mathscr{D}(T)$恒有

$$\|Tx-Tx_0\|<\varepsilon$$

则称算子T在$x_0 \in \mathscr{D}(T)$连续。若T在每一点$x \in \mathscr{D}(T)$都连续，则称T是连续的。

现在假定T是连续的，则有如下值得重视的定理。

2.7-9定理（连续性和有界性） 设$T: \mathscr{D}(T) \to Y$是一个线性[1]算子，其中$\mathscr{D}(T) \subset X$，X和Y都是赋范空间。则

(a) T连续当且仅当T有界

(b) 若T在一点连续，则T在整个定义域$\mathscr{D}(T)$上都连续。

证明：(a) 对于$T=0$，情况是明显的。设$T \neq 0$，则$\|T\| \neq 0$。假定T是有界的，来考虑任一$x_0 \in \mathscr{D}(T)$。设给定了任一$\varepsilon>0$。由于T是线性的，所以对每个满足

$$\|x-x_0\|<\delta, \quad \text{其中}\delta=\frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

的$x \in \mathscr{D}(T)$，都有

$$\|Tx-Tx_0\|=\|T(x-x_0)\| \leqslant \|T\|\,\|x-x_0\|<\|T\|\delta=\varepsilon$$

而由于$x_0 \in \mathscr{D}(T)$是任意的，这就证明了T是连续的。

反之，假定T在任一点$x_0 \in \mathscr{D}(T)$都连续。则对任意给定的$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得对所有满足$\|x-x_0\| \leqslant \delta$的$x \in \mathscr{D}(T)$，有

$$\|Tx-Tx_0\| \leqslant \varepsilon \tag{6}$$

现在任取$\mathscr{D}(T)$中的一点$y \neq 0$，并置$x=x_0+(\delta/\|y\|)y$，则有

$$x-x_0=\frac{\delta}{\|y\|}y$$

因此$\|x-x_0\|=\delta$，所以可用式（6）。由于T是线性的，便有

$$\|Tx-Tx_0\|=\|T(x-x_0)\|=\left\|T\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right\|=\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\|$$

而式（6）又给出

$$\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\| \leqslant \varepsilon$$

---

[1] 注意。遗憾的是某些作者把连续线性算子叫做"线性算子"。我们不用这个术语，事实上在实用上很重要的线性而不连续的算子是存在的。在2.7-5中已给出过例子。其他的例子在第十、十一章中研究。

因而有

$$\|Ty\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}\|y\|$$

在取 $c=\varepsilon/\delta$ 之后，便可写为 $\|Ty\| \leqslant c\|y\|$，此即证明了 T 是有界的。

(b) 由 (a) 的后半部分证明可知，由 T 在一点连续意味着 T 是有界的。而有界性蕴含着连续性。

2.7-10推论（连续性，零空间） 设 T 是有界线性算子，则

(a) $x_n \to x$ 〔x_n，$x \in \mathscr{D}(T)$〕蕴含着 $Tx_n \to Tx$

(b) 零空间 $\mathscr{N}(T)$ 是闭的

证明：(a) 从定理2.7-9(a) 及 1.4-8，或直接从式（3），便可推出当 $n\to\infty$ 时有

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leqslant \|T\|\|x_n - x\| \to 0$$

(b) 对每个 $x \in \overline{\mathscr{N}(T)}$，都存在 $\mathscr{N}(T)$ 中的序列 (x_n)，使得 $x_n \to x$，见1.4-6(a)。因此由本推论的 (a) 可知：$Tx_n \to Tx$。而因为 $Tx_n = 0$，故 $Tx = 0$。所以 $x \in \mathscr{N}(T)$。由于 $x \in \overline{\mathscr{N}(T)}$ 是任意的，所以 $\mathscr{N}(T)$ 的闭的。

值得注意的是，有界线性算子的值域 $\mathscr{R}(T)$ 却未必是闭的，见习题6。

读者能够很容易地证明另外一个极为有用的公式，即

$$\|T_1T_2\| \leqslant \|T_1\|\|T_2\| \qquad \|T^n\| \leqslant \|T\|^n \qquad n \in N \tag{7}$$

其中 T_1，T_2，T 是三个有界线性算子，分别是：
T_2：$X \to Y$，T_1：$Y \to Z$，T：$X \to X$；而 X，Y 和 Z 是三个赋范空间。

算子既是映射，有关映射①的一些概念都可以进行讨论，特别是算子的定义域，值域和零空间。还有另外两个可讨论的概念（限制和延拓）。这些工作本来可以提前做，，但放在这儿更好一点，因为能立即给出一个有趣的应用（下面的定理2.7-11）。首先让我们从定义算子的相等开始。

若 T_1 和 T_2 有相同的定义域 $\mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T_2)$，并且对所有的 $x \in \mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T_2)$ 都有 $T_1x = T_2x$，则称 T_1 和 T_2 是**相等的**，记为 $T_1 = T_2$。

算子 T：$\mathscr{D}(T) \to Y$ 在子集 $B \subset \mathscr{D}(T)$ 上的**限制**用

$$T|_B$$

来表示，它是由

$$T|_B\colon\ B \to Y,\quad T|_B x = Tx,\quad \forall x \in B$$

所定义的一个算子。

算子 T 到集合 $M \supset \mathscr{D}(T)$ 的**延拓**是这样一个算子：

$$\tilde{T}\colon\ M \to Y \qquad 使得\ \tilde{T}|_{\mathscr{D}(T)} = T$$

---

① 关于这些概念的复习在A1.2中给出，见附录1.

也就是说，对所有的 $x\in\mathscr{D}(T)$，$\tilde{T}x=Tx$〔因此T是$\tilde{T}$在$\mathscr{D}(T)$上的限制。〕

若$\mathscr{D}(T)$是M的一个真子集，则一个给定的T可有很多的延拓。而其中最有意义的通常是这样一个延拓，它能保留T的某些性质，例如线性性（若T是线性的话）或有界性（若$\mathscr{D}(T)$是落在一个赋范空间中，并且T是有界的话）。下面的一个重要定理在这方面具有典型的意义。它是讲一个有界线性算子T延拓到其定义域的闭包$\overline{\mathscr{D}(T)}$上，并且使得延拓算子$\tilde{T}$仍是线性和有界的，甚至和$T$有相同的范数。这个定理包括了把算子从赋范空间$X$的一个稠密子集延拓到整个$X$的情况；也包括了把$X$上的算子延拓到$X$的完备化$\hat{X}$（见2.3-2）上的情况。

2.7-11定理（有界线性延拓） 设T：$\mathscr{D}(T)\to Y$是一个有界线性算子，$\mathscr{D}(T)$落在赋范空间X中，而Y是一个巴拿赫空间。则T有一个延拓

$$\tilde{T}: \overline{\mathscr{D}(T)}\to Y$$

且$\tilde{T}$是一个有界线性算子，其范数

$$\|\tilde{T}\|=\|T\|$$

证明：我们考虑任一$x\in\overline{\mathscr{D}(T)}$，根据定理1.4-6(a)，在$\mathscr{D}(T)$中有序列$(x_n)$使得$x_n\to x$。因为$T$是有界及线性的，故有

$$\|Tx_n-Tx_m\|=\|T(x_n-x_m)\|\leqslant\|T\|\|x_n-x_m\|$$

又因为(x_n)收敛，故(Tx_n)是一个柯西序列。由于假定了Y是完备的，所以(Tx_n)是收敛的，不妨设

$$Tx_n\to y\in Y$$

这样，我们就可用

$$\tilde{T}x=y$$

来定义$\tilde{T}$，并且能证明$\tilde{T}$的定义是与如何在$\mathscr{D}(T)$中选取收敛于x的序列(x_n)无关。假定$x_n\to x$及$z_n\to x$，令$(v_m)=(x_1,\ z_1,\ x_2,\ z_2,\ \cdots,\ )$，则$v_m\to x$。而根据2.7-10(a)，$(Tv_m)$是收敛的，并且它的两个子序列$(Tx_n)$和$(Tz_n)$应有相同的极限。这就证明了$\tilde{T}$在每一点$x\in\overline{\mathscr{D}(T)}$被唯一的定义。

显然，$\tilde{T}$是线性的，并且对每个$x\in\mathscr{D}(T)$有$\tilde{T}x=Tx$。所以$\tilde{T}$是T的一个延拓。现利用

$$\|Tx_n\|\leqslant\|T\|\|x_n\|$$

并且令$n\to\infty$，则有$Tx_n\to y=\tilde{T}x$。由于范数$x\mapsto\|x\|$定义了一个连续映射（见§2.2），从而得到

$$\|\tilde{T}x\|\leqslant\|T\|\|x\|$$

因此$\tilde{T}$是有界的，并且$\|\tilde{T}\|\leqslant\|T\|$。然而，由于范数被定义为上确界，所以在延拓时是不会减小的，故$\|\tilde{T}\|\geqslant\|T\|$。合在一起便有$\|\tilde{T}\|=\|T\|$。

习　题

1. 证明(7)。

2. 设X和Y是赋范空间。证明线性算子T：$X\to Y$当且仅当映X中的有界集为Y中的有界集时，是有界的。

3. 若$T\neq 0$是一个有界线性算子，证明对满足$\|x\|<1$的任一$x\in\mathscr{D}(T)$，都有严格不等式

$$\|Tx\|<\|T\|$$

4. 不用2.7-9(a)，给予2.7-9(b)一个直接证明。

5. 证明：由$y=(\eta_i)=Tx$，$\eta_i=\xi_i/j$，$x=(\xi_i)$所定义的算子T：$l^\infty\to l^\infty$是线性和有界的。

6. **(值域)** 证明有界线性算子T：$X\to Y$的值域$\mathscr{R}(T)$在Y中未必是闭的。提示，用习题5中的T。

7. **(逆算子)** 设T是一个从赋范空间X到赋范空间Y上的有界线性算子。若存在正数b使得对所有的$x\in X$都有

$$\|Tx\|\geqslant b\|x\|$$

试明T^{-1}：$Y\to X$存在且是有界的。

8. 证明有界线性算子T：$X\to Y$的逆T^{-1}：$\mathscr{R}(T)\to X$未必有界。提示，用习题5中的T。

9. 令T：$C[0,1]\to C[0,1]$被定义为

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$$

求$\mathscr{R}(T)$和T^{-1}：$\mathscr{R}(T)\to C[0,1]$，T^{-1}是线性和有界的吗？

10. 在$C[0,1]$上分别用

$$y(s)=s\int_0^1 x(t)dt \qquad y(s)=sx(s)$$

来定义S和T。问S和T可交换吗？求$\|S\|$，$\|T\|$，$\|ST\|$和$\|TS\|$。

11. 设X是R上的所有有界实值函数构成的赋范空间，其上的范数为

$$\|x\|=\sup_{t\in R}|x(t)|$$

并令T：$X\to X$定义为

$$y(t)=Tx(t)=x(t-\Delta)$$

其中$\Delta>0$是一个常数。(这是一个延迟线的模型，属于电气装置，其输出y是输入x的一个延迟，延迟时间为Δ，见图22。) T是线性的吗？是有界的吗？

12. (矩阵) 从2.7-7我们知道，$r\times n$阶矩阵$A=(\alpha_{jk})$定义了一个从$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^r$的线性算子，其中$\mathbf{R}^n$和$\mathbf{R}^r$分别是所有n元实序组和r元实序组所构成的矢量空间。假定分别在$\mathbf{R}^n$和$\mathbf{R}^r$上任意给定了范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$。还记得§2.4习题10中，曾在$r\times n$(固定)阶矩阵

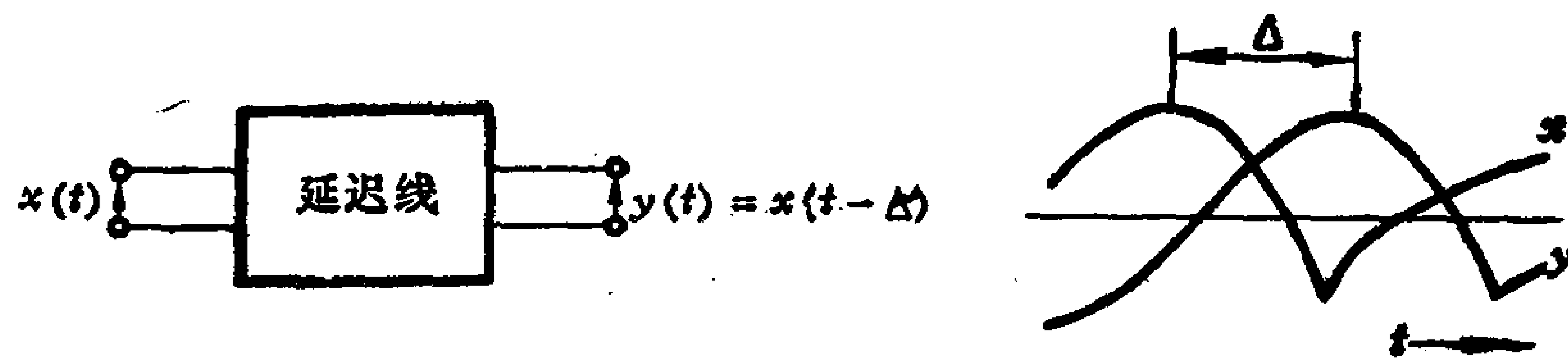


图22 电器延迟线

空间Z上给出各种范数。对于Z上的范数$\|\cdot\|$，若有

$$\|Ax\|_2\leqslant\|A\|\ \|x\|_1,$$

则称$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_1$及$\|\cdot\|_2$是相容的。证明由

$$\|A\|=\sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^n\\x\neq0}}\|Ax\|_2/\|x\|_1$$

所定义的范数和$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$是相容的。这个范数常常叫做由$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$定义的自然范数。若我们选$\|x\|_1=\max_j|\xi_j|$和$\|y\|_2=\max_j|\eta_j|$，证明这时的自然范数为

$$\|A\|=\max_j\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{jk}|$$

13. 证明：在2.7-7中置$r=n$，由

$$\|A\|=\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^2\right)^{1/2}$$

定义了一个相容的范数，但对于$n>1$，它不是由$\mathbf{R}^n$上的欧几里德范数所定义的自然范数。

14. 若在习题12中选取

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|,\qquad \|y\|_2=\sum_{j=1}^{r}|\eta_j|$$

证明由

$$\|A\|=\max_k\sum_{j=1}^{r}|\alpha_{jk}|$$

定义了一个相容的范数。

15. 证明：对于$r=n$，习题14中的范数就是相应于该问题中$\|\cdot\|_1$及$\|\cdot\|_2$的自然范数。

§2.8 线性泛函

泛函不过是值域落在实直线$\mathbf{R}$上或复平面$\mathbf{C}$内的一个算子而已。泛函分析这一分支最初是分析研究泛函的。此后由于它经常的出现，所以就用特定的符号来表示它。这里我们用小写字母f，g，h，…等表示泛函。f的定义域和值域分别用$\mathscr{D}(f)$及$\mathscr{R}(f)$表示，f在$x\in\mathscr{D}(f)$的值用带有括号的$f(x)$表示。

泛函是算子，所以已有的定义皆可使用。由于我们经常考虑的泛函是线性和有界的，所以需要特别强调下面两个定义：

2.8-1定义（线性泛函） 线性泛函f是一个定义域落在矢量空间X中，而值域落在X的标量域K中的线性算子；因而

$$f: \mathscr{D}(f) \to \mathbf{K}$$

若X为实空间，则$\mathbf{K}=\mathbf{R}$；若X为复空间，则$\mathbf{K}=\mathbf{C}$。

2.8-2定义（有界线性泛函） 有界线性泛函f是一个定义域$\mathscr{D}(f)$落在赋范空间X中，而其值域$\mathscr{R}(f)$落在X的标量域中的有界线性算子(见定义2.7-1)。因而对所有的$x\in\mathscr{D}(f)$，存在实数c，使得

$$|f(x)| \leqslant c\|x\| \tag{1}$$

此外，f的范数（见§2.7中式（2））为

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(f)\\ x\neq 0}} |f(x)|/\|x\| \tag{2a}$$

或

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(f)\\ \|x\|=1}} |f(x)| \tag{2b}$$

§2.7中的式（3）意味着

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\| \tag{3}$$

而定理2.7-9的特殊情况是

2.8-3定理（连续性和有界性） 定义域$\mathscr{D}(f)$落在赋范空间中的线性泛函f，当且仅当有界时是连续的。

例　子

2.8-4范数 赋范空间（X，$\|\cdot\|$）上的范数$\|\cdot\|$：$X\to\mathbf{R}$是X上的一个泛函，但不是线性的。

2.8-5点积 通常的点积，如果一个因子保持不变，便通过

$$f(x)=\xi_1\alpha_1+\xi_2\alpha_2+\xi_3\alpha_3$$

定义了一个泛函f：$\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$，其中$a=(\alpha_j)\in\mathbf{R}^3$固定不变。

f是线性的，并且是有界的。事实上，

$$|f(x)| = |x\cdot a| \leqslant \|x\|\,\|a\|$$

若对上面不等式关于所有范数等于1的x取上确界，便由式（2b）推出$\|f\|\leqslant\|a\|$。另一方面，取$x=a$，并利用式（3）便有

$$\|f\| \geqslant \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|$$

因此f的范数是$\|f\|=\|a\|$。

2.8-6定积分 我们知道，在微积分中一个函数的定积分是一个数。然而，当被积函数看

作是在某一函数空间变化时，情况就完全不同了。而这时定积分成为定义在该函数空间上的泛函了。我们也把它叫做 f。如果我们选的函数空间是$C[a, b]$，见2.2-5，则 f定义为

$$f(x)=\int_a^b x(t)\,dt \qquad x\in C[a, b]$$

f 是线性的。现证f也是有界的，并且 $\|f\|=b-a$。

事实上，令 $J=[a, b]$，并且记住$C[a, b]$上的范数，便能得到

$$|f(x)|=\left|\int_a^b x(t)\,dt\right|\leqslant (b-a)\max_{t\in J}|x(t)|=(b-a)\|x\|$$

上式关于所有范数等于1的x取上确界，便得 $\|f\|\leqslant b-a$。为得到 $\|f\|\geqslant b-a$，只要取特殊的点$x=x_0=1$，并注意 $\|x_0\|=1$，再利用式（3）便到得

$$\|f\|\geqslant\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}=|f(x_0)|=\int_a^b dt=b-a$$

2.8-7空间 $C[a, b]$ $C[a, b]$上的另一个在实用上也很重要的泛函是按下述方式得到的：若选定$t_0\in J=[a, b]$，并置

$$f_1(x)=x(t_0), \qquad x\in C[a, b]$$

则f_1是线性且有界的，其范数 $\|f_1\|=1$。事实上，有

$$|f_1(x)|=|x(t_0)|\leqslant\|x\|$$

关于所有范数等于1的x取上确界，根据式（2）便推出 $\|f_1\|\leqslant 1$，另外，对于$x_0=1$，有 $\|x_0\|=1$，从式（3）可得到

$$\|f_1\|\geqslant|f(x_0)|=1$$

2.8-8空间l^2 在希尔伯特空间l^2（见1.2-3）上，通过选取$a=(\alpha_j)\in l^2$，并置

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j$$

其中$x=(\xi_j)\in l^2$，便可得到一个线性泛函f。根据§1.2中的柯西-许瓦兹不等式（11）（关于j从1到∞取和式）有

$$|f(x)|=|\sum\xi_j\alpha_j|\leqslant\sum|\xi_j|\,|\alpha_j|\leqslant\sqrt{\sum|\xi_j|^2}\sqrt{\sum|\alpha_j|^2}=\|x\|\,\|a\|$$

这便证明了级数$f(x)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j$是绝对收敛的，$f$是有界的。

定义在一个矢量空间X上的所有线性泛函的集合，也能作成一个矢量空间。这一事实有其根本的重要性。这个空间用X^*表示，并且叫做X的**代数①对偶空间**。矢量空间X^*上的代数运算以自然的方式定义为：两个泛函f_1与f_2的和f_1+f_2是这样的泛函 s，它在每个 $x\in X$上的值为

$$s(x)=(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

① 注意，这个定义没有涉及范数。由定义在X上的所有有界线性泛函构成的所谓对偶空间X'，将在§2.10中研究。

标量 α 与泛函 f 的积 αf 是泛函 p，它在 $x\in X$ 上的值为

$$p(x)=(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$

注意，这与通常函数加法及函数与常量的乘法是一致的。

我们还可进一步考虑 X^* 的代数对偶 $(X^*)^*$，其元素是定义在 X^* 上的线性泛函。我们把 $(X^*)^*$ 记为 X^{**}，并叫做 X 的**二次代数对偶空间**。

为什么要考虑 X^{**} 呢？原因是我们能够得到 X 与 X^{**} 之间的一个重要而有趣的关系，具体如下。我们选定记号：

空　间	一般元素	在一点的值
X	x	—
X*	f	f(x)
X**	g	g(f)

我们选定一个 $x\in X$，置

$$g(f)=g_x(f)=f(x)\quad(x\in X\text{固定，}f\in X^*\text{变化})\tag{4}$$

则便得到定义在 X^* 上的一个线性泛函 $g\in X^{**}$。脚注 x 是让大家记住，我们是利用一个 $x\in X$ 而得到的 g。细心的读者会看出，这里 f 在改变，而 x 是固定的。牢记这一点，对理解这里的研究是很有帮助的。

由式（4）所定义的 g_x 是线性的，这从

$$g_x(\alpha f_1+\beta f_2)=(\alpha f_1+\beta f_2)(x)=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)=\alpha g_x(f_1)+\beta g_x(f_2)$$

可以看出。因此根据 X^{**} 的定义知 $g_x\in X^{**}$。

对每一个 x，都有一个 $g_x\in X^{**}$ 与之对应，这就定义了一个映射 C：$X\to X^{**}$

$$x\mapsto g_x$$

C 叫做 X 到 X^{**} 的**典范映射**。

由于 C 的定义域 X 是矢量空间，而又有

$$\begin{aligned}C(\alpha x+\beta y)(f)&=g_{\alpha x+\beta y}(f)=f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)\\&=\alpha g_x(f)+\beta g_y(f)=\alpha(Cx)(f)+\beta(Cy)(f)\\&=(\alpha Cx+\beta Cy)(f)\end{aligned}$$

所以 C 是线性的。有时也把 C 叫做 X 到 X^{**} 的标准嵌入。为了理解这个术语和它的来历，首先来阐明同构的概念，它具有普遍的意义。

我们的任务之一是研究各种空间。所有空间的共同点是它们都有一个基集 X，和在 X 上规定的一个“结构”。对于度量空间，这个结构就是距离；对于矢量空间，这个结构由两种代数运算形成；而对于赋范空间，其结构是指两种代数运算和范数。

给定两个同类型的空间 X 和 $\tilde{X}$（例如两个矢量空间），弄清楚 X 与 $\tilde{X}$ 是否“本质上等同”，这是很有意义的。所谓本质上等同，就是说 X 与 $\tilde{X}$ 至多在它们的元素特征上有所不同，而其余的都一样。如果是这样，我们就能够把 X 与 $\tilde{X}$ 看作为一个空间，或者同一个空间

的两个拷贝。我们总是把结构当作研究的基本对象，而元素的具体特征则不足为论。这种研究问题的方式方法是经常出现的，这也是我们提出同构概念的出发点。按照定义，**同构**就是X到$\tilde{X}$上的一个保持结构的对射。

因此，度量空间$X=(X, d)$到度量空间$\tilde{X}=(\tilde{X}, \tilde{d})$的同构$T$是保持距离的一个对射，即对所有的$x$，$y\in X$，有，

$$\tilde{d}(Tx, Ty)=d(x, y)$$

这时称$\tilde{X}$与X同构。与定义1.6-1中引进的等距对射相比，并没有什么新的东西，只不过换了一个名字而已。有所更新的是下述定义。

矢量空间X到同一个域上的另一个矢量空间$\tilde{X}$上的同构T，是保持矢量空间两个代数运算的一个对射；因而，对所有的x，$y\in X$和标量α

$$T(x+y)=Tx+Ty \qquad T(\alpha x)=\alpha Tx$$

也就是，T：$X\to\tilde{X}$为一个对射线性算子。这时说$\tilde{X}$和X是同构的，并把X和$\tilde{X}$称作为**同构的矢量空间**。

对于赋范空间的同构，它除了是矢量空间之间的一个同构外，还要求它保持范数。其详细的研究放在§2.10中。因为在那里要用到这个同构的概念。眼下我们就能够应用矢量空间的同构来研究问题。

可以证明标准映射C是一个内射。由于C是线性的（见前面），所以它是X到$\mathscr{R}(C)\subset X^{**}$上的一个同构。

若X和矢量空间Y的一个子空间同构，则我们说X是**可嵌入**到Y中的。因此，X可嵌入到X^{**}中，而C又叫做X到X^{**}的标准嵌入。

若C是满射（因此是对射），则$\mathscr{R}(C)=X^{**}$，这时称X是**代数自反**的。在下一节我们将证明：若X是有限维的，则X是代数自反的。

涉及到范数及导致赋范空间自反性概念的类似讨论，在有了适当的工具（特别是著名的汉恩-巴拿赫定理）之后再给出（在§4.6中）。

习　题

1. 证明2.8-7和2.8-8中的泛函是线性的。

2. 证明由下式

$$f_1(x)=\int_a^b x(t)y_0(t)dt \qquad (y_0\in C[a, b])$$

$$f_2(x)=\alpha x(a)+\beta x(b) \qquad (\alpha, \beta\text{固定})$$

在$C[a, b]$上定义的泛函都是线性和有界的。

3. $C[-1, 1]$上的线性泛函f定义为

$$f(x)=\int_{-1}^{0} x(t)dt-\int_0^1 x(t)dt$$

求f的范数。

4.证明

$$f_1(x)=\max_{t\in J}x(t) \qquad J=[a,\ b]$$
$$f_2(x)=\min_{t\in J}x(t)$$

在$C[a,\ b]$上定义了两个泛函，它们是线性的吗？有界吗？

5.证明：在任一序列空间X上，都能够用$f(x)=\xi_n$（n固定），其中$x=(\xi_j)$，来定义一个线性泛函。若$X=l^\infty$，问f是有界的吗？

6.（空间$C'[a,\ b]$） 空间$C^1[a,\ b]$或$C'[a,\ b]$是$J=[a,\ b]$上的所有连续可微函数构成的赋范空间，其上的范数定义为

$$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)|+\max_{t\in J}|x'(t)|$$

证明上述定义满足范数公理。证明$f(x)=x'(c)$，$c=(a+b)/2$，在$C'[a,\ b]$上定义了一个有界线性泛函。在把所有连续可微函数的集合视作$C[a,\ b]$的子空间时，上面定义的f不再是有界的，试证明之。

7.若f是复赋范空间上的一个有界线性泛函，问$\bar{f}$是有界的吗？是线性的吗？（$\bar{f}$是f的复共轭。）

8.（零空间）集合$M^*\subset X^*$的零空间$\mathscr{N}(M^*)$定义为

$$\mathscr{N}(M^*)=\{x\in X\mid f(x)=0,\ \forall f\in M^*\}$$

证明$\mathscr{N}(M^*)$是一个矢量空间。

9.设$f\neq 0$是矢量空间X上的任一线性泛函，而x_0是$X-\mathscr{N}(f)$中任一固定的元素，$\mathscr{N}(f)$是f的零空间。证明任一$x\in X$都有唯一的表示$x=\alpha x_0+y$，其中$y\in\mathscr{N}(f)$。

10.证明：在习题9中，两个元素x_1，$x_2\in X$当且仅当$f(x_1)=f(x_2)$时，它们属于商空间$X/\mathscr{N}(f)$的同一个元素；证明$\operatorname{codim}\mathscr{N}(f)=1$（见§2.1习题14）。

11.证明：定义在同一矢量空间上并且有相同零空间的两个线性泛函$f_1\neq 0$和$f_2\neq 0$必定成比例。

12.（超平面）若Y是矢量空间X的子空间并且$\operatorname{codim}Y=1$（见§2.1习题14），则X/Y中的每一个元素都叫做平行于Y的一个超平面。证明：对于X上的任一线性泛函$f\neq 0$，集合

$$H_1=\{x\in X\mid f(x)=1\}$$

是一个平行于f的零空间$\mathscr{N}(f)$的超平面。

13.若Y是矢量空间X的一个子空间，并且f是X上的一个线性泛函，但$f(Y)$不是整个的（X的）标量域。证明：对所有的$y\in Y$有$f(y)=0$。

14.证明赋范空间X上的有界线性泛函$f\neq 0$的范数$\|f\|$在几何上能解释为从原点到超平面$H_1=\{x\in X\mid f(x)=1\}$的距离$\tilde{\delta}=\inf\{\|x\|\mid f(x)=1\}$的倒数。

15.（半空间）设$f\neq 0$是实赋范空间X上的一个有界线性泛函。则对任意标量c，有超平面$H_c=\{x\in X\mid f(x)=c\}$，并且$H_c$可确定两个半空间

$$X_{c1}=\{x\mid f(x)\leqslant c\}\text{和}X_{c2}=\{x\mid f(x)\geqslant c\}$$

证明：闭单位球落在X_{c1}中，其中$c=\|f\|$，但不存在$\varepsilon>0$，使得半空间X_{c1}，其中$c=\|f\|-\varepsilon$，含有该球。

§2.9 有限维空间上的线性算子和泛函

有限维的矢量空间既然比无穷维的矢量空间简单，自然就要问，相对于这些空间上的线性算子和泛函能够作出怎样的简化？这正是要研究的问题。如果搞清了矩阵在研究有限维矢量空间X上的线性算子以及X的代数对偶X^*（§2.8）的结构方面所起到的作用，也就对问题作出了回答。

正象下面阐明的那样，有限维矢量空间上的线性算子可以用距阵来描述。按这一方法，矩阵便成为研究有限维矢量空间上线性算子的最重要的工具。要理解我们目前研究的全部含义，还应该记住定理2.7-8。其详细论述如下。

设X和Y是同一个域上的两个有限维的矢量空间。而T：$X\to Y$是一个线性算子。选定X的一个基$E=\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$和$Y$的一个基$B=\{b_1, b_2, \cdots b_r\}$，这些矢量一旦按一定的次序排定后就不再改变。则每个$x\in X$都有唯一的表示。

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n \tag{1}$$

由于T是线性的，所以x的象为

$$y=Tx=T\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_ke_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\xi_kT(e_k) \tag{2}$$

由于表达式（1）是唯一的，所以我们的第一个结论是：

若n个基矢量$e_1, e_2, \cdots, e_n$的象$y_k=Te_k$给定后，T便唯一地被确定。

因为$y=Tx$，$y_k=Te_k$都属于Y，所以它们也都有唯一的表示

$$y=\sum_{j=1}^{r}\eta_jb_j \tag{3a}$$

$$Te_k=\sum_{j=1}^{r}\tau_{jk}b_j \tag{3b}$$

将式（3）代入式（2）便得

$$y=\sum_{j=1}^{r}\eta_jb_j=\sum_{k=1}^{n}\xi_kTe_k=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\sum_{j=1}^{r}\tau_{jk}b_j=\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{n}\tau_{jk}\xi_k\right)b_j$$

由于$\{b_1, b_2, \cdots, b_r\}$是一个线性无关组，所以在等式两端关于$b_j$的系数应该相同，即

$$\eta_j=\sum_{k=1}^{n}\tau_{jk}\xi_k, \qquad j=1, 2, \cdots, r \tag{4}$$

这就给出下一个结论：

$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_ke_k$的象$y=Tx=\sum_{j=1}^{r}\eta_jb_j$能够从式（4）得到。

注意，式（3b）中对 τ_{jk} 的求和指标 j 不是通常的位置；但为了得到式（4）中求指和标的通常位置，这是必要的。

式（4）中的系数构成一个 r 行 n 列的的矩阵

$$T_{EB}=(\tau_{jk})$$

若X的基E和Y的基B给出，并按某一确定的次序排定后（虽可任意排列，但排定后就不再改变），则矩阵T_{EB}由线性算子T唯一地确定。我们还说矩阵T_{EB}是算子T关于这两个基的**一个表示**。

通过引进列矢量$\tilde{x}=(\xi_k)$及$\tilde{y}=(\eta_j)$，就能将式（4）用矩阵表示

$$\tilde{y}=T_{EB}\tilde{x} \tag{4'}$$

类似地，式（3b）也能写成矩阵形式

$$Te=T_{EB}^{T}b \tag{3b'}$$

其中Te是以Te_1，Te_2，…，Te_n为分量的列矢量（每个Te_k本身也是一个矢量），而b是以b_1，b_2，…，b_r为分量的列矢量。而由于在式（3b）中是关于第一个指标j求和，在式（4）中关于第二个指标k求和，所以我们必须用T_{EB}的转置T_{EB}^{T}。

我们的讨论表明，线性算子T关于给定的基E和基B，有唯一的矩阵表示，其中基E和基B的矢量是按固定的次序排列的。反之，任一r行n列的矩阵关于X和Y给定的基E和基B，都可以确定一个线性算子（也可见2.6-8和2.7-7。）

让我们转到X上的**线性泛函**方面来，这里$\dim X=n$。象前面一样，假定$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是$X$的一个基。在前一节我们已经知道，这些线性泛函构成$X$的代数对偶空间$X^*$。对每个线性泛函$f$和每个$x=\sum\xi_je_j\in X$，都有

$$f(x)=f\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_je_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\xi_jf(e_j)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\alpha_j \tag{5a}$$

其中

$$\alpha_j=f(e_j)\qquad j=1, 2, \cdots, n \tag{5b}$$

并且f由它在X的n个基矢量e_1，e_2，…，e_n上的值α_1，α_2，…，α_n所唯一确定。

反过来，每给定n个标量α_1，α_2，…，α_n，由式（5）可以唯一地确定X上的一个泛函。特别是，若我们把n个标量分别取为

(1, 0, 0, …, 0, 0)

(0, 1, 0, …, 0, 0)

. . . .

(0, 0, 0, …, 0, 1)

根据式（5）便给出n个泛函，我们分别用f_1，f_2，…，f_n记之，它们在基矢量上的取值为

$$f_k(e_j)=\delta_{jk}=\begin{cases}0 & j\neq k\\ 1 & j=k\end{cases} \tag{6}$$

也就是f_k在第k个基矢量上的取值为1，而在其余$n-1$的基矢量上的取值为零。δ_{jk}叫做克罗奈克$delta$。而$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$叫做基$\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$的**对偶基**。通过下面的定理可证明其正确性。

2.9-1定理（X^*的维数） 设X是一个n维的矢量空间，$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$为$X$的一个基。则由式（6）给出的$F=\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$是$X^*$的一个基，且$\dim X=\dim X^*=n$。

证明：先证F是一个线性无关组。为此，设

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k f_k(x)=0 \qquad (x\in X) \tag{7}$$

以$x=e_j$代入，便有

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k f_k(e_j)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\delta_{jk}=\beta_j=0$$

所以式（7）中的β_k皆等于零。再证明每个$f\in X^*$都能够唯一地用F中的元线性表出。如同式（5b），我们记$f(e_j)=\alpha_j$，根据式（5a），对每个$x\in X$，有

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\alpha_j$$

而另一方面，根据式（6）又可得到

$$f_j(x)=f_j(\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n)=\xi_j$$

合在一起，便有

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_jf_j(x)$$

因此X上的任一线性泛函f可用$f_1, f_2, \cdots, f_n$唯一的表示为

$$f=\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\cdots+\alpha_nf_n$$

为了能给出这个定理的一个有趣的应用，首先让我们来证明一个引理（关于任一赋范空间也有一个类似的引理，在4.4-3中给出）。

2.9-2引理（零矢量） 设X是一个有限维的矢量空间。若$x_0\in X$对一切$f\in X^*$都有$f(x_0)=0$，则$x_0=0$

证明：设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是$X$的一个基，并且$x_0=\sum\xi_{0j}e_j$，则式（5）成为

$$f(x_0)=\sum_{j=1}^{n}\xi_{0j}\alpha_j$$

据假设，对每个$f\in X^*$都有$f(x_0)=\sum_{j=1}^{n}\xi_{0j}\alpha_j=0$，也就是对每选定的$n$个标量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$都有$\sum_{j=1}^{n}\xi_{0j}\alpha_j=0$。故根据方程组的理论，所有的$\xi_{0j}$都必定为零。从而证明了$x_0=0$。

利用这个引理，可以得到

2.9-3定理（代数自反性） 每个有限维的矢量空间都是代数自反的。

证明：在前一节研究过的标准映射C：$X\to X^{**}$是线性的。所谓$Cx_0=0$，按照C的定义对每个$f\in X^*$，都有

$$(Cx_0)(f)=g_{x_0}(f)=f(x_0)=0$$

而再根据引理2.9-2。$x_0=0$。因此从定理2.6-10，便推出映射C有逆C^{-1}：$\mathscr{R}(C)\to X$，其中$\mathscr{R}(C)$是C的值域。根据同一个定理还知道$\dim\mathscr{R}(C)=\dim X$。再由定理2.9-1，

$$\dim X^{**}=\dim X^*=\dim X$$

合在一起，便得到$\dim\mathscr{R}(C)=\dim X^{**}$。因为$\mathscr{R}(C)$是一个矢量空间（见2.6-9），并且根据定理2.1-8X^{**}的真子空间的维数是小于$\dim X^{**}$的，所以有$\mathscr{R}(C)=X^{**}$，根据定义，这就证明了代数自反性。

习　题

1.确定由

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所表示的算子T：$\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$的零空间。

2.设T：$\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$由$(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\mapsto(\xi_1, \xi_2, -\xi_1-\xi_2)$定义。求$\mathscr{R}(T)$，$\mathscr{N}(T)$以及表示$T$的矩阵。

3.求$\mathbf{R}^3$的基$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$的对偶基。

4.设$\{f_1, f_2, f_3\}$是$\{e_1, e_2, e_3\}$的对偶基，其中$e_1=(1, 1, 1)$ $e_2=(1, 1, -1)$ $e_3=(1, -1, -1)$是$\mathbf{R}^3$的一个基。求$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，其中$x=(1, 0, 0)$。

5.若f是n维矢量空间X上的线性泛函，试问零空间$\mathscr{N}(f)$的维数会有多少？

6.$f(x)=\xi_1+\xi_2-\xi_3$，其中$x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，是$\mathbf{R}^3$上的一个泛函f。求它的零空间$\mathscr{N}(f)$的一个基。

7.把习题6中的f换成$f(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3$，其中$\alpha_1\neq 0$，求$\mathscr{N}(f)$的一个基。

8.若Z是n维矢量空间X的一个$n-1$维子空间。证明Z是X上某一个线性泛函f的零空间。并且在允许相差一个标量倍数的情况下，f被唯一地确定。

9.设X是所有次数不超过给定的n的实变量的实多项式和多项式$x=0$（它的次数通常不加定义）构成的矢量空间。又设$f(x)=x^{(k)}(a)$，即$x\in X$的k阶（k固定）导数在固定的$a\in\mathbf{R}$上的取值。证明f是X上的一个线性泛函。

10.设Z是n维矢量空间X的一个真子空间，并且设$x_0\in X-Z$。证明在X上有一个线性泛函f，它满足$f(x_0)=1$，并对所有的$x\in Z$有$f(x)=0$。

11.若x和y是有限维矢量空间X中的两个不同的矢量。证明在X上有线性泛函f使得$f(x)\neq f(y)$。

12.若$f_1, f_2, \cdots, f_p$是n维矢量空间X上的线性泛函，其中$p<n$，证明在X中有矢量$x\neq 0$使得$f_1(x)=0$，$f_2(x)=0$，$\cdots$，$f_p(x)=0$。这个结果和线性方程的哪一个结论对

应。

13.（**线性延拓**） 设Z是n维矢量空间X的一个真子空间，而又设f是Z上的一个线性泛函，证明f能够被线性地延拓到X，也就是说，在X上存在线性泛函$\tilde{f}$，使得$\tilde{f}|_Z=f$。

14. 设f是由$f(x)=4\xi_1-3\xi_2$在$\mathbf{R}^2$上定义的泛函，其中$x=(\xi_1,\ \xi_2)$。把$\mathbf{R}^2$看作在$\xi_3=0$时的$\mathbf{R}^3$的子空间。试确定f的从$\mathbf{R}^2$到$\mathbf{R}^3$的所有线性延拓$\tilde{f}$。

15. 设$Z\subset\mathbf{R}^3$是由$\xi_2=0$所表示的子空间，并设Z上的泛函f定义为$f(x)=(\xi_1-\xi_3)/2$。求f的一个到$\mathbf{R}^3$的线性延拓$\tilde{f}$且满足$\tilde{f}(x_0)=k$（给定的常数），其中$x_0=(1,\ 1,\ 1)$。$\tilde{f}$是唯一的吗？

§2.10 算子赋范空间. 对偶空间

在§2.7我们定义了有界线性算子的概念，并举出一些基本例子来说明。读者对这些算子的重要性也有了初步的印象。本节打算是这样：取任意两个（实的或复的）赋范空间X和Y，我们来研究从X到Y的一切有界线性算子的集合$B(X,\ Y)$。也就是$B(X,\ Y)$中的每个算子都是以X为定义域，而值域落在Y中。我们希望证明$B(X,\ Y)$本身也能成为一个赋范空间①。

所有这些都是很简单的。首先，当我们以自然的方式

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x$$

定义两个算子$T_1,\ T_2\in B(X,\ Y)$之和T_1+T_2，以

$$(\alpha T)x=\alpha Tx$$

定义算子$T\in B(X,\ Y)$与标量α的乘积αT时，$B(X,\ Y)$便成为一个矢量空间。若还记得引理2.7-2(*b*)，便立即得到可望的结果。

2.10-1 **定理（空间B(X，Y)）** 从赋范空间X到赋范空间Y的一切有界线性算子构成的矢量空间$B(X,\ Y)$，在定义其上的范数

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in X\\x\neq 0}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{\substack{x\in X\\\|x\|=1}}\|Tx\| \tag{1}$$

后，便成为一个赋范空间。

在什么情况下，$B(X,\ Y)$是一个巴拿赫空间呢？这是一个中心问题，其答案是如下的定理。要记住，这个定理中的条件不涉及X，也就是，X可以是，也可以不是完备的。

2.10-2 **定理（完备性）** 若Y是一个巴拿赫空间，则$B(X,\ Y)$是一个巴拿赫空间。

证明：任取$B(X,\ Y)$中的一个柯西序列(T_n)，我们来证明它收敛到一个算子$T\in B(X,\ Y)$。由于(T_n)是柯西序列，所以对每个$\varepsilon>0$都存在一个N，使得

$$\|T_n-T_m\|<\varepsilon \qquad (m,\ n>N)$$

---

① B(X,Y)中的B是取"bounded"的第一个字母。它还有另外一个记法L(X,Y)，其中L是取"Linear"的第一个字母。两种符号都通用，本书用B(X,Y)。

因此，对所有的$x\in X$和m，$n>N$，有（见§2.7式（3））

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\| \qquad (2)$$

对于任一固定的x和给定的$\tilde{\varepsilon}$，我们可取$\varepsilon=\varepsilon_x$使之满足$\varepsilon_x\|x\|\tilde{\varepsilon}$，则从式（2）便有$\|T_n x - T_m x\|<\tilde{\varepsilon}$。从而看出$(T_n x)$是$Y$中的一个柯西序列。由于$Y$是完备的，所以$(T_n x)$在$Y$中收敛，不妨设$T_n x\to y$。显然，极限$y\in Y$依赖于$x\in X$的选取。这就定义了一个算子$T$：$X\to Y$，其中$y=Tx$。由于

$$\lim T_n(\alpha x+\beta z)=\lim(\alpha T_n x+\beta T_n z)=\alpha\lim T_n x+\beta\lim T_n z$$

所以T是线性的。下面来证明T是有界的并且，$T_n\to T$，即$\|T_n - T\|\to 0$。

由于式（2）对每个$m>N$都成立，并且$T_m x\to Tx$，所以可令$m\to\infty$，再利用范数的连续性，对所有的$x\in X$和每个$n>N$，从式（2）得到

$$\|T_n x - Tx\| = \|T_n x - \lim_{m\to\infty} T_m x\| = \lim_{m\to\infty}\|T_n x - T_m x\| \leqslant \varepsilon\|x\| \qquad (3)$$

这就证明了，当$n>N$时，$(T_n - T)$是有界线算性子。由于T_n是有界的，故$T=T_n-(T_n-T)$也是有界的。即$T\in B(X, Y)$。此外，若式（3）关于所有范数等于1的x取上确界，便得

$$\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon \qquad (n>N)$$

因此有$\|T_n - T\|\to 0$。

这个定理关于X的对偶空间X'，有一个很重要的结论。X'的定义如下：

2.10-3定义（对偶空间X'） 设X是一个赋范空间。则X上的一切有界线性泛函的矢量空间在定义其上的范数

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}|f(x)| \qquad (4)$$

〔见§2.8式（2）〕后，便成为一个赋范空间，称之为X的对偶空间①，记之为X'。

由于X上的线性泛函是映X到**R**或**C**（X的标量域）的，而**R**和**C**按通常的度量又是完备的。所以在$B(X, Y)$中取$Y=$**R**或**C**，便得到X'。因此应用定理2.10-2得到下面的基本定理。

2.10-4定理（对偶空间） 赋范空间X的对偶空间X'总是巴拿赫空间（不管X是否为巴拿赫空间）。

泛函分析的一个基本原则是，经常地把空间和它的对偶空间结合在一起来研究。为此，研究一些经常出现的空间，找出它们的对偶是什么，是很值得去做的工作。在这方面，同构的概念对理解目前的讨论是很有帮助的。回顾一下中§2.8中的讨论，并提出下面的定义。

赋范空间X到赋范空间$\tilde{X}$的一个同构，是一个保持范数不变的对射线性算子T：$X\to\tilde{X}$，也就是对一切$x\in X$，都有

① 另外的名字是对偶，伴随空间和共轭空间。要记住§2.8中X的代数对偶空间X^*，是X上的所有线性泛函构成的矢量空间。

$$\| Tx \| = \| x \|$$

（因此 T 是一个等距）这时称 X 和 $\tilde{X}$ 同构，而 X 和 $\tilde{X}$ 又称为同构的赋范空间。从抽象的观点来看，X 和 $\tilde{X}$ 是等同的。而同构只不过是把元素重新命名而已（每个元素加上了一个标签 T）。

我们所举的第一个例子说明了 $\mathbf{R}^n$ 的对偶空间和 $\mathbf{R}^n$ 同构。可把这个结论简述为：$\mathbf{R}^n$ 的对偶空间是 $\mathbf{R}^n$。其它的例子是类似的。

例子

2.10-5空间 $\mathbf{R}^n$ $\mathbf{R}^n$ 的对偶空间是 $\mathbf{R}^n$。

证明：根据定理2.7-8，有 $\mathbf{R}^{n\prime} = \mathbf{R}^{n*}$，并且对每个 $f \in \mathbf{R}^{n*}$，有一个表示式（5），见§2.9

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \gamma_k \qquad \gamma_k = f(e_k)$$

根据柯西-许瓦兹不等式（见§1.2），有

$$|f(x)| \leqslant \sum |\xi_k \gamma_k| \leqslant (\sum \xi_j^2)^{1/2} (\sum \gamma_k^2)^{1/2} = \| x \| (\sum \gamma_k^2)^{1/2}$$

再关于范数为1的一切 x 取上确界，便得到

$$\| f \| \leqslant (\sum \gamma_k^2)^{1/2}$$

然而，由于取 $x = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ 时柯西-许瓦兹不等式成为等式，事实上我们必定有

$$\| f \| = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 \right)^{1/2}$$

这就证明了 f 的范数是欧几里德范数，并且有 $\| f \| = \| c \|$，其中 $c = (\gamma_k) \in \mathbf{R}^n$。因此用 $f \mapsto c = (\gamma_k)$，$\gamma_k = f(e_k)$，便定义了 $\mathbf{R}^{n\prime}$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个保范映射。又由于它是线性对射，故为一个同构。

2.10-6空间 l^1 l^1 的对偶空间是 l^∞。

证明：l^1 的一个邵德尔基（§2.3）是 (e_k)，其中 $e_k = (\delta_{kj})$ 的第 k 项为1，其余项为零。则每个 $x \in l^1$ 都有唯一的表示

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \tag{5}$$

我们考虑任意的 $f \in l^{1\prime}$，这里 $l^{1\prime}$ 为 l^1 的对偶空间。由于 f 是线性有界的，所以有

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k \qquad \gamma_k = f(e_k) \tag{6}$$

其中数 $\gamma_k = f(e_k)$ 由 f 唯一确定。还有 $\| e_k \| = 1$ 及

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leqslant \| f \| \, \| e_k \| = \| f \|, \quad \sup_k |\gamma_k| \leqslant \| f \| \tag{7}$$

因此 $(\gamma_k) \in l^\infty$。

另一方面，对每个 $b = (\beta_k) \in l^\infty$，我们相应地可以得到一个 l^1 上的有界线性泛函 g。事实上，我们可以在 l^1 上定义 g 如下：

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k$$

其中$x=(\xi_k)\in l^1$，则$g(x)$是线性的，从下式

$$|g(x)| \leqslant \Sigma |\xi_k| \; |\beta_k| \leqslant \sup_j |\beta_j| \; \Sigma |\xi_k| = \|x\| \sup_j |\beta_j|$$

（和式是从1至∞取的）可知g是有界的，故$g\in l^{1\prime}$。

最后，我们证明f的范数就是空间l^∞上的范数。从式（6）我们有

$$|f(x)| = |\Sigma \xi_k \gamma_k| \leqslant \sup_j |\gamma_j| \; \Sigma |\xi_k| = \|x\| \sup_j |\gamma_j|$$

上式再关于所有范数为1的x取上确界，便得

$$\|f\| \leqslant \sup_j |\gamma_j|$$

由此和式（7）可得

$$\|f\| = \sup_j |\gamma_j| \tag{8}$$

而这正是l^∞上的范数。因此这公式可写为$\|f\|=\|c\|_\infty$，其中$c=(\gamma_k)\in l^\infty$。这就证明了由$f\mapsto c=(\gamma_j)$所定义的$l^{1\prime}$到l^∞上的一个线性对射，是一个同构。

2.10-7空间l^p 空间l^p的对偶空间是l^q，这里$1<p<+\infty$，而q是p的共轭指数，即$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。

证明：(e_k)是l^p的一个邵德尔基，其中$e_k=(\delta_{kj})$如前例定义。则每个$x\in l^p$都有唯一的表示

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \tag{9}$$

令$l^{p\prime}$是l^p的对偶空间，考察任意的$f\in l^{p\prime}$。由于f是线性有界的，则有

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k \qquad \gamma_k = f(e_k) \tag{10}$$

令q是p的共轭指数（见1.2-3），并考虑序列$x_n=(\xi_k^{(n)})$，其中

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} |\gamma_k|^q/\gamma_k & k\leqslant n\text{且}\gamma_k\neq 0 \\ 0 & k>n\text{或}\gamma_k=0 \end{cases} \tag{11}$$

将式（11）代入式（10）便得

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} \gamma_k = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q$$

利用式（11）和$(q-1)p=q$，还有

$$\begin{aligned} f(x_n) &\leqslant \|f\| \; \|x_n\| = \|f\| (\Sigma |\xi_k^{(n)}|^p)^{1/p} \\ &= \|f\| (\Sigma |\gamma_k|^{(q-1)p})^{1/p} = \|f\| (\Sigma |\gamma_k|^q)^{1/p} \end{aligned}$$

（和式是从1到n取的）两式比较便有

$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|^q\leqslant\|f\|(\sum|\gamma_k|^q)^{1/p}$$

用$\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|\gamma_k|^q\right)^{1/p}$去除不等式两端，再利用$1-1/p=1/q$，便得到

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|^q\right)^{1-1/p}=\left(\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\|$$

由于上面不等式对任意的n都成立，令$n\to\infty$，便得到

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\| \tag{12}$$

因此$(\gamma_k)\in l^q$。

反之，对任一$b=(\beta_k)\in l^q$，都可相应地得到l^p上的一个有界线性泛函g。事实上，对每个$x=(\xi_k)\in l^p$，可定义g如下：

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\beta_k$$

g是线性的，从§1.2中的赫尔德不等式（10）又可推出g是有界的，因此$g\in l^{p\prime}$。

最后，来证明f的范数就是空间l^q上的范数。从式（10）和赫尔德不等式，我们有

$$|f(x)|=|\sum\xi_k\gamma_k|\leqslant(\sum|\xi_k|^p)^{1/p}(\sum|\gamma_k|^q)^{1/q}=\|x\|(\sum|\gamma_k|^q)^{1/q}$$

（和式是从1到∞取的）因此对所有范数为1的x取上确界，便得到

$$\|f\|\leqslant(\sum|\gamma_k|^q)^{1/q}$$

再与式（12）比较可以看出等号成立，即

$$\|f\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^q\right)^{1/q} \tag{13}$$

这可写成$\|f\|=\|c\|_q$，其中$c=(\gamma_k)\in l^q$，且$\gamma_k=f(e_k)$。由$f\mapsto c$所定义的$l^{p\prime}$到l^q上的一个映射，是线性对射，而式（13）又说明了它是保范的，所以它是一个同构。

上面的和与其类似的例子，它们有什么重要的意义呢？在应用中，对一些实用上很重要的空间来说，知道定义在其上的有界线性泛函的一般形式，常常是非常有用的。在这方面已有很多空间都被研究过了。我们的例子给出了空间$\mathbf{R}^n$，l^1和l^p（$p>1$）上的有界线性泛函的一般表示。对于空间$\mathbf{C}[a,b]$，由于需要另外的工具（特别是所谓的汉恩-巴拿赫定理），将放在后面§4.4中考虑。

此外，回顾在§2.8中讨论过的二次代数对偶空间X^{**}，我们可能会问：研究X的二次对偶$X''=(X')'$究竟有没有价值。回答是肯定的，但我们必须把它推迟到§4.6中讨论。为了得到这方面本质性的结论，在那里还要导出适当的工具。而目前还是让我们转到稍微简单些的内积空间和希尔伯特空间上去，我们将会看到它们是一类特殊的赋范空间，在应用方面也极为重要。

习　题

1. 矢量空间$B(X, Y)$的零元素是什么？按定义2.1-1，算子$T\in B(X, Y)$的逆为何？

2. 课文中所研究过的算子和泛函是定义在整个空间X上的。证明：在泛函的情况下，没有这个假定我们仍有下面的定理。若f和g是定义域落在赋范空间X中的两个有界线性泛函，则对任意非零标量α和β，线性组合$h=\alpha f+\beta g$是一个有界线性泛函，其定义域$\mathscr{D}(h)=\mathscr{D}(f)\cap\mathscr{D}(g)$。

3. 把习题2中的定理推广到有界线性算子T_1和T_2上去。

4. 设X和Y是赋范空间，T_n: $X\to Y$ $(n=1, 2, \cdots)$是有界线性算子。证明收敛性$T_n\to T$意味着：对每个$\varepsilon>0$，都存在一个N，使得对所有的$n>N$和任一给定的闭球中的一切x，都有$\|T_n x-Tx\|<\varepsilon$。

5. 证明2.8-5和2.10-5是一致的。

6. 若X是n元实数序组构成的空间，其元素$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$的范数为$\|x\|=\max\limits_i|\xi_i|$，试问对偶空间$X'$上相应的范数是什么？

7. 相对于n元实数序组构成的空间X，从2.10-6我们能够得到什么结论？

8. 证明空间c_0的对偶空间是l^1（见§2.3习题1）。

9. 证明矢量空间X上的线性泛函f可由它在X的一个哈梅尔（*Hamel*）基上的值唯一地确定（见§2.1）。

10. 设X和$Y\neq\{0\}$是赋范空间，其中$\dim X=\infty$。证明至少存在一个无界线性算子T: $X\to Y$。（利用一个哈梅尔基。）

11. 若X是一个赋范空间且$\dim X=\infty$，证明对偶空间X'和代数对偶空间X^*不是等同的。

12. （**完备性**）课文中的例子能够用来证明一些空间的完备性。如何做？对于什么空间？

13. （**零化子**）设$M\neq\phi$是赋范空间X的任一子集，M的零化子M^a定义为X上所有这样的有界线性泛函的集合，这些泛函在M上处处都是零。因而M^a是X的对偶空间X'的子集。证明M^a是X'的一个线性子空间，并且是闭的。X^a和$\{0\}^a$是什么？

14. 若M是n维赋范空间X的一个m维的子空间，证明M^a是X'的$(n-m)$维的子空间。把它作为关于线性方程组的解的一个定理来描述。

15. 设$M=\{(1, 0, -1), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\}\subset\mathbf{R}^3$，求$M^a$的一个基。

第三章　内积空间，希尔伯特空间

在赋范空间中和初等矢量代数一样，可以对矢量进行相加和与标量相乘的运算。此外，空间上的范数推广了矢量长度的概念。然而，与矢量分析相比，在一般赋范空间中总觉得还缺少一些内容。如果可能的话，我们自然希望在赋范空间也能有类似于矢量点积

$$a \cdot b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

的概念及其所导出的公式，特别是

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$

和正交性（垂直）条件

$$a \cdot b = 0$$

这些概念在很多的应用中都是重要的工具。因此，就要提出这样的问题：点积和正交性究竟能否推广到任意的矢量空间中去？事实上，这是可以做到的，从而导致内积空间和完备的内积空间，亦即希尔伯特空间。

象我们将要看到的那样，内积空间是特殊的赋范空间。在历史上，它比一般赋范空间出现的还早。其理论甚为丰富，并且保存着欧几里德空间的很多特征，其中心概念是正交性。事实上，内积空间可能是欧几里德空间的最为自然的推广。读者将会注意到，在这个领域的概念和证明是多么的和谐、漂亮。整个的理论起源于希尔伯特（1912）关于积分方程的研究。现代所采用的几何记法和术语都和欧几里德几何极为类似，它们是由E·施密特(1908)按照G·柯瓦列夫斯基的建议（在他的论文P56中指出过）所制定的。这些空间至今是泛函分析在实际应用方面最为有用的空间。

本章内容概要

所谓内积空间X(定义 3.1-1）就是一个在其上定义了内积$\langle x, y\rangle$的矢量空间。而内积是三维空间中矢量点积的推广，并且用它定义

（Ⅰ）范数$\|\cdot\|$，即$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$

（Ⅱ）正交性，即$\langle x, y\rangle = 0$

希尔伯特空间H是完备的内积空间。内积空间和希尔伯特空间的理论，比一般的赋范空间和巴拿赫空间要丰富些。区分的特征是

(i) H可表示为一个闭子空间与它的正交补的直和（见3.3-4）。

(ii) 正交集和正交序列，以及H的元素的相应表示（见§3.4，3.5）。

(iii) 有界线性泛函用内积的黎斯表现3.8-1。

(iv) 有界线性算子T的希尔伯特伴随算子T^*（见3.9-1）。

正交集和正交序列只有它们是完全的时候才是真正有意义的（§3.6）。希尔伯特相伴

算子可用来定义好几类算子（自伴算子，酉算子，正规算子；见§3.10），它们在应用方面都有极大的重要性。

§3.1 内积空间，希尔伯特空间

本章所研究的空间定义如下：

3.1-1定义（内积空间，希尔伯特空间） 所谓内积空间（或准希尔伯特空间）就是在其上定义了内积的矢量空间X。而希尔伯特空间就是完备的内积空间（以内积所定义的度量来考察完备性；见后面的式(2)）。这里所指的X上的**内积**，是$X\times X$到X的标量域K的一个映射；也就是说，针对X中的每一对矢量x和y，都有一个标量，记之为

$$\langle x, y\rangle$$

与之对应。这个标量叫做x和y的内积①，并且对所有的矢量x，y，$z\in X$和标量α，都满足

$$\text{(IP1)}\quad \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

$$\text{(IP2)}\quad \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$$

$$\text{(IP3)}\quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$$

$$\text{(IP4)}\quad \langle x, x\rangle \geqslant 0$$

$$\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

X上的内积通过

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (\geqslant 0) \tag{1}$$

和

$$d(x, y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} \tag{2}$$

分别在X上定义了范数和度量。

因此，内积空间是赋范空间，而希尔伯特空间是巴拿赫空间。

在（$IP3$）中，“—”表示复共轭。因而，若X是实矢量空间，则简单地有

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \text{(对称性)}$$

式（1）所定义的范数是满足范数公理（$N1$）至（$N4$）的（见§2.2），其证明在下一节的开始就给出。

从（$IP1$）到（$IP3$）可得到下列公式：

$$\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle \tag{3a}$$

$$\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle \tag{3b}$$

---

① 或标量积，但是必须不要和矢量空间中的"矢量与标量的乘积"混淆。

关于内积的记法〈，〉，是很通用的。在我们所给出的初等教材中，可能有更通俗的记法(，)，这会与序偶（矢量的分量，积空间的元素，二元函数的宗量等）产生混淆。

$$\langle x, \alpha y+\beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle + \bar{\beta}\langle x, z\rangle \tag{3c}$$

这些公式将经常地用到。式（3*a*）表明内积关于第一个因子是线性的。在式（3*c*）中，由于右端有复共轭 $\bar{\alpha}$，$\bar{\beta}$，所以我们又说，内积关于第二个因子是共轭线性的。两者合在一起说成是：内积是"一个半线性的"或"$1\frac{1}{2}$"线性。也就是说把共轭线性看作半线性。这个术语我们将不采用。

读者通过简单而直接的计算，可以证明内积空间上的范数满足重要的**平行四边形等式**

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2) \tag{4}$$

这个名字是根据初等几何提出的。若我们还记得范数是矢量长度这个初等概念的推广（见§2.2），式（4）的几何意义如图23所示。值得注意的是，这样一个方程对于我们目前给出的更一般的情况，仍然是成立的。

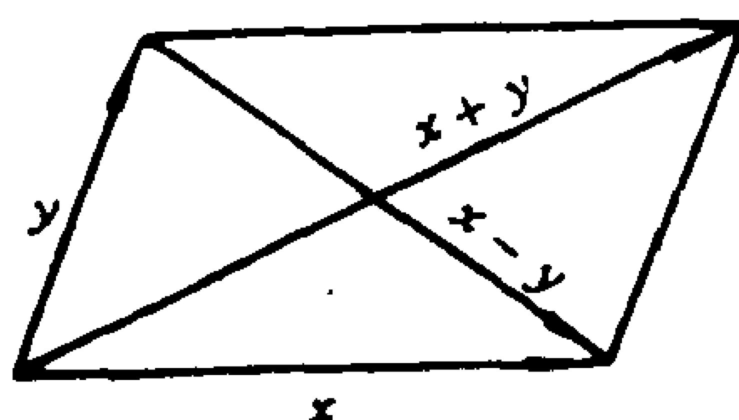


图23　平面中边为x和y的平行四边形

我们可以断定，若一个范数不满足式（4），该范数不能用式（1）通过内积来得到。这样的范数是存在的，后面将给出例子。如果不会误解的话，我们可以这样说：

不是所有的赋范空间都是内积空间。

在研究例子之前，先让我们定义正交性的概念，它是整个理论的基础。我们知道，在三维空间中，若两个矢量的点积等于零，则这两个矢量是正交的，也就是说，它们要末互相垂直，要末至少有一个是零矢量。这就促使我们提出如下定义：

3.1-2定义（正交性）　对于内积空间X中的元素x和y，若有

$$\langle x, y\rangle = 0$$

则称x正交于y，也称为x和y是正交的，记之为$x\perp y$。类似地，对于子集A，$B\subset X$，若对所有的$a\in A$都有$x\perp a$，则记为$x\perp A$；若对所有的$a\in A$和所有的$b\in B$都有$a\perp b$，则记为$A\perp B$。

例　子

3.1-3欧几里德空间$\mathbf{R}^n$　空间$\mathbf{R}^n$是具有内积

$$\langle x, y\rangle = \xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\cdots+\xi_n\eta_n \tag{5}$$

的希尔伯特空间，其中$x=(\xi_j)=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_j)=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$。

事实上，从式（5）可得到

$$\|x\|=\langle x, x\rangle^{1/2}=(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)^{1/2}$$

而由此得到欧几里德度量

$$d(x, y)=\|x-y\|=\langle x-y, x-y\rangle^{1/2}=[(\xi_1-\eta_1)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2]^{1/2}$$

见2.2-2。完备性在1.5-1中证明过。

若$n=3$，式（5）给出了通常的点积

$$\langle x, y\rangle = x\cdot y = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3$$

其中$x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$，而正交性

$$\langle x, y\rangle = x\cdot y = 0$$

也和初等的垂直性概念吻合。

3.1-4酉空间$\mathbf{C}^n$ 2.2-2中所定义的空间$\mathbf{C}^n$是具有内积

$$\langle x, y\rangle = \xi_1\overline{\eta_1} + \xi_2\overline{\eta_2} + \cdots + \xi_n\overline{\eta_n} \tag{6}$$

的希尔伯特空间。

事实上，从式（6）可得到范数

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = (\xi_1\overline{\xi_1} + \xi_2\overline{\xi_2} + \cdots + \xi_n\overline{\xi_n})^{1/2}$$

$$= (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2)^{1/2}$$

在这里我们也看出，在式(6)中为什么我们要取复共轭$\overline{\eta_i}$；这就要限定$\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$，它正是（$IP3$），同时也保证了$\langle x, x\rangle$是实数。

3.1-5空间$L^2[a, b]$ 在例2.2-7中，范数被定义为

$$\|x\| = \left(\int_b^a x^2(t)dt\right)^{1/2}$$

它可以从由

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt \tag{7}$$

所定义的内积得到。

在例 2.2-7 中，为了简单起见，函数被限制为实值函数。而在一些应用方面的研究中，这一限制要去掉，需要考虑复值函数（如前仍保持自变量$t\in[a, b]$是实的），这些函数构成一个复矢量空间。若我们定义内积为

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt \tag{7*}$$

它便成为一个内积空间。这里的“—”仍表示复共轭。它保证（$IP3$）成立，使得$\langle x, x\rangle$是实的。这个性质在考虑范数时也是必需的，范数被定义为

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

这是因为$x(t)\overline{x(t)} = |x(t)|^2$。

对应于式（7）的度量空间的完备化，是实空间$L^2[a, b]$（见2.2-7）。类似地，对应于式（7*）的度量空间的完备化，称为复空间$L^2[a, b]$。在下一节我们将要看到，内积能够被延拓到它的完备化。这就意味着$L^2[a, b]$是一个希尔伯特空间。

3.1-6希尔伯特序列空间l^2 空间l^2（见2.2-3）是具有内积

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\overline{\eta_j} \tag{8}$$

的希尔伯特空间。根据假设$x, y\in l^2$，从§1.2中的柯西-许瓦兹不等式（11）可推出级数

$\Sigma\xi_i\eta_i$是收敛的。还可看出式（8）是式（6）的推广。l^2 的范数被定义为

$$\|x\|=\langle x, x\rangle^{1/2}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2\right)^{1/2}$$

其完备性在1.5-4中已证明过。

l^2 是希尔伯特空间的原型。它是由希尔伯特（1912）在研究积分方程理论时引入的并加以研究。但希尔伯特空间的公理化定义，直到很晚才由J·冯·诺依曼（J·Von $Neumann$（1927））在他关于量子力学的数学基础的一篇论文（pp.15-17）中给出。也可参阅J·冯·诺依曼（1929—1930）pp.63-66 和M·H·斯通（M·H·$Stone$(1932)）pp.3—4。但这个定义包括了可分性的要求，当H·劳维格(H·$Löwig$(1934))，F·瑞勒契(F·$Rellich$（1934））和F·黎斯（F·$Riesz$（1934））关于绝大部分理论证明可分性条件是一个不必要的限制时，便从定义中取消了（这些论文列在附录3之中。）

3.1-7空间l^p 在$p\neq 2$时，l^p不是一个内积空间，当然也不是一个希尔伯特空间。

证明：我们只要证明在$p\neq 2$时，l^p 上的范数不能从一个内积得到就够了。为此，只要证明l^p上的范数不满足平行四边形公式（4）。事实上，当我们取$x=(1, 1, 0, 0, \cdots)$，$y=(1, -1, 0, 0, \cdots)$时，显然x，$y\in l^p$，且可算出

$$\|x\|=\|y\|=2^{1/p},\quad \|x+y\|=\|x-y\|=2$$

很明显若$p\neq 2$时，不满足式（4）的关系。

l^p是完备的（见1.5-4），因此$l^p(p\neq 2)$是一个巴拿赫空间，但不是希尔伯特空间。下例中的空间同样如此。

3.1-8空间C〔a，b〕 空间C〔a，b〕不是一个内积空间，当然也不是一个希尔伯特空间。

证明：我们来证明其上的范数

$$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)| \qquad J=[a, b]$$

不能从一个内积得到，也是通过证明该范数不满足平行四边形公式（4）来达到这一目的。事实上，若取$x(t)=1$，$y(t)=(t-a)/(b-a)$，显然有$\|x\|=\|y\|=1$，并且

$$x(t)+y(t)=1+\frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t)-y(t)=1-\frac{t-a}{b-a}$$

因此，$\|x+y\|=2$, $\|x-y\|=1$，$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5$，但$2(\|x\|^2+\|y\|^2)=4$。这就完成了证明。

最后，我们指出一个有趣的事实。我们知道，一个内积通过式（1）可给出一个相应的范数。值得注意的是，反过来从相应的范数可以重新得到内积。事实上，读者通过直接计算就能够验证，实内积空间有

$$\langle x, y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2) \tag{9}$$

而对于复内积空间有

$$Re\langle x,\ y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$
$$Im\langle x,\ y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2) \tag{10}$$

公式（10）有时又叫做**极化恒等式**。

习　　题

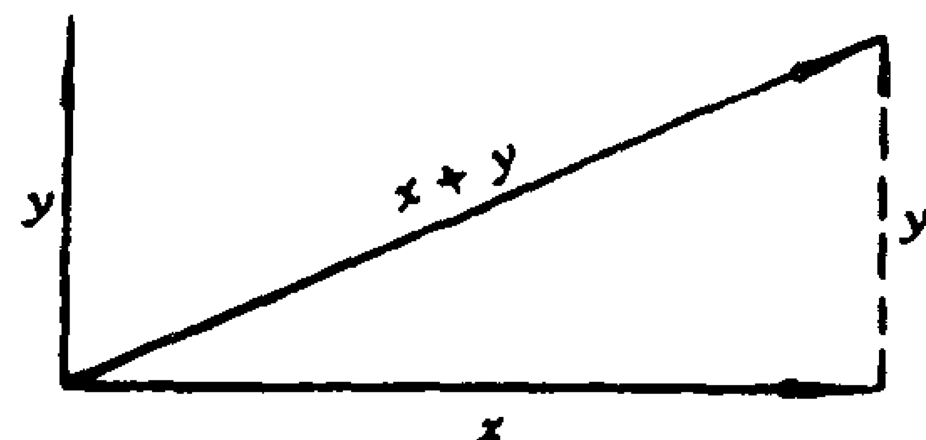


图24　平面中勾股定理的说明

1.证明式（4）。

2.(**毕塔格拉定理，或勾股定理**) 在内积空间X中，若$x\perp y$，证明（图24）。

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$$

把这个公式推广到m个互相正交的矢量。

3.若习题2中的X是实的，反过来从给出的关系推出$x\perp y$。，若X是复空间，证明这种情况可能不成立，给出例子。

4.若内积空间X是实的，证明从条件$\|x\|=\|y\|$可推出$\langle x+y,\ x-y\rangle=0$。若$X=R^2$，在几何上这意味着什么？若$X$是复的，这个条件又蕴含着什么？

5.〔**阿波洛尼厄斯(Applonius)恒等式**〕 通过直接计算来验证：对内积空间中的任意元素，都有

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\|z-\frac{1}{2}(x+y)\|^2$$

证明：从平行四边形公式也能得到这个恒等式。

6.设$x\neq 0$，$y\neq 0$。(a) 若$x\perp y$，证明$\{x,\ y\}$是线性无关组。(b) 把这一结论推广到互相正交的非零矢量$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m$。

7.在内积空间中，若对所有的x都有等式$\langle x,\ u\rangle=\langle x,\ v\rangle$，证明$u=v$。

8.证明式（9）。

9.证明式（10）。

10.令z_1和z_2表示两个复数，证明：在复平面上$\langle z_1,\ z_2\rangle=z_1\bar{z}_2$定义了一个内积，它也给出了通常的度量。在什么条件下可有正交性。

11.设X是所有复数序偶构成的矢量空间，试问：能够从一个内积得到X上的范数

$$\|x\|=|\xi_1|+|\xi_2| \qquad [x=(\xi_1,\ \xi_2)]$$

吗？

12.若$x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)$，3.1-6中的$\|x\|=$？其中($a$) $\xi_n=2^{-n/2}$，(b) $\xi_n=\frac{1}{n}$。

13.验证：对于连续函数，3.1-5中的内积满足($IP1$)至($IP4$)。

14.证明：$C[a,\ b]$上的范数在线性变换$t=\alpha\tau+\beta$之下是不变的。用它去证明3.1-8中的论断，先把$[a,\ b]$映到$[0,\ 1]$上，再考虑函数$\tilde{x}(\tau)=1$及$\tilde{y}(\tau)=\tau$，其中$\tau\in[0,\ 1]$。

15.若X是一个有限维矢量空间，(e_j)是X的一个基，证明：X上的内积完全由$\gamma_{jk}=\langle e_j,\ e_k\rangle$确定。我们能够以完全任意的方式来选取这些$\gamma_{jk}$吗？

§3.2 内积空间的其他性质

首先让我们来验证上一节中的式（1）确实定义了一个范数。

§2.2中的（$N1$）和（$N2$）可以直接从（$IP4$）推出。此外，用（$IP2$）和（$IP3$）可得到（$N3$）。事实上，

$$\|\alpha x\|^2=\langle\alpha x, \alpha x\rangle=\alpha\bar{\alpha}\langle x, x\rangle=|\alpha|^2\|x\|^2$$

最后，（$N4$）的证明包含在下述引理之中。

3.2-1引理（许瓦兹不等式，三角不式等） 内积和相应的范数满足如下的许瓦兹不等式和三角不等式：

（a）我们有

$$|\langle x, y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\| \qquad \text{（许瓦兹不等式）（1）}$$

其中等号当且仅当$\{x, y\}$线性相关时成立。

（b）相应的范数满足

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\| \qquad \text{（三角不等式）（2）}$$

其中等号当且仅当[①] $y=0$或$x=cy$（$c\geqslant 0$）时成立。

证明：（a）若$y=0$，则由于$\langle x, 0\rangle=0$，所以式（1）是成立的。设$y\neq 0$，则对每个标量α都有

$$0\leqslant\|x-\alpha y\|^2=\langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle$$

$$=\langle x, x\rangle-\bar{\alpha}\langle x, y\rangle-\alpha[\langle y, x\rangle-\bar{\alpha}\langle y, y\rangle]$$

可以看出，若选取$\bar{\alpha}=\langle y, x\rangle/\langle y, y\rangle$，上面方括号[…]中的表达式等于零。这时不等式为

$$0\leqslant\langle x, x\rangle-\frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle=\|x\|^2-\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

这里用到了$\langle y, x\rangle=\overline{\langle y, x\rangle}$。用$\|y\|^2$乘上面不等式的两端，再移项开平方，便得到式（1）。

在推导的过程中可以看出，当且仅当$y=0$或$0=\|x-\alpha y\|^2$时等号是成立的，因此有$x-\alpha y=0$，即$x=\alpha y$。这便证明了x与y是线性相关的。

（b）现证式（2）。因为

$$\|x+y\|^2=\langle x+y, x+y\rangle=\|x\|^2+\langle x, y\rangle+\langle y, x\rangle+\|y\|^2$$

根据许瓦兹不等式

$$|\langle x, y\rangle|=|\langle y, x\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|$$

---

① 注意，对于等式这一条件关于x和y正好是对称的，$x=0$包含在$x=cy$（$c=0$时）之中，所以有$y=kx$，$k=1/c$（$c>0$时）。

于是，根据数的三角不等式得

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2+2|\langle x, y\rangle|+\|y\|^2 \leqslant \|x\|^2+2\|x\|\|y\|$$
$$+\|y^2\|=(\|x\|+\|y\|^2)$$

两边同时开平方便得式（2）。

从推导的过程可以看出，当且仅当

$$\langle x, y\rangle+\langle y, x\rangle=2\|x\|\|y\|$$

时等号成立。而上式左端为$2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle$，其中Re表示实部。由此及式（1）便得到

$$\mathrm{Re}\langle x, y\rangle=\|x\|\|y\| \geqslant|\langle x, y\rangle| \tag{3}$$

因为任一复数的实部不可能超过其绝对值，所以必有等式成立。再根据（a）便推出$\{x, y\}$是线性相关组，也就说$y=0$或$x=cy$。最后证c为非负实数。在式（3）中等式成立，即有$\mathrm{Re}\langle x, y\rangle=|\langle x, y\rangle|$。但是，若一个复数的实部等于其绝对值，则这复数的虚部必为零。因此由式（3）知$\langle x, y\rangle=\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \geqslant 0$并且从

$$0 \leqslant\langle x, y\rangle=\langle c y, y\rangle=c\|y\|^2$$

推知$c \geqslant 0$。

许瓦兹不等式（1）是非常重要的，并且在以后的证明中要反复使用。还有另一个常用的性质，即内积的连续性。

3.2-2引理（内积的连续性） 在内积空间中，若$x_n \rightarrow x$，$y_n \rightarrow y$，则$\langle x_n, y_n\rangle \rightarrow\langle x, y\rangle$。

证明：通过添减项的办法，再利用关于数的三角不等式，最后用许瓦兹不等式，便得到

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle-\langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle-\langle x_n, y\rangle+\langle x_n, y\rangle-\langle x, y\rangle| \\
&\leqslant|\langle x_n, y_n-y\rangle|+|\langle x_n-x, y\rangle| \\
&\leqslant\|x_n\|\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\|y\| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

其中用到$n \rightarrow \infty$时$y_n-y \rightarrow 0$，$x_n-x \rightarrow 0$及（x_n）的有界性。

作为这个引理的第一个应用，让我们来证明每个内积空间都能够被完备化。完备化之后是一个希尔伯特空间。若把同构的空间视为一个空间的话，则其完备化空间是唯一的。这里对同构定义如下（和§2.8中所讨论的一样）：

由内积空间X到同一个域上的另一内积空间$\tilde{X}$上的**同构**T，是一个对射线性算子T：$X \rightarrow \tilde{X}$，并且保持内积不变，也就是对所有的x，$y \in X$都有

$$\langle T x, T y\rangle=\langle x, y\rangle$$

为简单起见，我们用同一符号〈，〉表示X与$\tilde{X}$上的内积。这时称$\tilde{X}$和X同构，并且把X和$\tilde{X}$称作为同构的内积空间。注意，对射和线性性保证了T是线性空间X到$\tilde{X}$上的一个同构，所以T保持了内积空间的整个结构。由于X和$\tilde{X}$的度量是由范数定义的，而范数是由内积定义的，所以在保持内积不变的情况下，距离也是保持不变的，从而T也是一个从X到$\tilde{X}$上的

等距算子。

关于内积空间完备化的定理可陈述如下：

3.2-3定理（完备化） 对任意的内积空间X，都存在一个希尔伯特空间H和一个从X到H的一个稠密子空间W上的同构A。若把同构的空间不加区分的话，则H是唯一的。

证明：根据定理2.3-2，存在一个巴拿赫空间H和一个从X到H的稠密子空间W上的等距算子A。由于连续性，在这个等距算子之下，X中两个元素之和及矢量与标量之积，对应于W中两个元素之和矢量与标量之积。所以A也是X到W上的一个同构，这时把X和W都视为赋范空间来考虑的。引理3.2-2表明，我们能够在H上定义如下内积：

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle$$

这里的记法与定理2.3-2（和1.6-2）一样，即(x_n)和(y_n)分别是$\hat{x}\in H$和$\hat{y}\in H$的代表。将§3.1中的式（8）和（10）结合进去考虑，我们看到把X和W视为内积空间，A仍是X到W上的一个同构。

定理2.3-2也保证了在把等距空间视为同一个空间的话，H是唯一的。也就是说X的两个完备化H和$\tilde{H}$由等距算子T：$H\to\tilde{H}$关联在一起。出于和A的情况相同的缘故，可得出T必然是H到$\tilde{H}$上的一个同构。

内积空间X的**子空间**Y，首先要求Y是X的一个线性子空间（见§2.1），然后取X的内积在$Y\times Y$上的限制，Y也是一个内积空间。

类似地，希尔伯特空间H的**子空间**Y，也要求它是一个内积空间。但要注意，Y不必是希尔伯特空间，因为它可以不是完备的。事实上，从定理2.3-1和2.4-2立即可推出下面定理中的（a）和（b）。

3.2-4定理（子空间） 设Y是希尔伯特空间X的一个子空间，则

(a) Y是完备的当且仅当Y在H中是闭的。

(b) 若Y是有限维的，则Y是完备的。

(c) 若H是可分的，则Y也是可分的。更一般地说，可分内积空间的每一子集都是可分的。

(c) 的证明很简单，留给读者证明。

习　题

1. 在$\mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3$中的许瓦兹不等式是什么？在这些特定的情况，给出另一个证明。

2. 给出l^2的子空间的例子。

3. 令X是这样一个内积空间：其元素有多项式$x=0$（见§2.9习题9的注释）和所有次数不超过2的t的实多项式，并把它们看作实变量$t\in[a, b]$的函数。内积的定义与§3.1式（7）一致。证明X是完备的。若Y是X中所有满足$x(a)=0$的x构成的，Y是X的一个子空间吗？X中所有次数等于2的x的集合，能构成X的一个子空间吗？

4. 证明：$y\perp x_n$和$x_n\to x$合在一起蕴含着$x\perp y$。

5. 证明：对于内积空间中的序列(x_n)，条件$\|x_n\|\to\|x\|$和$\langle x_n, x\rangle\to\langle x, x\rangle$蕴含着收敛性$x_n\to x$。

6. 习题5中的论断，就复平面的特殊情况加以证明。

7. 证明：在内积空间中，$x \perp y$ 当且仅当对所有的标量α有$\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|$（见图25）。

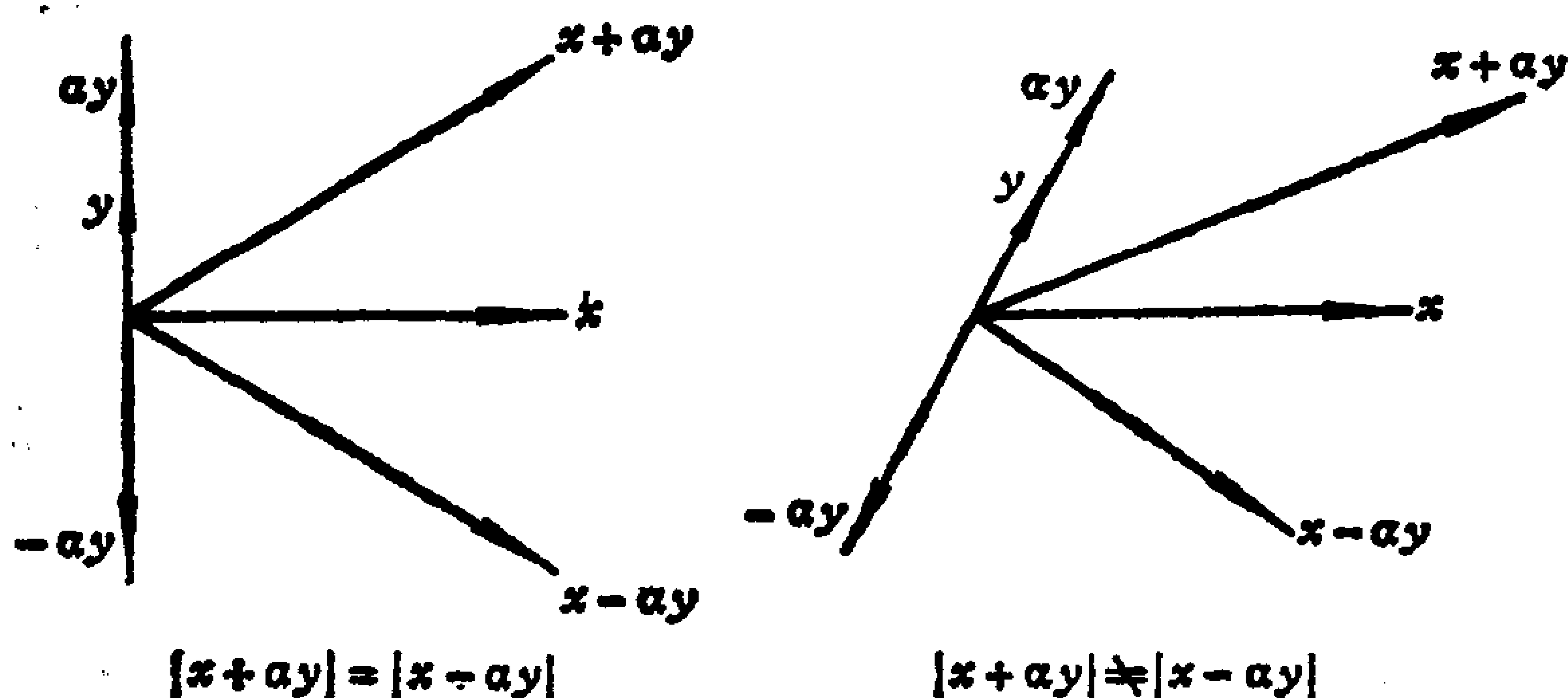


图25 在欧几里德平面R^2中对题习7的说明

8. 证明：在内积空间中，$x \perp y$当且仅当对所有的标量α有$\|x+\alpha y\| \geqslant \|x\|$。

9. 设V是$J=[a,b]$上的所有连续复值函数构成的矢量空间。且令$X_1=(V, \|\cdot\|_\infty)$，其中$\|x\|_\infty=\max\limits_{t\in J}|x(t)|$；$X_2=(V, \|\cdot\|_2)$，其中

$$\|x\|_2=\langle x, x\rangle^{1/2}, \qquad \langle x, y\rangle=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

证明：从X_1到X_2上的恒等映射$x\mapsto x$是连续的。（它不是一个同构。X_2不是完备的。）

10.（**零算子**）设T：$X\to X$是复内积空间X上的有界线性算子。若对所有的$x\in X$都有$\langle Tx, x\rangle=0$，求证$T=0$。

证明：在实内积空间的情况下，上述结论是不成立的。提示：考虑欧几里德平面的旋转。

§3.3 正交补与直和

在度量空间X中，从元素$x\in X$到一个非空子集$M\subset X$的距离δ定义为

$$\delta=\inf_{\tilde{y}\in M} d(x, \tilde{y}) \qquad (M\neq\phi)$$

在赋范空间中，它就变成

$$\delta=\inf_{\tilde{y}\in M}\|x-\tilde{y}\| \qquad (M\neq\phi) \qquad (1)$$

图26是一个用来说明的简单例子。

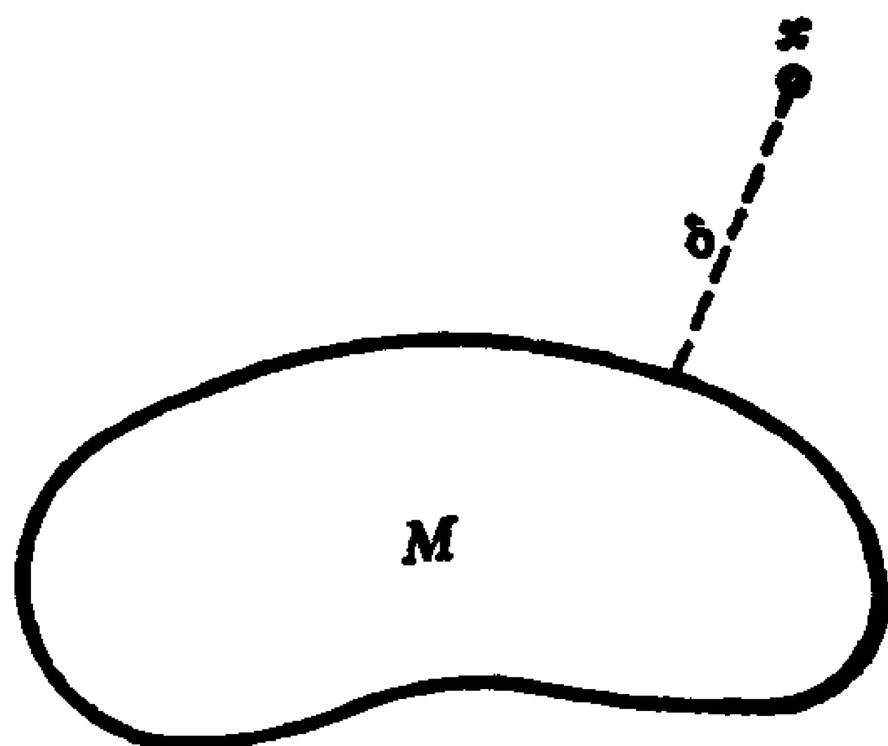


图26 公式(1)在R^2中的说明

我们将会看到，在M中究竟有没有一个y能满足

$$\delta=\|x-y\| \qquad (2)$$

这是一个非常重要的问题。直观上来讲，就是给定$x\in X$，有没有$y\in M$，它是M中最接近x的点。如果有这样

的 $y\in M$ 存在，那么又要问它是否唯一。这便是存在与唯一性问题。在理论研究和实际应用当中，例如在研究函数逼近时，这是一个最根本和最重要的问题。

图27中说明了，甚至在欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 这样一个极为简单的空间中，给定了x及M，可能没有满足式（2）的 y存在，也可能恰好有一个或者更多的满足式（2）的y存 在。可以想象得到，在其它空间，特别是无穷维空间，情况会变得是多么复杂。对于一般的赋范空间，的确是如此（第六章就会看到）。但对于希尔伯特空间，情况要相对的简单。这个事实是令人惊异的，并且有各种理论的和实用的结果。当然，这也是希尔伯特空间的理论为什么比一般巴拿赫空间的理论要简单的主要原因之一。

为了考察希尔伯特空间中的存在与唯一性问题，也为了描述一个关键性的定理(3.3-1)，需要两个互相关联的概念，且有普遍意义。

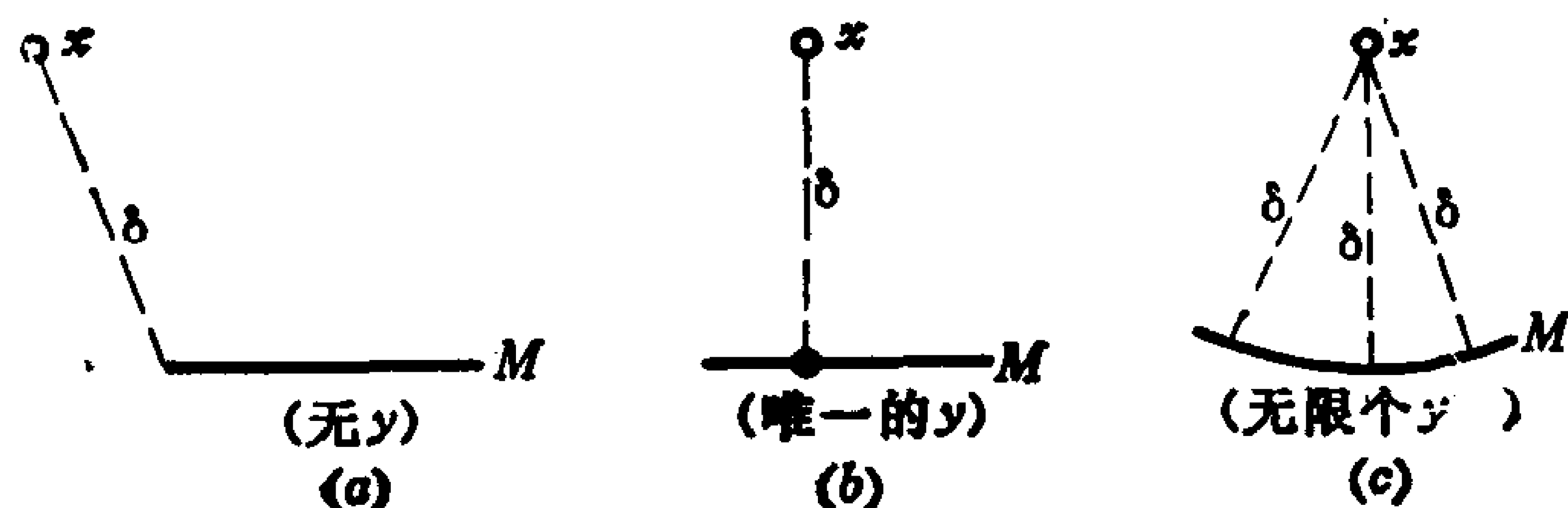


图27　满足式(2)的点$y\in M$的存在与唯一性，这里的$M\subset R^2$是开线段[(a)和(b)]和一个圆弧[(c)]
(a)无y；(b)唯一的y；(c)无限个y.

我们把连接矢量空间X中两点x和 y 的线段定义为所有形如

$$z=\alpha x+(1-\alpha)y \qquad (\alpha\in\mathbf{R},\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

的点集$z\in X$。对于子集$M\subset X$来讲，若对任意x，$y\in M$，联结x，y的线段整个落在M内，则称M是**凸的**。图28是凸集的一个简单例子。

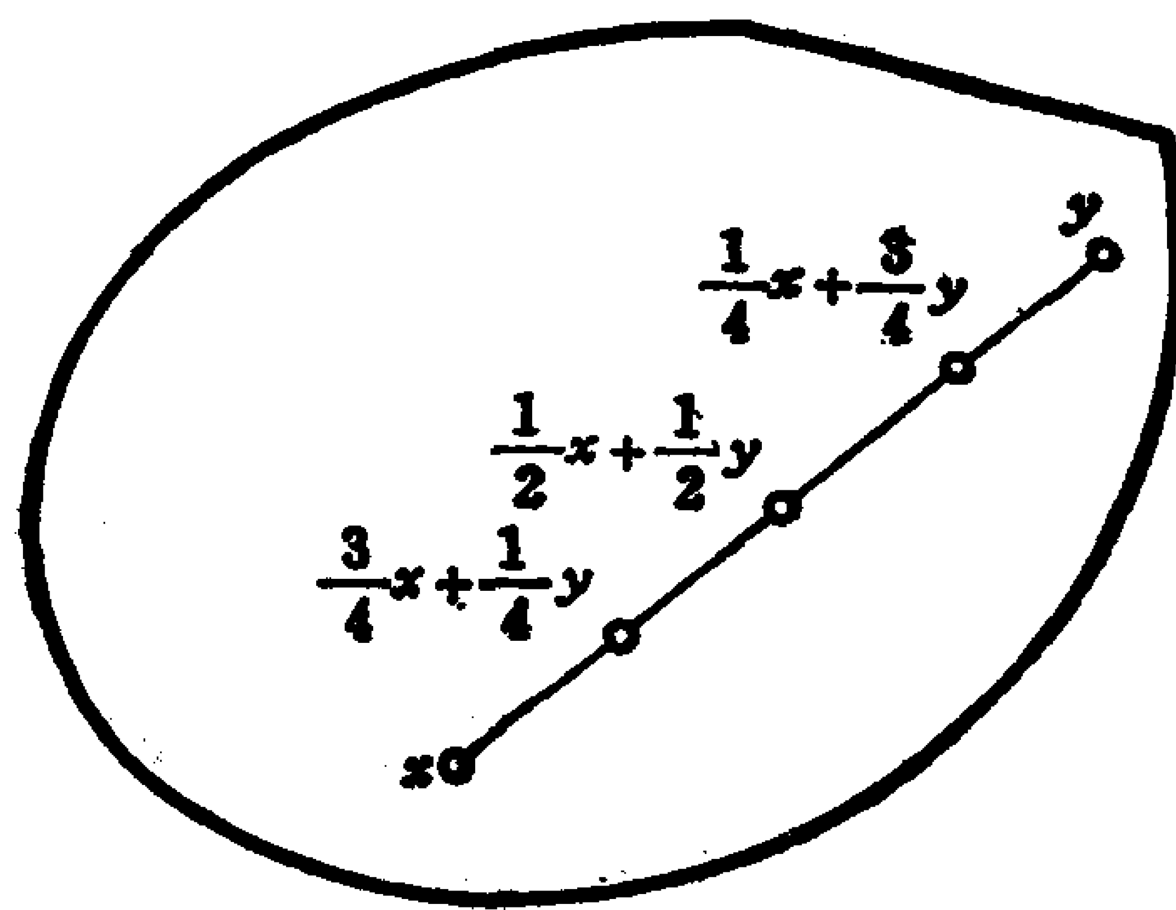


图28　用来说明凸集中线段的例子

例如，X中的每个子空间Y都是凸的，凸集的交也是凸的。

现在我们可以为本节提供一个主要工具。

3.3-1定理（极小化矢量） 设 X 是一个内积空间，$M\neq\phi$ 是一个凸子集并且（在内积诱导的度量之下）是完备的。则对每个$x\in X$，有唯一的$y\in M$满足

$$\delta=\inf_{\tilde{y}\in M}\|x-\tilde{y}\|=\|x-y\| \tag{3}$$

证明：(a) 存在性。由下确界的定义，在M中存在序列 (y_n) 满足

$$\delta_n=\|y_n-x\|\to\delta \tag{4}$$

现在来证 (y_n) 是柯西序列。记$y_n-x=v_n$，则有$\|v_n\|=\delta_n$，并且

$$\|v_n+v_m\|=\|y_n+y_m-2x\|=2\left\|\frac{1}{2}(y_n+y_m)-x\right\|\geqslant 2\delta$$

这是因为M是凸的，故有$\frac{1}{2}(y_n+y_m)\in M$。此外，还有$y_n-y_m=v_n-v_m$。因此根据平行四边形公式

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|^2&=\|v_n-v_m\|^2=-\|v_n+v_m\|^2+2(\|v_n\|^2+\|v_m\|^2)\\&\leqslant-(2\delta)^2+2(\delta_n^2+\delta_m^2)\to 0,\ m,\ n\to\infty\end{aligned}$$

这表明(y_n)是一个柯西序列。又由于M是完备的，所以(y_n)在M中收敛，不妨设$y_n\to y\in M$。由于$y\in M$，故$\|x-y\|\geqslant\delta$，而由式（4）又有

$$\|x-y\|\leqslant\|x-y_n\|+\|y_n-y\|=\delta_n+\|y_n-y\|\to\delta$$

合在一起便证明了$\|x-y\|=\delta$。

(b) 唯一性。我们假定y，$y_0\in M$都满足

$$\|x-y\|=\delta\quad 及\quad \|x-y_0\|=\delta$$

然后证明$y_0=y$。根据平行四边形公式

$$\begin{aligned}\|y-y_0\|^2&=\|(y-x)-(y_0-x)\|^2\\&=2\|y-x\|^2+2\|y_0-x\|^2-\|(y-x)+(y_0-x)\|^2\\&=2\delta^2+2\delta^2-2^2\left\|\frac{y+y_0}{2}-x\right\|^2\end{aligned}$$

在右端由于$\frac{1}{2}(y+y_0)\in M$，故有

$$\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|\geqslant\delta$$

这就意味着$2\delta^2+2\delta^2-4\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|^2\leqslant 0$，从而有$\|y-y_0\|\leqslant 0$，但总有$\|y-y_0\|\geqslant 0$，故必有$\|y-y_0\|=0$，即$y=y_0$。

如果把任意凸集换成子空间，则可以得到这样一个引理，它推广了类似于初等几何中的一个思想：给定的x在子空间Y中的唯一的最近点y，可过x向Y作垂线，而垂足点便是y。

3.3-2引理（正交性） 在定理3.3-1中，设M是一个完备的子空间Y，而$x\in X$给定。则有$z=x-y$正交于Y。

证明：若$z\perp Y$不真，则必有$y_1\in Y$使得

$$\langle z,\ y_1\rangle=\beta\neq 0 \tag{5}$$

显然，$y_1\neq 0$，否则便有$\langle z,\ y_1\rangle=0$。此外，对任意的标量α，都有

$$\begin{aligned}\|z-\alpha y_1\|^2&=\langle z-\alpha y_1,\ z-\alpha y_1\rangle\\&=\langle z,\ z\rangle-\bar{\alpha}\langle z,\ y_1\rangle-\alpha[\langle y_1,\ z\rangle-\bar{\alpha}\langle y_1,\ y_1\rangle]\\&=\langle z,\ z\rangle-\bar{\alpha}\beta-\alpha[\bar{\beta}-\bar{\alpha}\langle y_1,\ y_1\rangle]\end{aligned}$$

若我们选

$$\bar{\alpha}=\bar{\beta}/\langle y_1,\ y_1\rangle$$

则上式右端方括号〔…〕中的表达式为零，从（3）式又有$\|z\|=\|x-y\|=\delta$，所以上式变成

$$\|z-\alpha y_1\|^2=\|z\|^2-|\beta|^2/\langle y_1,\ y_1\rangle<\delta^2$$

但由于

$$z-\alpha y_1=x-y_2 \qquad \text{其中} y_2=y+\alpha y_1\in Y$$

说明了$y_2=y+\alpha y_1$是Y中离x最近的点。这是不可能的，因为与y是唯一的相矛盾。所以式（5）不能成立，引理得证。

我们的目标是要给希尔伯特空间一个特别简单而适用的直和表示，以便利用正交性。为了弄清楚情况和所要研究的问题，首先让我们引进直和的概念。这个概念对任意的矢量空间都适用，其定义如下：

3.3-3定义（直和） 对于矢量空间X和它的两个子空间Y和Z，如果对每个$x\in X$，都有唯一的表达式

$$x=y+z, \qquad y\in Y, \qquad z\in Z$$

则称X为Y与Z的直和，记之为

$$X=Y\oplus Z$$

并且把Z叫做Y在X中的代数补，反之亦然。而Y和Z又称为X中的一对互补子空间。

例如，$Y=\mathbf{R}$是欧氏平面$\mathbf{R}^2$的一个子空间。显然，Y在$\mathbf{R}^2$中有无数多个代数补，其中的每一个都是一条实直线。但是最方便的还是与Y垂直的那一条。我们在选用笛卡尔坐标系时，就是利用了这一事实。在$\mathbf{R}^3$中原理与上述情况相同。

类似地，在一般的希尔伯特空间H中，主要的兴趣是研究H用其闭子空间Y及它的**正交补**

$$Y^{\perp}=\{z\in H|\ z\perp Y\}$$

的直和来表示的问题。$Y^{\perp}$是所有与Y垂直的矢量集合。这就是本节的所谓"投影定理"给出的主要结果。至于为什么把它叫做投影定理，后边的证明阐明了理由。

3.3-4定理（直和） 设Y是希尔伯特空间H的任一闭子空间。则有

$$H=Y\oplus Z,\ \ Z=Y^{\perp} \tag{6}$$

证明：由于H是完备的，Y是闭的，所以根据定理1.4-7知Y是完备的。又由于Y是凸的，则定理3.3-1和引理3.3-2告诉我们，对一个$x\in H$，都有唯一的$y\in Y$满足

$$x=y+z,\ \ z\in Z=Y^{\perp} \tag{7}$$

为了证明表达式（7）的唯一性，假定有

$$x=y+z=y_1+z_1$$

其中y，$y_1\in Y$，z，$z_1\in Z$。则$y-y_1=z_1-z$。由于$y-y_1\in Y$，而$z_1-z\in Z=Y^{\perp}$，所

以$y-y_1\in Y\cap Y^{\perp}=\{0\}$，这表明$y=y_1$，从而也有$z=z_1$。

式（7）中的y叫做x在Y上的**正交投影**（或简称x在Y上的投影）。这个术语来自初等几何。〔例如，我们取$H=\mathbf{R}^2$，将任意点$x=(\xi_1,\ \xi_2)$投影到ξ_1-轴上，则ξ_1-轴扮演了闭子空间Y的角色，这时投影便是$y=(\xi_1,\ 0)$。〕

方程（7）定义了映射

$$P:\ H\to Y$$

$$x\mapsto y=Px$$

P叫做H到Y上的（正交）**投影**（或投影算子）。从图29明显地可以看出，P是一个有界线性算子。P映

H到Y上，

Y到自己上，

$Z=Y^{\perp}$到$\{0\}$上，

并且是**幂等的**，也就是

$$P^2=P$$

因而对每个$x\in H$

$$P^2x=P(Px)=Px$$

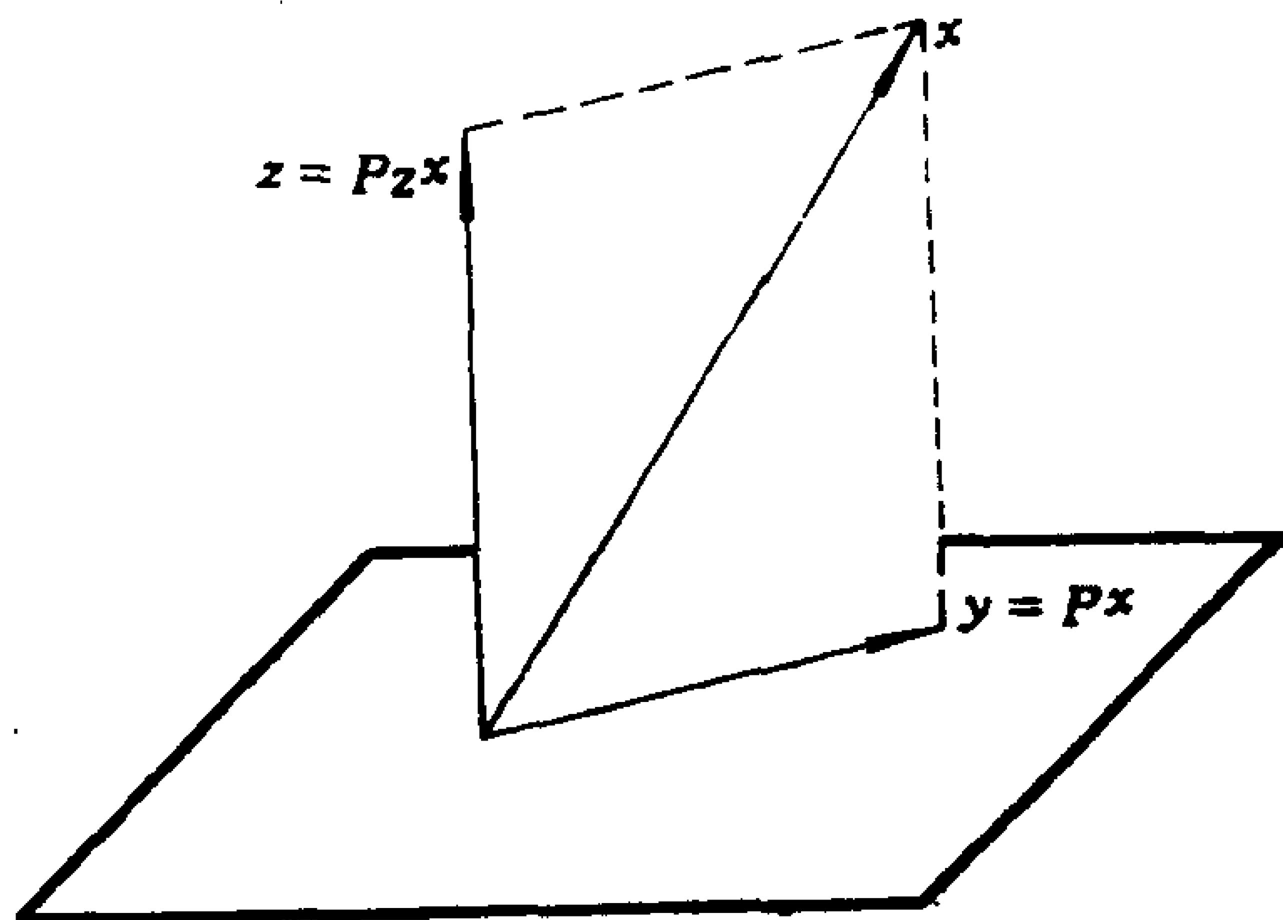


图29　定理3.3-4和公式(9)的说明

因此，$P|_Y$是Y上的恒等算子。而关于$Z=Y^{\perp}$，我们的讨论也给出：

3.3-5引理（零空间）　希尔伯特空间H的闭子空间Y的正交补$Y^{\perp}$，是H到Y上的正交投影P的零空间$\mathscr{N}(P)$。

正交补是一个特殊的零化子。内积空间X中的非空子集M的零化子$M^{\perp}$是如下的集合①

$$M^{\perp}=\{x\in X\mid x\perp M\}$$

因而，$x\in M^{\perp}$当且仅当对每个$v\in M$都有$\langle x,\ v\rangle=0$。这就阐明了其名字的来历。

注意，由于对任意的$x,\ y\in M^{\perp}$及任意标量$\alpha,\ \beta$，关于一切$v\in M$都有

$$\langle\alpha x+\beta y,\ v\rangle=\alpha\langle x,\ v\rangle+\beta\langle y,\ v\rangle=0$$

所以$\alpha x+\beta y\in M^{\perp}$。从而证明$M^{\perp}$是一个矢量空间。

读者自己能够证明（习题8）：$M^{\perp}$是闭的。

$(M^{\perp})^{\perp}$记为$M^{\perp\perp}$。一般地说，有

$$M\subset M^{\perp\perp}\tag{8*}$$

这是因为

$$x\in M\Rightarrow x\perp M^{\perp}\Rightarrow x\in(M^{\perp})^{\perp}$$

① 象我们在后面(§3.8)所要看到的那样，这与§2.10中习题13并不抵触。

但是对于闭子空间，进一步还有

3.3-6引理（闭子空间） 若Y是希尔伯特空间H的闭子空间，则

$$Y = Y^{\perp\perp} \tag{8}$$

证明：由式（8^*）知，$Y \subset Y^{\perp\perp}$，故只需要证明$Y \supset Y^{\perp\perp}$。任取$x \in Y^{\perp\perp}$，则由3.3-4知有$x = y + z$，其中$y \in Y \subset Y^{\perp\perp}$。由于$Y^{\perp\perp}$是一个矢量空间，又假定了$x \in Y^{\perp\perp}$，所以$z = x - y \in Y^{\perp\perp}$，因此$z \perp Y^{\perp}$。但根据3.3-4，$z \in Y^{\perp}$。合在一起便有$z \perp z$，因而$z = 0$。从而证明$x = y$，也就是说$x \in Y$。已知$x$是在$Y^{\perp\perp}$中任取的，故有$Y^{\perp\perp} \subset Y$。

式（8）是我们在课文中总采用闭子空间的一个主要理由。由于$Z^{\perp} = Y^{\perp\perp} = Y$，所以公式（6）也能写为

$$H = Z \oplus Z^{\perp}$$

这样通过$x \mapsto z$可定义一个从H到Z上的投影（图29）

$$P_z:\ H \to Z \tag{9}$$

其性质和前面考察过的P相似。

定理3.3-4几乎推出了在希尔伯特空间H中，怎样的子集所张成的子空间在H中是稠密的，其特征如下：

3.3-7引理（稠密集） H是一个希尔伯特空间，M是H的一个非空子集，则当且仅当$M^{\perp} = \{0\}$时，$\text{span}\{M\}$在H中稠密。

证明：（a）设$x \in M^{\perp}$并且$V = \text{span}\{M\}$在H中稠密。则$x \in \bar{V} = H$。由定理1.4-6（a），在V中存在序列（x_n）使得$x_n \to x$。又由于$x \in M^{\perp}$且$M^{\perp} \perp V$，所以$\langle x_n, x\rangle = 0$。由内积的连续性（见引理3.2-2），有$\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$，合在一起便有$\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$，故有$x = 0$。而由于$x$是从$M^{\perp}$中任取的，所以$M^{\perp} = \{0\}$。

（b）反之，假设$M^{\perp} = \{0\}$，若$x \perp V$便有$x \perp M$，所以$x \in M^{\perp}$，因而$x = 0$。这便推出$V^{\perp} = \{0\}$。注意到V是H的子空间，置$Y = \bar{V}$，由3.3-4便得

$$\bar{V} = H$$

习　题

1.设H是一个希尔伯特空间，$M \subset H$是一个凸子集，（x_n）是M中的序列且满足$\|x_n\| \to d$，其中$d = \inf\limits_{x \in M} \|x\|$。证明（$x_n$）在$H$中收敛。在$\mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3$中举例子说明。

2.证明复空间$\mathbf{C}^n$（见3.1-4）中的子集

$$M = \{y = (\eta_j) \mid \Sigma \eta_j = 1\}$$

是完备的凸集。求M中最小范数的矢量。

3.（a）证明$[-1, 1]$上的所有实值连续函数构成的矢量空间X能表成$[-1, 1]$上的奇连续函数集与偶连续函数集的直和。（b）给出$\mathbf{R}^3$的直和表示的例子：（i）子空间与它的正交补，（ii）任意两个互补的子空间。

4.（a）若X是一个希尔伯特空间，$M \subset X$是一个闭子空间，证明定理3.3-1中的结论也

是成立的。(b) 在定理3.3-1的证明中，如何才能利用阿波洛尼厄斯恒等式(§3.1习题5)。

5.设$X=\mathbf{R}^2$。若M是 (a) $\{x\}$，其中$x=(\xi_1, \xi_2)\neq 0$，(b) 线性无关组$\{x_1, x_2\}\subset X$，求$M^\perp$。

6.证明$Y=\{x \mid x=(\xi_j)\in l^2, \xi_{2n}=0, n\in N\}$是$l^2$的一个闭子空间，并求$Y^\perp$。若$Y=\text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}\subset l^2$，其中$e_j=(\delta_{jk})$，$Y^\perp$是什么？

7.设A和$B\supset A$是内积空间X的两个非空子集，证明

(a) $A\subset A^{\perp\perp}$，(b) $B^\perp\subset A^\perp$，(c) $A^{\perp\perp\perp}=A^\perp$

8.证明：内积空间X中的集合$M\neq\phi$的零化子$M^\perp$是X的闭子空间。

9.证明：希尔伯特空间H的子空间Y在H中是闭的，当且仅当$Y=Y^{\perp\perp}$。

10.若$M\neq\phi$是希尔伯特空间H的任一子集，证明$M^{\perp\perp}$是H中包含M的最小闭子空间，也就是说，$M^{\perp\perp}$包含在任一含有M的闭子空间$Y\subset H$内。

§3.4 标准正交集和标准正交序列

在内积空间和希尔伯特空间中，§3.1中所定义的正交性起着根本的作用，这在上一节已有了初步的印象。而特别有意义的还应是两两互相正交的矢量构成的集合。为了更好地理解，先让我们回顾一下在欧氏空间$\mathbf{R}^3$中相类似的情形。在$\mathbf{R}^3$中的一个笛卡尔直角坐标系的三个坐标轴的正方向上，分别取单位矢量e_1，e_2，e_3，它们构成了$\mathbf{R}^3$的一个基。所以$\mathbf{R}^3$中的每个矢量x都有唯一的表示（见图30）

$$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3$$

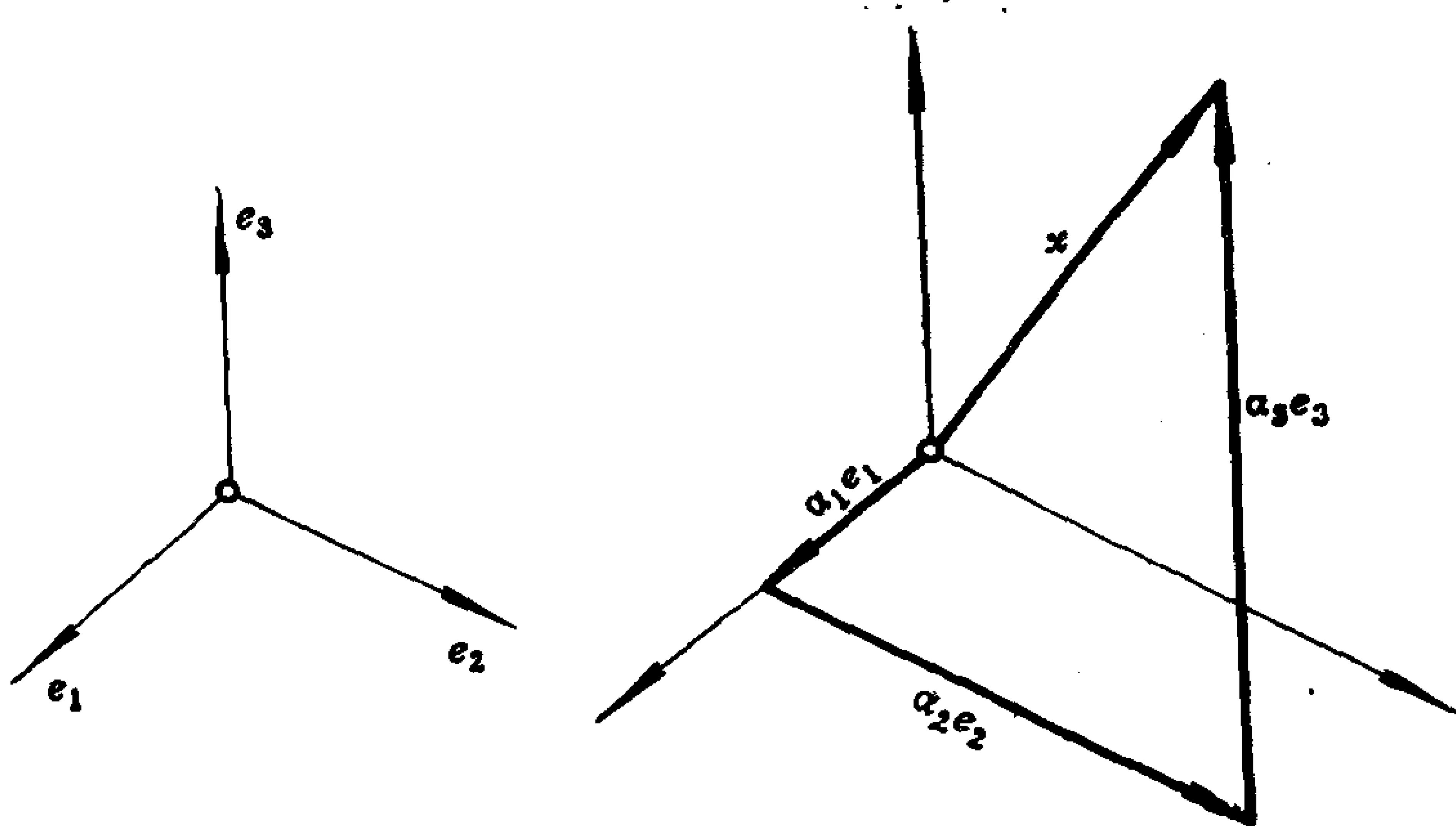


图30 $\mathbf{R}^3$中的标准正交组(e_1, e_2, e_3)和表示式$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3$

现在我们来看正交性的巨大优越性。给定x，通过取内积（点积），便很容易地定出未知系数α_1，α_2，α_3。事实上，要求α_1，只要上式的两端同时与e_1作内积，即

$$\langle x, e_1\rangle=\alpha_1\langle e_1, e_1\rangle+\alpha_2\langle e_2, e_1\rangle+\alpha_3\langle e_3, e_1\rangle=\alpha_1$$

类似地可求出α_2，α_3。在更一般的内积空间中，利用正交集或标准正交集，或正交序列，也将有类似的或另外的可能性，下面将要阐明。事实上，利用这样的正交集或正交序列，可以得到内积空间和希尔伯特空间整个理论中最为核心的内容。为此，让我们先引进几个必要的概念。

3.4-1定义（标准正交集和标准正交序列） 内积空间X中的正交集M是指由两两互相正交的矢量组成的子集$M\subset X$。而标准正交集M，除了要求M是正交集外，还要求M的每个矢量的范数都是1，即对所有的x，$y\in M$，有

$$\langle x,\ y\rangle=\begin{cases}0 & x\neq y\\ 1 & x=y\end{cases}\tag{1}$$

若正交集或标准正交集M是可数的，则可以把它们写成序列的形式(y_n)，这时便把它们叫做正交序列或标准正交序列。

更为一般地，一个带有指标的集或族(x_α)，$\alpha\in I$，若对所有的α，$\beta\in I$且$\alpha\neq\beta$，有$x_\alpha\perp x_\beta$，则称(x_α)是正交的，若所有的x_α的范数都是1，又称(x_α)是标准正交的。所以对所有的α，$\beta\in I$，有

$$\langle x_\alpha,\ x_\beta\rangle=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}0 & \alpha\neq\beta\\ 1 & \alpha=\beta\end{cases}\tag{2}$$

这里的$\delta_{\alpha\beta}$，如同§2.9一样，为克罗奈克符号。

如果读者需要熟悉族及有关的概念，可看附录1中的$A1.3$。读者将会注意到，与我们在定义中给出的概念有密切关系。对X的任何一个子集M，我们总是能找到X的元素的族，其元素的集合就是M。特别是，我们可以用M到X的自然内射，来定义一个族，即把X上的恒等映射$x\longmapsto x$限制在M上来得到。

下面来考察正交集或标准正交集的简单性质及例子。

对于互相正交的元素x，y，有$\langle x,\ y\rangle=0$，所以很容易得到**勾股定理**

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2\tag{3}$$

图31给出了大家熟悉的例子。更一般地，若$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是一个正交组，则

$$\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2\tag{4}$$

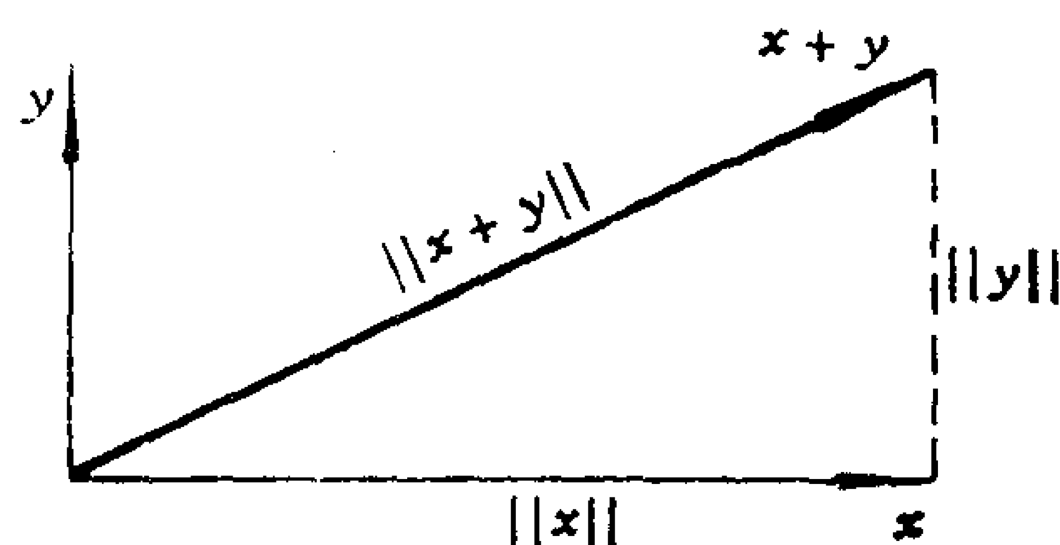


图31 平面R^2上的勾股定理

事实上，若$j\neq k$便有$\langle x_j,\ x_k\rangle=0$，因而

$$\begin{aligned}\|\sum_j x_j\|^2&=\langle\sum_j x_j,\ \sum_k x_k\rangle\\&=\sum_j\sum_k\langle x_j,x_k\rangle=\sum_j\langle x_j,x_j\rangle\\&=\sum_j\|x_j\|^2\end{aligned}$$

（和式是从1到n取的）我们还会注意到有下述结论。

3.4-2引理（线性无关性） 标准正交集是线性无关的。

证明：设$\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$是标准正交的，考虑方程

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n=0$$

用固定的 e_j 与上式两端作内积，便得

$$\langle \sum_k \alpha_k e_k, \ e_j \rangle = \sum_k \alpha_k \langle e_k, \ e_j \rangle = \alpha_j \langle e_j, \ e_j \rangle = \alpha_j = 0$$

这便证明了任意有限的标准正交集是线性无关的。若给定的标准正交集含有无限多个元素，根据§2.1中关于线性无关的定义，也能证明它是线性无关的。

例子

3.4-3欧氏空间$\mathbf{R}^3$ 在空间$\mathbf{R}^3$中，三个单位矢量（1，0，0），（0，1，0），（0，0，1）是垂直坐标系的三个坐标轴正方向上的单位矢量，它们构成了一个标准正交集。见图30。

3.4-4空间l^2 在空间l^2中，(e_n)是一个标准正交序列，其中 $e_n = (\delta_{nj})$，即其第n项是1，其余的项都是零（见3.1-6）。

3.4-5连续函数 设X为定义在$[0, 2\pi]$上的所有实值连续函数构成的内积空间，其内积定义为

$$\langle x, \ y \rangle = \int_a^b x(t) y(t) dt$$

（见3.1-5）。X中的一个正交序列为(u_n)，其中

$$u_n(t) = \cos nt \qquad n = 0, \ 1, \ \cdots$$

另一个正交序列为(v_n)，其中

$$v_n(t) = \sin nt \qquad n = 0, \ 1, \ \cdots$$

事实上，通过积分便能到得

$$\langle u_m, \ u_n \rangle = \int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt \, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n = 1, \ 2, \ \cdots \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases} \tag{5}$$

关于(v_n)有类似的公式。因此，有一个标准正交序列(e_n)，其中

$$e_0(t) = 1/\sqrt{2\pi}, \ e_n(t) = \frac{u_n(t)}{\| u_n \|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt \quad (n = 1, \ 2, \ \cdots)$$

从(v_n)也能得到另一个标准正交序列$(\tilde{e}_n)$，其中

$$\tilde{e}_n(t) = \frac{v_n(t)}{\| v_n \|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt \qquad (n = 1, \ 2, \ \cdots)$$

值得注意的是，对所有的m，n，还有$u_m \perp v_n$。（请自己证明）象下一节我们将要讨论的那样，这些序列出现在傅立叶级数中。下面我们将要做什么，从这些例子已经能初步地体会到。实用上最重要的其他一些标准正交序列将在稍后的一节（§3.7）中研究。

标准正交序列，比一般的线性无关序列更为优越。若我们知道一个给定的矢量能够用标准正交序列的元素线性表出，则通过正交性可以准确而容易地定出组合系数。事实上，若$\{e_1, \ e_2, \ \cdots\}$是内积空间X中的标准正交序列，且有$x \in \operatorname{span}\{e_1, \ e_2, \ \cdots, \ e_n\}$，这里的$n$固定。则按张成的定义（§2.1），有

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \tag{6}$$

若上式两端和固定的 e_j 取内积，便得到

$$\langle x,\ e_j\rangle=\langle\sum_k \alpha_k e_k,\ e_j\rangle=\sum_k \alpha_k\langle e_k,\ e_j\rangle=\alpha_j$$

用这些系数代入式（6），便有

$$x=\sum_{k=1}^{n}\langle x,\ e_k\rangle e_k \tag{7}$$

这表明，要确定式（6）中的未知系数是很简单的。若我们希望在式（6）或式(7)中再添加一项$\alpha_{n+1}e_{n+1}$，即

$$\tilde{x}=x+\alpha_{n+1}e_{n+1}\in\operatorname{span}\{e_1、e_2\cdots,\ e_{n+1}\}$$

则只需再计算一个系数α_{n+1}，而其余的系数保持不变。这就更加明显地看出利用标准正交性的优越性。

更一般地，若我们考虑任一$x\in X$，它不必落在$Y_n=\operatorname{span}\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$中。我们可以通过

$$y=\sum_{k=1}^{n}\langle x,\ e_k\rangle e_k \tag{8a}$$

来定义一个$y\in Y_n$，这里的 n 是固定的。则通过

$$x=y+z \tag{8b}$$

来定义z，即$z=x-y$。我们来证明$z\perp y$。要理解我们到底要做什么，只要注意下面的推导就清楚了。对每个$y\in Y_n$，都有如下的线性组合

$$y=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$$

从前面的讨论知道，其中的$\alpha_k=\langle y,\ e_k\rangle$。我们这里要做的是，对特别选定的$\alpha_k=\langle x,e_k\rangle$ $k=1,\ \cdots,\ n$，可得到满足$z=x-y\perp y$的一个y。

为了证明这一点，首先利用标准正交性，可得

$$\|y\|^2=\langle\sum\langle x,\ e_k\rangle e_k,\ \sum\langle x,\ e_m\rangle e_m\rangle=\sum|\langle x,\ e_k\rangle|^2 \tag{9}$$

再用这个结果便进一步得到

$$\langle z,\ y\rangle=\langle x-y,y\rangle=\langle x,y\rangle-\langle y,y\rangle=\langle x,\sum\langle x,e_k\rangle e_k\rangle-\|y\|^2$$

$$=\sum\langle x,\ e_k\rangle\overline{\langle x,\ e_k\rangle}-\sum|\langle x,\ e_k\rangle|^2=0$$

从而证明了$z\perp y$。根据勾股定理式（8）便有

$$\|x\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2 \tag{10}$$

将式（9）和式（10）合在一起，便得到

$$\|z\|^2=\|x\|^2-\|y\|^2=\|x\|^2-\sum|\langle x,\ e_k\rangle|^2$$

由于$\|z\|^2\geqslant 0$，所以对每个$n=1,\ 2,\ \cdots$，都有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 \tag{12*}$$

这个和式的每一项都是非负的，所以随着 n 的增加构成一个单调递增序列。由于这个序列有上界($\|x\|^2$)，所以是收敛的。也就是说，它是一个收敛的无穷级数的部分和序列。因此式（12*）蕴含着如下的定理。

3.4-6定理（贝塞尔不等式） 设 (e_k) 是内积空间 X 中的一个标准正交序列，则对每个 $x \in X$ 都有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 \qquad \text{（贝塞尔不等式）} \tag{12}$$

公式（12）中的内积 $\langle x, e_k\rangle$ 叫做 x 关于标准正交序列 (e_k) 的**傅立叶系数**。

注意，当 X 是有限维空间时，则 X 中的每个标准正交序列一定包含有限项，因为根据3.4-2正交序列是线性无关的。因此式（12）中是有限和式。

我们已经看到了用标准正交序列研究问题是很方便的。留下来的实际问题是，在给出一个线性无关的序列之后，如何由它得到一个标准正交序列。这要通过一个构造性的过程来完成。这个过程就是所谓的对内积空间的一个线性无关序列 (x_j) 施行**格拉姆-施密特**(*Gram-Schmidt*) 标准正交化的过程。所得到的标准正交序列 (e_j) 有如下性质：对每个 n，

$$\operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots e_n\} = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

其过程如下：

第一步：(e_k) 中的第一个元素 e_1 取为

$$e_1 = x_1 / \|x_1\|$$

第二步：x_2 可被写成

$$x_2 = \langle x_2, e_1\rangle e_1 + v_2$$

则（见图32）

$$v_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$$

不是零矢量，因为 (x_j) 是线性无关的。由于有 $\langle v_2, e_1\rangle = 0$，故 $v_2 \perp e_1$，这时便可取

$$e_2 = v_2 / \|v_2\|$$

第三步：矢量

$$v_3 = x_3 - \langle x_3, e_1\rangle e_1 - \langle x_3, e_2\rangle e_2$$

不是零矢量，并且 $v_3 \perp e_1$，$v_3 \perp e_2$，故我们取

$$e_3 = v_3 / \|v_3\|$$

第 n 步：矢量（见图33）

$$v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k\rangle e_k \tag{13}$$

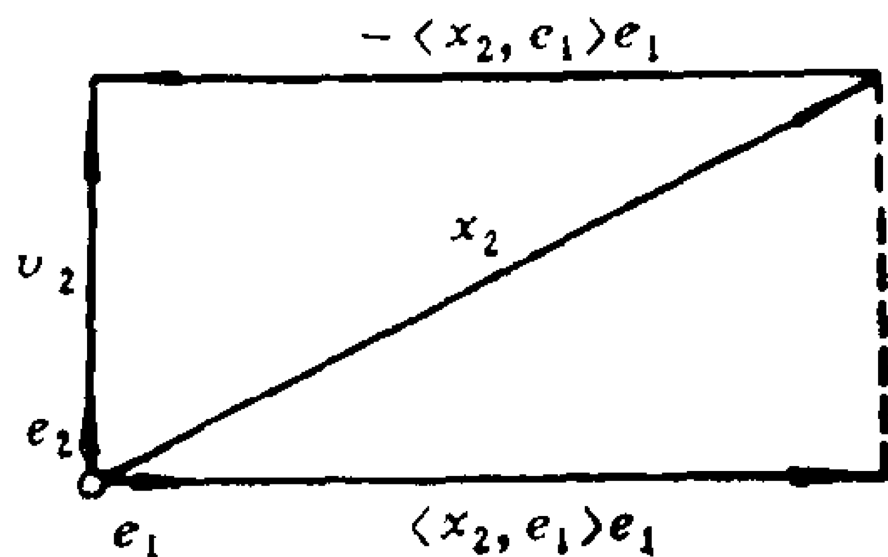


图32　格拉姆-施密特过程的第二步

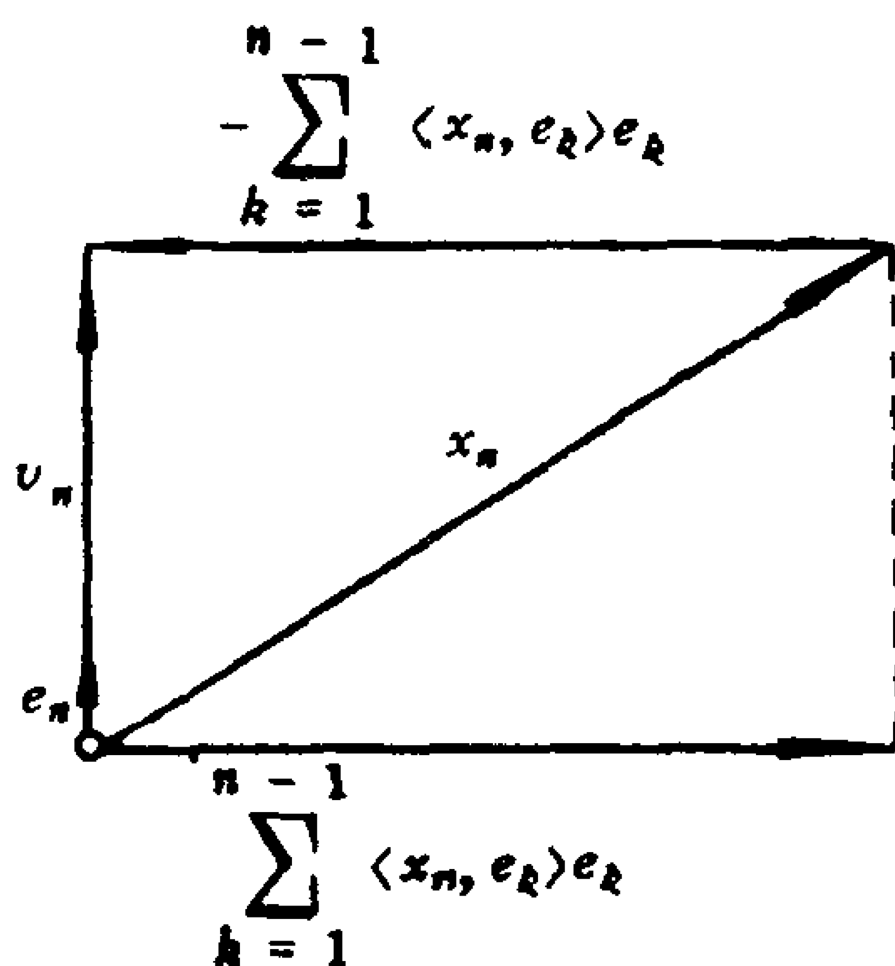


图33　格拉姆-施密特过程的第n步

不是零矢量，而且正交于e_1，e_2，…，e_{n-1}。由它又可得到

$$e_n = v_n / \| v_n \| \tag{14}$$

这些是格拉姆-施密特过程的一般公式，它是由E·施密特（1907）提出的，也可参看J·P·格拉姆（1883）。值得注意的是，在式（13）右端被减去的和式$\sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n, e_k\rangle e_k$是$x_n$在空间span$\{e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}\}$上的正交投影。换句话说，在过程进行的每一步，我们都从x_n减去它在已经求出的各标准正交矢量方向上的分量。这样就得到了v_n，然后再乘上标量$1/\|v_n\|$，便得到范数为1的矢量。对任意的n，v_n都不能是零矢量。事实上，若有一个n，它是使$v_n=0$的最小自然数，则式（13）意味着x_n是e_1，e_2，…，e_{n-1}的线性组合，从而也是x_1，x_2，…，x_{n-1}的线性组合。这便与$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是线性无关的发生了矛盾。

习　题

1.证明：任一有限n维的内积空间都有一个标准正交基$\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$。（无限维的情况将在§3.6中考虑。）

2.在空间$\mathbf{R}^r$中（$r\geqslant n$），从几何上怎样解释式（12*）。

3.从式（12*）推得许瓦兹不等式（§3.2）。

4.给出一个使不等式（12）有严格不等号成立的$x\in l^2$的例子。

5.若（e_k）是内积空间X中的一个标准正交序列，并且$x\in X$，证明在给定

$$y=\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \qquad a_k=\langle x, e_k\rangle$$

后，$x-y\perp Y_n=\text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$

6.（**傅立叶系数的极小性质**）设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是内积空间$X$中的标准正交组，这里的$n$是固定的。又设$x\in X$是任一固定的元素，且$y=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\cdots+\beta_n e_n$。则$\|x-y\|$依赖于$\beta_1$，$\beta_2$，…，$\beta_n$。通过直接计算证明$\|x-y\|$当且仅当$\beta_j=\langle x, e_j\rangle$，$j=1, 2, \cdots, n$时达到最小。

7.设 (e_k) 是内积空间X中的任一标准正交序列。证明对任意的x，$y\in X$，有

$$\sum_{k=1}^{n}|\langle x,\ e_k\rangle\langle y,\ e_k\rangle|\leqslant\|x\|\ \|y\|$$

8.证明内积空间X的元素x 不能有太多的大的傅立叶系数 $\langle x,\ e_k\rangle$，这里的 (e_k) 是给定的标准正交序列；更准确点说，证明使得

$$|\langle x,\ e_k\rangle|>\frac{1}{m}$$

的 $\langle x,\ e_k\rangle$ 的个数n_m，必满足$n_m<m^2\|x\|^2$

9.把序列 $(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ )$ 的前三项标准正交化，其中$x_j(t)=t^j$，$t\in[-1,\ 1]$，内积为

$$\langle x,\ y\rangle=\int_{-1}^{1}x(t)y(t)dt$$

10.设$x_1(t)=t^2$，$x_2(t)=t$，$x_3(t)=1$。按x_1，x_2，x_3的次序和习题9中规定的内积进行标准正交化，并和习题9加以比较、评论。

§3.5 与标准正交序列和标准正交集有关的级数

还有一些事实和问题是与贝塞尔不等式有联系的。本节我们首先从“傅立叶系数”这一术语开始，然后再考虑相对于标准正交序列的无穷级数。最后初步地研究一下不可数的标准正交集。

3.5-1例子（傅立叶级数） 形如

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\tag{1*}$$

的级数叫做三角级数。定义在**R**上的实值函数 x，如果有正数P，使得对所有的$t\in\mathbf{R}$有

$$x(t+p)=x(t)$$

则称之为周期函数，而p叫做x 的一个周期。设x 连续且周期为 2π，则据定义，x 的傅立叶级数就是三角级数 (1*)，其中系数a_k，b_k由欧拉公式给出：

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(t)dt\\
a_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos ktdt\qquad k=1,\ 2,\ \cdots\\
b_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin ktdt\qquad k=1,\ 2,\ \cdots
\end{aligned}\tag{2}$$

这些系数又叫做x的傅立叶系数。

若x的傅立叶级数对每个 t 都收敛且有和$x(t)$，则可写成

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt) \qquad (1)$$

由于x的周期为2π，所以在（2）中的积分区间〔0，2π〕可用长度为2π的任意其他区间代替，例如用〔$-\pi$，π〕。

傅立叶级数首先出现在物理问题的研究中，它最早由贝努利（*D·Bernoulli* 1753研究弦振动）和傅立叶（*J·Fourier*1882 研究热传导）所研究。这些级数使得我们能够用简单的周期函数（正弦函数和余弦函数）来描述复杂的周期现象。在微分方程的研究（振动，热传导，势的问题等）中它们有各种实际应用。

从式（2）可以看到，要确定傅立叶系数需要积分。为了有助于以前没有学过傅立叶级数的读者理解，我们研究一个具体实例（见图34）。

$$x(t)=\begin{cases} t & -\frac{\pi}{2}\leqslant t<\frac{\pi}{2} \\ \pi-t & \frac{\pi}{2}\leqslant t<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

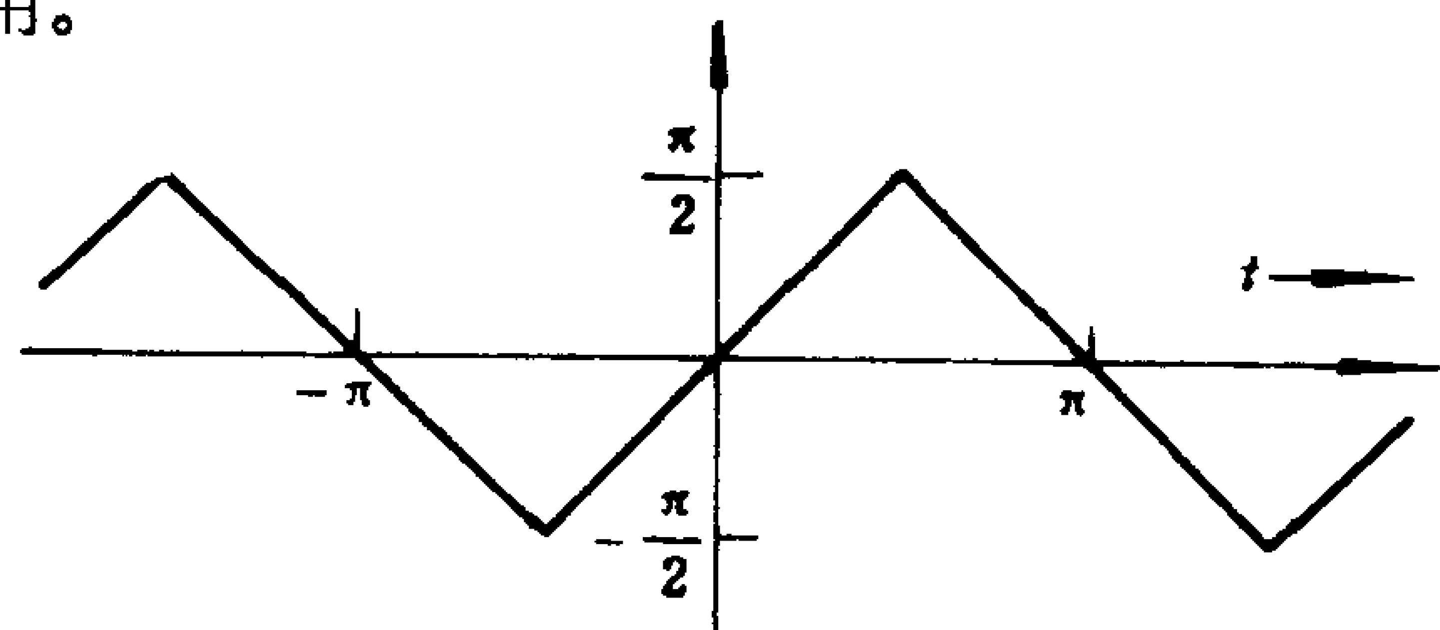


图34 周期函数$x(t)=\begin{cases} t & t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ \pi-t & t\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\end{cases}$的曲线

并且$x(t+2\pi)=x(t)$。由式（2）可得到$a_k=0$，$k=0$，1，…。为计算方便，选〔$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$〕作为积分区间，用分部积分可得

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\sin kt\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\pi-t)\sin kt\,dt \\ &= -\frac{1}{\pi k}[t\cos kt]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\pi k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos kt\,dt \\ &\quad -\frac{1}{\pi k}[(\pi-t)\cos kt]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}-\frac{1}{\pi k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos kt\,dt=\frac{4}{\pi k^2}\sin\frac{k\pi}{2} \\ &\qquad k=1,2,\cdots \end{aligned}$$

因此式（1）取如下形式

$$x(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t-\frac{1}{3^2}\sin 3t+\frac{1}{5^2}\sin 5t-\cdots)$$

读者可以取该级数的前三项之和并作出其函数图形，然后与图34中的$x(t)$进行比较。

回到一般的傅立叶级数上来，我们可能要问，这些级数怎样与我们在上一节引入的术语和公式吻合起来。显然，公式（1）中的正弦函数和余弦函数就是3.4-5中的序列（u_k）和（v_k），即

$$u_k(t)=\cos kt, \qquad v_k(t)=\sin kt$$

因此，我们可把式（1）写成

$$x(t)=a_0u_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}[a_ku_k(t)+b_kv_k(t)] \quad (3)$$

用固定的u_j乘式（3）的两端，再关于t从0到2π取积分，这就意味着取$x(t)$和u_j的内积（如3.4-5中所定义的）。假定允许逐项积分（一致收敛便足够了），并利用(u_k)和(v_k)的正交性，以及对所有的j，k有$u_j\perp v_k$，便可得到

$$\begin{aligned}\langle x, u_j\rangle &= a_0\langle u_0, u_j\rangle+\sum[a_k\langle u_k, u_j\rangle+b_k\langle v_k, u_j\rangle]\\ &= a_j\langle u_j, u_j\rangle\\ &= a_j\|u_j\|^2=\begin{cases}2\pi a_0, & j=0\\ \pi a_j, & j=1, 2, \cdots\end{cases}\end{aligned}$$

参阅§3.4式（5）。类似地，将上述过程中的u_j换成v_j，便得到

$$\langle x, v_j\rangle=b_j\|v_j\|^2=\pi b_j \qquad j=1, 2, \cdots$$

求解a_j和b_j，并利用标准正交序列(e_j)和$(\tilde{e}_j)$，其中$e_j=\|u_j\|^{-1}u_j$，$\tilde{e}_j=\|v_j\|^{-1}v_j$，可得到

$$\begin{aligned}a_j&=\|u_j\|^{-2}\langle x, u_j\rangle=\|u_j\|^{-1}\langle x, e_j\rangle\\ b_j&=\|v_j\|^{-2}\langle x, v_j\rangle=\|v_j\|^{-1}\langle x, \tilde{e}_j\rangle\end{aligned} \quad (4)$$

这和式（2）是等同的。也表明了在式（3）中有

$$a_ku_k(t)=\|u_k\|^{-1}\langle x, e_k\rangle u_k(t)=\langle x, e_k\rangle e_k(t)$$

$$b_kv_k(t)=\langle x, \tilde{e}_k\rangle\tilde{e}_k$$

因而能够把傅立叶级数（1）写成

$$x(t)=\langle x, e_0\rangle e_0+\sum_{k=1}^{\infty}[\langle x, e_k\rangle e_k+\langle x, \tilde{e}_k\rangle\tilde{e}_k] \quad (5)$$

这正和上一节中的傅立叶系数相同。

我们介绍的这个例子的结果，读者可以在*W·Rogosinski*(1959)，*R·V·Churchill*（1963）*pp*.77-112，或*E·Kreyszig*（1972）*pp*.377-407关于傅立叶级数的介绍中找到。

我们的例子涉及到无穷级数，而进一步的问题是，怎样将我们的研究推广到其它的标准正交序列中去，而关于相应级数的收敛性又是如何？

在希尔伯特空间H中给定任一标准正交序列(e_k)，我们可以考虑形如

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_ke_k \quad (6)$$

的级数，其中α_1，α_2，…是任意的标量。如同在§2.3中定义的那样，若存在一个$s\in H$，使得该级数的部分和序列(S_n)：

$$s_n=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n$$

收敛到s，即当$n\to\infty$时有$\|s_n-s\|\to 0$，则称该级数是收敛的，并有和s。

3.5-2定理（收敛性） 设(e_k)是希尔伯特空间H中的一个标准正交序列，则

(a) 级数（6）（按H上的范数）收敛当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2<\infty \tag{7}$$

(b) 若级数（6）收敛，则系数α_k等于傅立叶系数$\langle x, e_k\rangle$，其中x为级数（6）的和；因而在这种情况下能够把式（6）写成

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k \tag{8}$$

(c) 对任意的$x\in H$，级数$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$，都是（按$H$上的范数）收敛的。

证明：(a) 令 $s_n=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n$

$$\sigma_n=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_n|^2$$

由于标准正交性，对任意的m及$n>m$，则有

$$\|s_n-s_m\|^2=\|\alpha_{m+1}e_{m+1}+\cdots+\alpha_ne_n\|^2$$

$$=|\alpha_{m+1}|^2+\cdots+|\alpha_n|^2=\sigma_n-\sigma_m$$

因此，(s_n)是H中的柯西序列当且仅当(σ_n)是**R**中的柯西序列。由于H和R都是完备的，所以定理中的(a)得证。

(b) 取s_n与e_j的内积，并利用标准正交性，便得

$$\langle s_n, e_j\rangle=\alpha_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k \qquad (k\leqslant n\text{且固定})$$

根据假设$s_n\to x$及内积的连续性（见引理3.2-2），有

$$\alpha_j=\langle s_n, e_j\rangle\to\langle x, e_j\rangle \qquad (j\leqslant k)$$

因为当$n\to\infty$时，我们可把$k(\leqslant n)$取得任意大，所以有$\alpha_j=\langle x, e_j\rangle$，$j=1, 2, \cdots$。

(c) 从定理3.4-6中的贝塞尔不等式可以看出

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2<\infty$$

再由(a)知$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$收敛。

若内积空间X中的标准正交集$(e_k)(k\in I)$是不可数的（即指标集I是不可数的），我们仍然能构成一个傅立叶系数$\langle x, e_k\rangle$，其中$x\in X$，$k\in I$。现在我们用§3.4中式（12*），对每个固定的$m=1, 2, , \cdots$，可推出满足$|\langle x, e_k\rangle|>\frac{1}{m}$的傅立叶系数的数目只能有有限多个。这就是下述值得注意的引理。

3.5-3引理（傅立叶系数） 内积空间X中的任一x，相对于X中的一个标准正交族

(e_k)，$k\in I$，至多能够有可数多个非零傅立叶系数 $\langle x, e_k\rangle$。

因此，对任一给定的$x\in H$，我们也有类似于式（8）的级数

$$\sum_{k\in I}\langle x, e_k\rangle e_k \tag{9}$$

并且可按非零的系数 $\langle x, e_k\rangle\neq 0$ 对 (e_k) 进行排列，而得到序列 $(e_1, e_2, \cdots,)$，所以式（9）取形式（8）。从定理3.5-2可推出其收敛性。并且还能证明这个和与 e_k 的排列次序是无关的。

证明：设 (w_m) 是 (e_n) 的一个重新排列，这就意味着存在一个映射 $n\mapsto m(n)$，它是 N 到自身上的一个对射。并且对应于两个序列的项是相同的，即$w_{m(n)}=e_n$。我们置

$$\alpha_n=\langle x, e_n\rangle, \quad \beta_m=\langle x, w_m\rangle$$

和

$$x_1=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n, \qquad x_2=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m w_m$$

则由定理3.5-2(b) 知

$$\alpha_n=\langle x_1, e_n\rangle=\langle x, e_n\rangle$$

$$\beta_m=\langle x_2, w_m\rangle=\langle x, w_m\rangle$$

又由于$e_n=w_{m(n)}$，因而得到

$$\begin{aligned}\langle x_1-x_2, e_n\rangle &= \langle x_1, e_n\rangle-\langle x_2, w_{m(n)}\rangle\\ &=\langle x, e_n\rangle-\langle x, w_{m(n)}\rangle=0\end{aligned}$$

类似地可推出 $\langle x_1-x_2, w_m\rangle=0$，合在一起就推出了

$$\begin{aligned}\|x_1-x_2\|^2 &= \langle x_1-x_2, \Sigma\alpha_n e_n-\Sigma\beta_m w_m\rangle\\ &=\Sigma\bar{\alpha}_n\langle x_1-x_2, e_n\rangle-\Sigma\bar{\beta}_m\langle x_1-x_2, w_m\rangle=0\end{aligned}$$

因此，$x_1-x_2=0$，即$x_1=x_2$。由于取的 (w_m) 为 (e_n) 的任一重新排列，所以完成了证明。

习　题

1.若式（6）收敛到和x，证明式（7）有和$\|x\|^2$。

2.从式（1）和（2）推导有任意周期p的函数$\tilde{x}$（τ的函数）的傅立叶级数表达式。

3.举例说明收敛的级数$\Sigma\langle x, e_k\rangle e_k$其和未必是$x$。

4.若 (x_j) 是内积空间X中使得级数$\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|$收敛的一个序列，证明 (s_n) 是一个柯西序列，其中$s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$。

5.证明：在希尔伯特空间H中，$\Sigma\|x_j\|$的收敛性蕴含着Σx_j的收敛性。

6.设 (e_j) 是希尔伯特空间H中的一个标准正交序列。证明：若

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e_j,\quad y=\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j e_j \qquad 则\ \langle x,\ y\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\bar{\beta}_j$$

是绝对收敛的级数。

7.设 (e_k) 是希尔伯特空间H中的一个标准正交序列。证明对每个$x\in H$，矢量

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,\ e_k\rangle e_k$$

在H中存在并且$x-y$正交于每个e_k。

8.设 (e_k) 是希尔伯特空间H中的一个标准正交序列，并且设 $M=\mathrm{span}(e_k)$ 。证明对任意的$x\in H$，当且仅当x能用式（6）表示（系数$\alpha_k=\langle x,\ e_k\rangle$）才有$x\in\bar{M}$。

9.设 (e_n) 和 $(\tilde{e}_n)$ 是希尔伯特空间H中的标准正交序列，并且设 $M_1=\mathrm{span}\ (e_n)$，$M_2=\mathrm{span}(\tilde{e}_n)$。利用习题8，证明$\bar{M}_1=\bar{M}_2$当且仅当

$$(a)\ e_n=\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{nm}\tilde{e}_m,\quad (b)\ \tilde{e}_n=\sum_{m=1}^{\infty}\bar{\alpha}_{mn}e_m,\quad \alpha_{nm}=\langle e_n,\ \tilde{e}_m\rangle$$

10.做出引理3.5-3的详细证明。

§3.6 完全标准正交集和完全标准正交序列

在内积空间和希尔伯特空间中，真正有意义的标准正交集应是这样的，它包含的元素充分的多，使得空间中的每个元素都能用这些标准正交集表示或有足够精度的逼近。在有限维（n维）空间情况是简单的；所需要的是包含n个元素的标准正交集。而在无穷维空间要处理的问题又是什么？有关的概念如下：

3.6-1定义（完全标准正交集） 赋范空间X中的完全集（或基本集）是这样的一个子集$M\subset X$，其张成的子空间$\mathrm{span}(M)$在X中是稠密的（见1.3-5）。因此，内积空间X中的标准正交集（或序列，或族）如果是X中的完全集，则称为X中的完全标准正交集[①]（或序列，或族）。

M在X中是完全的当且仅当

$$\overline{\mathrm{span}M}=X$$

根据定义，这是明显的。

X中的完全标准正交族有时又叫做X的标准正交基。然而，值得注意的是，把X当作矢量空间在代数意义上它不是一个基，除非X是有限维的。

在每一个希尔伯特空间$H\neq\{0\}$中，都存在一个完全标准正交集。

对于有限维的H，这是很清楚的。对于无限维而又可分的H（见1.3-5），用格拉姆-施

① 单词"total"及"Complete"都有"完全的"意思，我们这里"Complete"只用于定义1.4-3意义下的"完备的"解释，避免两个完全不同的概念采用一个单词。还有些作者把定理3.6-2式(1)所表达的标准正交集M特性的"完全性"也用"Completeness"，本书不采用这一术语。

密特过程再结合归纳法便可证明。对于不可分的H，一个非构造性的证明要通过佐恩引理推出。这个引理在§4.1中为了其它的目的我们要介绍并阐明之。

在一个给定的希尔伯特空间$H \neq \{0\}$中，所有的完全标准正交集都有相同的基数。这个基数叫做H的希尔伯特维数或正交维数（当$H=\{0\}$时，其正交维数定义为零）。

对于有限维的H，情况是很明显的，因为希尔伯特维数就是代数意义上的维数。对于可分的无穷维空间H，结论容易从后面定理3.6-4推出，而对于一般的H，结论的证明需要高级一点的集合论方面的工具；可参阅禾维特（$E \cdot Hewitt$）和斯特龙伯格（$K \cdot Stromberg$）（1969）p.246。

下述定理表明，一个完全标准正交集不能再增添新的元素而成为一个更大的标准正交集。

3.6-2定理（完全性） 设M是内积空间X的一个子集，则

(a) 若M在X中是完全的，则不存在非零矢量$x \in X$，它和M中的每个矢量都正交，即

$$x \perp M \Rightarrow x = 0 \tag{1}$$

(b) 若X是完备的，上述条件对M在X中的完全性来说也是充分的。

证明：(a) 令H是X的完备化（见3.2-3）。则X可看作H的一个稠密子空间。根据假设，M在X中是完全的，所以$\overline{\text{span}(M)}=X$；从而有$\overline{X}=\overline{\text{span}(M)}=H$，这表明$\text{span}(M)$在$H$中是稠密的。从引理3.3-7可推出$M$在$H$中的正交补$M^{\perp}=\{0\}$。进而，若$x \in X$且$x \perp M$，必有$x=0$。

(b) 若X是希尔伯特空间，M满足条件（1），所以$M^{\perp}=\{0\}$，则根据引理3.3-7可推出M在X中是完全的。

在(b)中，X的完备性是根本的。若X不完备，在X中可以不存在完全的标准正交集迪克迈尔（$M \cdot J \cdot Dixmier$）(1953)曾给出一个例子，也可参阅布尔巴赫（$N \cdot Bourbaki$）（1955）p.155。

关于完全性的另一个重要判据可从贝塞尔不等式（见3.4-6）得到。为此，我们来考察希尔伯特空间H中的任一给定的标准正交集M。从引理3.5-3可以知道，每个固定的$x \in H$，至多有可数多个非零的傅立叶系数，所以我们能把这些系数排成一个序列，例如，$\langle x, e_1 \rangle$，$\langle x, e_2 \rangle$，…。而贝塞尔不等式（见3.4-6）为

$$\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 \qquad \textbf{（贝塞尔不等式）} \tag{2}$$

其中左端是一个无穷级数或一个有限和式。取等号便成为

$$\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 \qquad \textbf{（帕塞瓦尔等式）} \tag{3}$$

因而给出了完全性的另一个判据：

3.6-3定理（完全性） 希尔伯特空间H中的一个标准正交集M，当且仅当对所有的$x \in H$，帕塞瓦尔等式（3）都成立（即x相对于M的所有非零傅立叶系数的模方之和等于x的范数之平方），它才在H中是完全的。

证明：(a) 若M在H中不是完全的，则据定理3.6-2，有$x \in H$且$x \neq 0$，使得$x \perp M$。从而对所有的k有$\langle x, e_k \rangle = 0$，这时式（3）的左端$\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 = 0$，而右端$\|x\|^2$

$\neq 0$，这说明式（3）是不成立的。因此证明了：若式（3）对所有的 $x\in H$成立，则M在H中一定是完全的。

（b）反之，假定M在H中是完全的。考察任一$x\in H$及其非零傅立叶系数（见3.5-3）排成的序列 $\langle x, e_1\rangle$，$\langle x, e_2\rangle$，…，若它们只有有限多项时，则按某一确定的次序写出。现在我们定义 y

$$y=\sum_k \langle x, e_k\rangle e_k \tag{4}$$

注意，在无穷级数的情况下，其收敛性由定理3.5-2可以证明。下面证明$x-y\perp M$。对于出现在式（4）中的每个e_j，利用标准正交性，便得

$$\langle x-y, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_k \langle x, e_k\rangle \langle e_k, e_j\rangle$$
$$= \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0$$

而对于每个属于M但不含在式（4）中的v，当然有 $\langle x, v\rangle = 0$，所以

$$\langle x-y, v\rangle = \langle x, v\rangle - \sum_k \langle x, e_k\rangle \langle e_k, v\rangle = 0-0=0$$

因此，$x-y\perp M$，也就是说，$x-y\in M^\perp$。而由于 M 在 H 中是完全的，故根据3.3-7有$M^\perp=\{0\}$。从而有$x-y=0$，即$x=y$。利用式（4）及标准正交性，从

$$\|x\|^2=\left\langle \sum_k\langle x, e_k\rangle e_k, \sum_m \langle x, e_m\rangle e_m\right\rangle = \sum \langle x, e_k\rangle \overline{\langle x, e_k\rangle}$$

便得到式（3）。这就完成了证明。

让我们转到可分的希尔伯特空间。根据定义1.3-5，这个空间有一个可数的稠密子集。由于可分的希尔伯特空间没有不可数的标准正交集，所以比不可分的希尔伯特空间要简单些。

3.6-4定理（可分的希尔伯特空间）设H是一个希尔伯特空间。则

（a）若H是可分的。H中的每一个标准正交集都是可数的。

（b）若H包含一个完全的标准正交序列，则H是可分的。

证明：（a）设H是可分的，B是H中的任一稠密集，而M是任一标准正交集。由于M中任意两个不同的元素x，y，都有

$$\|x-y\|^2=\langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = 2$$

也就是 x，y 之间的距离为$\sqrt{2}$。因此，x和y 的半径为$\sqrt{2}/3$的球形邻域N_x和N_y是互相分离的。由于B在H中稠密，故有b，$\tilde{b}\in B$且$b\in N_x$，$\tilde{b}\in N_y$。因为$N_x\cap N_y=\phi$，所以$b\neq\tilde{b}$。若M是不可数的，则便有不可数个互不相交的球形邻域，而每个这样的邻域又都含有B的点，这样便得到B是不可数的结论。由于B是H中任一稠密子集，所以H中的每个稠密子集都是不可数。从而与H是可分的发生矛盾。因而证明了M必定是可数。

（b）设（e_k）是H中的一个完全标准正交序列，而A是所有形如

$$\gamma_1^{(n)}e_1+\gamma_2^{(n)}e_2+\cdots+\gamma_n^{(n)}e_n \qquad n=1, 2, \cdots$$

的线性组合的集合，其中$\gamma_k^{(n)}=a_k^{(n)}+ib_k^{(n)}$，且$a_k^{(n)}$和$b_k^{(n)}$是有理数（若$H$是实的，则

$b_k^{(n)}=0$）。显然，A是可数的。现在来证明A在H中是稠密的。也就是证明，对每个$x\in H$及$\varepsilon>0$，都存在$v\in A$满足$\|x-v\|<\varepsilon$。

由于(e_k)在H中是完全的，据完全的定义知span$\{e_1, e_2, \cdots\}$在H中稠密。所以对任意给定的$x\in H$及$\varepsilon>0$，都存在一个n，使得在$Y_n=\text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$中有一点，它到$x$的距离小于$\varepsilon/2$。特别是$x$在$Y_n$上的正交投影$y$，更有$\|x-y\|<\varepsilon/2$。而由§3.4式（8）知，

$$y=\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k$$

因此有

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\|<\varepsilon/2$$

由于有理数在**R**中稠密，故对每个$\langle x, e_k\rangle$都有一个$\gamma_k^{(n)}$（它具有有理的实部和虚部），使得

$$\|\sum_{k=1}^{n}[\langle x, e_k\rangle-\gamma_k^{(n)}]e_k\|<\varepsilon/2$$

因此，由下式

$$v=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}e_k$$

定义的$v\in A$，满足

$$\|x-v\|=\|x-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}e_k\|\leqslant\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\|$$

$$+\|\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}e_k\|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

这就证明了A在H中是稠密的，而A又是可数的，所以H是可分的。

为了在应用中使用希尔伯特空间，我们必须知道在特定的情况下选用什么样的完全标准正交集以及如何考察这些集合的元素的性质。对于一些函数空间，这个问题放在下节研究，它包括出现在课文中的有实际意义的特殊函数，并且对它们研究得很详细。作为本节的结束，我们指出目前的讨论还有进一步的结果，这些结果有其根本的重要性，我们能够用希尔伯特空间的同构来描述。为此，首先让我们把§3.2中的概念加以引伸。

同一个域上的希尔伯特空间H到$\tilde{H}$上的**同构**是一个线性对射T：$H\to\tilde{H}$：并且对所有的$x, y\in H$满足

$$\langle Tx, Ty\rangle=\langle x, y\rangle \tag{5}$$

这时把H和$\tilde{H}$叫做同构的希尔伯特空间。由于T是线性的。所以它保持了矢量空间的结构。而式（5）又表明T是等距的。由此和T的对射性可以看出，不论从代数上还是从度量上来看，H与$\tilde{H}$都是没有区别的；除了它们的元素特征外，基本上是相同的。所以基本上可把$\tilde{H}$看作为H，只不过在矢量x上贴上一个标签T而已。也可以把H和$\tilde{H}$当作同一个抽象空间的

两个拷贝（模型），这和我们在 n 维欧氏空间常做的一样。

在上述讨论中有一个耐人寻味的事实是，对于每一个希尔伯特维数（见本节初的定义），恰好有一个抽象的实希尔伯特空间和一个抽象的复希尔伯特空间。换句话说，同一个域上的两个抽象的希尔伯特空间只有在希尔伯特维数上有所差别。这就把欧氏空间的情形作了推广。上述内容概括在下面的定理中。

3.6-5定理（同构和希尔伯特维数） 两个都是实的或都是复的希尔伯特空间H和$\tilde{H}$，当且仅当有相同的希尔伯特维数才是同构的。

证明：(a) 若H与$\tilde{H}$是同构的，T：$H\to\tilde{H}$是一个同构。则式（5）表明，H中的标准正交集在T之下的象是$\tilde{H}$中的标准正交集。由于T是对射，故T映H的每个完全标准正交集到$\tilde{H}$的一个完全标准正交集上，因此H与$\tilde{H}$有相同的希尔伯特维数。

(b) 反之，假定H和$\tilde{H}$有相同的希尔伯特维数。情况$H=\{0\}$和$\tilde{H}=\{0\}$是显然的。现设$H\neq\{0\}$，则$\tilde{H}\neq\{0\}$。并且H中的任一完全标准正交集M和$\tilde{H}$中的任一完全标准正交集$\tilde{M}$都有相同的维数。所以我们能用同一个指标集$\{k\}$来标志它们，并记$M=(e_k)$，$\tilde{M}=(\tilde{e}_k)$。

为了证明H与$\tilde{H}$同构，现在来构造一个H到$\tilde{H}$上的同构。对每个 $x\in H$ 都有

$$x=\sum_k\langle x, e_k\rangle e_k \tag{6}$$

上式右端是有限和或无穷级数（见3.5-3），而且根据贝塞尔不等式有$\sum_k|\langle x, e_k\rangle|^2<\infty$。现定义

$$\tilde{x}=Tx=\sum_k\langle x, e_k\rangle\tilde{e}_k \tag{7}$$

由3.5-2知上式右端级数是收敛的。所以$\tilde{x}\in\tilde{H}$。因为内积关于第一个因子是线性的，所以算子T是线性的。因为先用式（7）再用式（6）可得到

$$\|\tilde{x}\|^2=\|Tx\|^2=\sum_k|\langle x, e_k\rangle|^2=\|x\|^2$$

所以T还是等距的。由该式及§3.1中的式（9）、（10），可以看出T是保持内积不变的的。此外，等距还蕴含着内射性。事实上，若$Tx=Ty$，则

$$\|x-y\|=\|T(x-y)\|=\|Tx-Ty\|=0$$

所以$x=y$，由2.6-10知T是内射。

最后来证明T是满射。在$\tilde{H}$中给定任一

$$\tilde{x}=\sum_k\alpha_k\tilde{e}_k$$

根据贝塞尔不等式有$\sum_k|\alpha_k|^2<\infty$。因此根据3.5-2

$$\sum_k\alpha_k e_k$$

是一个有限和或是收敛到 $x\in H$ 的一个级数。根据同一定理还知 $\alpha_k=\langle x, e_k\rangle$。再根据式（7）便有$\tilde{x}=Tx$。由于$\tilde{x}\in\tilde{H}$是任意的的，这就证明了$T$是满射。

习　题

1. 若F是内积空间X中的一个标准正交基。试问每个 $x\in X$ 都能用F的元素的线性组合表出吗？（据定义，线性组合是有限多项构成的。）

2. 证明：若希尔伯特空间H的正交维数是有限的，则它等于H作为矢量空间的维数。反之，若H作为矢量空间其维数有限，证明它们也是相等的。

3. 在n维欧几里德空间的情况下，式（3）可作为初等几何中什么定理的推广。

4. 从式（3）推导下面的公式（常常叫做帕塞瓦尔关系）：

$$\langle x,\ y\rangle=\sum_k\langle x,\ e_k\rangle\overline{\langle y,\ e_k\rangle}$$

5. 证明：希尔伯特空间H中的标准正交族(e_k)，$k\in I$，当且仅当对每两个x，$y\in H$都有习题4中的帕塞瓦尔关系成立，它才是完全的。

6. 设H是可分的希尔伯特空间，而M是H的一个可数稠密子集。证明通过对M施行格拉姆-施密特过程可得到H的一个完全标准正交序列。

7. 证明：若希尔伯特空间是可分的，H的完全标准正交集的存在性不用佐恩引理也能证明。

8. 证明：对于可分的希尔伯特空间H中的任一标准正交序列F，一定存在一个包含F的完全标准正交序列$\tilde{F}$。

9. 设M是内积空间X的一个完全集。若对所有的$x\in M$都有 $\langle v,\ x\rangle=\langle w,\ x\rangle$，证明$v=w$。

10. 设M是希尔伯特空间H的一个子集，而且v，$w\in H$。假定对一切$x\in M$，$\langle v,\ x\rangle=\langle w,\ x\rangle$蕴含着$v=w$。若对所有的$v$，$w\in H$上述假定都成立，证明$M$在$H$中是完全的。

§3.7　勒让德、埃尔米特、拉盖尔多项式

希尔伯特空间的理论已被应用到分析的各个专题中。本节讨论一些经常用来研究实际问题的完全正交和完全标准正交的序列，(例如，在十一章关于量子力学的研究中将会用到。）这些序列的性质都已被很详细的研究过，标准的参考读物有列在附录3中的 *A·Erdelyi* (1953-55) 等等。

3.7-1 勒让德多项式　定义在$[-1,\ 1]$上的所有实值连续函数构成的空间X，在其上定义内积

$$\langle x,\ y\rangle=\int_{-1}^{1}x(t)y(t)dt$$

按照定理3.2-3完备化后成为一个希尔伯特空间，见例3.1-5，记之为$L^2[-1,\ 1]$。

我们希望在$L^2[-1,\ 1]$中得到一个由易于处理的函数系所构成的完全标准正交序列(e_n)。多项式是这样的类型，它可用一个很简单的思想来造出。从幂函数x_0，x_1，…出发，其中

$$x_0(t)=1,\ x_1(t)=t,\ x_j(t)=t^j,\ \cdots t\in[-1,\ 1]\qquad(1)$$

这个序列是线性无关的（自己证明）。施行格拉姆-施密特过程（§3.4）可得到一个标准正交序列 (e_n)。由于在正交化过程中，我们取的是 (x_j) 的线性组合，所以每个 e_n 都是一个多项式，将会看到 e_n 的次数是 n。

(e_n) 在 $L^2[-1, 1]$ 中是完全的。

证明：根据定理3.2-3，集合 $W = A(X)$ 在空间 $L^2[-1, 1]$ 中是稠密的。因此，对任一固定的 $x \in L^2[-1, 1]$ 和给定的 $\varepsilon > 0$，都有一个定义在 $[-1, 1]$ 上的连续函数 y 满足

$$\| x - y \| < \varepsilon/2$$

对于这个 y，有多项式 z 对所有的 $t \in [-1, 1]$ 满足

$$|y(t) - z(t)| < \varepsilon/2\sqrt{2}$$

这一点可从§4.11证明的维尔斯特拉斯定理得到保证。而这意味着

$$\| y - z \|^2 = \int_{-1}^{1} |y(t) - z(t)|^2 dt < 2\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{4}$$

再用三角不等式便得

$$\| x - z \| \leqslant \| x - y \| + \| y - z \| < \varepsilon$$

格拉姆-施密特过程表明，根据式（1）对某一充分大的 m，$z \in \text{span}\{e_0, e_1, \cdots, e_m\}$。由于 $x \in L^2[-1, 1]$ 和 $\varepsilon > 0$ 是任意的，所以证明了 (e_n) 的完全性。

为实用上的方便，我们需要一个显式，这就要求

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t) \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{2a}$$

其中

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}[(t^2 - 1)^n] \tag{2b}$$

P_n 叫做 n 阶的勒让德多项式。公式（2b）叫做罗德里戈（*Rodrigue*）公式。式（2a）中方根使得 $P_n(1) = 1$。这个性质我们不予证明，因为后面的研究不用它。

对 $(t^2 - 1)^n$ 用二项式定理展开，再进行 n 次微分，由式（2b）便得到

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{(2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} t^{n-2j} \tag{2c}$$

其中，若 n 是偶数，$N = \frac{n}{2}$，若 n 是奇数，$N = \frac{n-1}{2}$。因此（图35）有

$$P_0(t) = 1, \qquad P_1(t) = t$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \qquad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \tag{2*}$$

$$P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) \qquad P_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t)$$

等等。

式（2a）和（2b）的证明，分两部分进行。

(a)：先证明可从（2b）推出

$$\| P_n \| = \left[\int_{-1}^{1} P_n^2(t)dt\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \qquad (3)$$

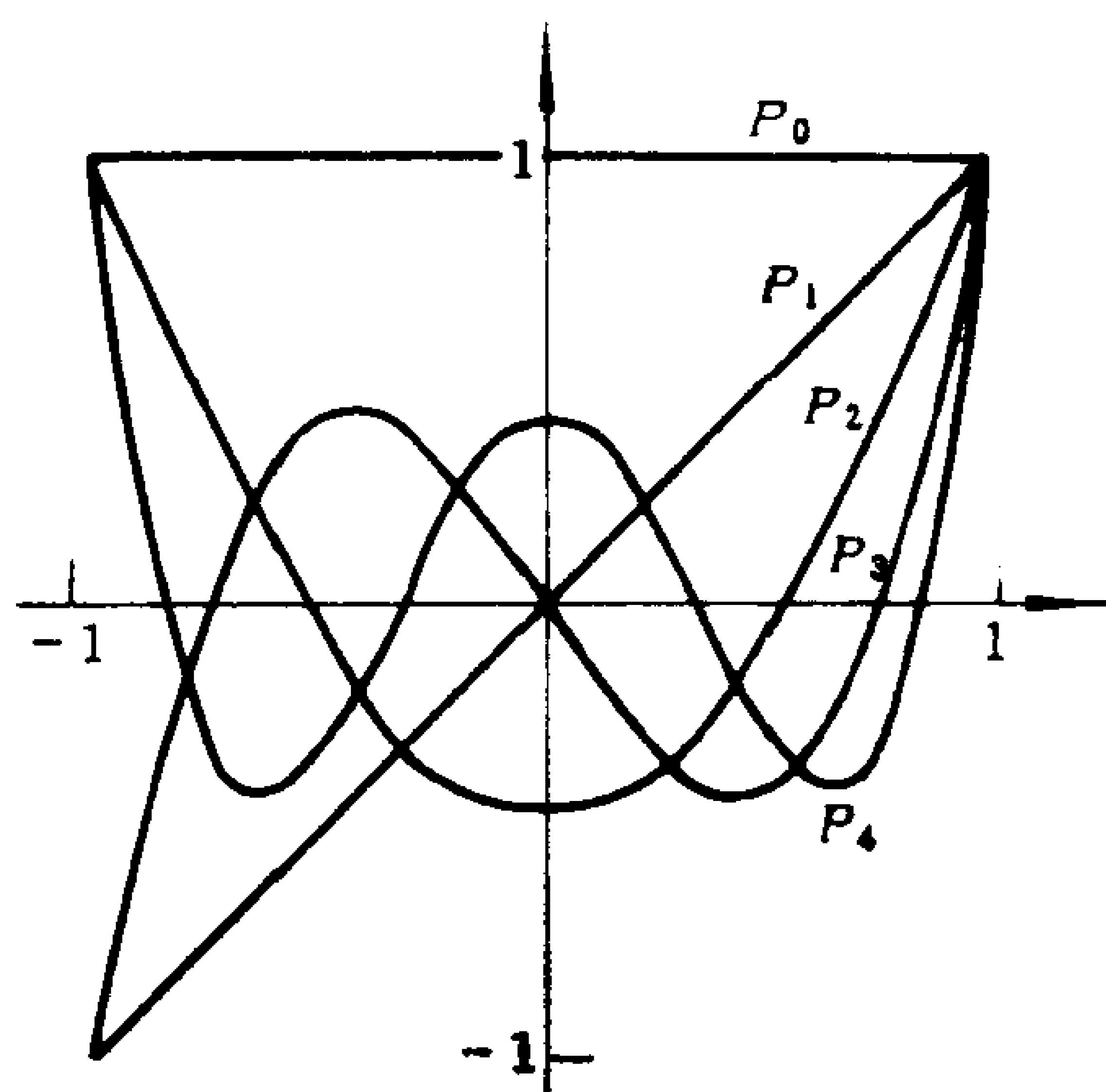


图35 勒让德多项式

所以（2a）中的e_n是通过修改$P_n(t)$的范数使之等于1而得到的。(b)：我们来证明(P_n)是空间$L^2[-1, 1]$中的正交序列。鉴于下面的理由，这足以建立式（2a）和（2b）。首先我们把式（2a）中的右端记为$y_n(t)$，则$y_n(t)$是n次多项式，结合（a)、(b)的证明，便推出(y_n)是$L^2[-1,1]$中的标准正交序列。令

$$Y_n = \text{span}\{e_0, \cdots, e_n\} = \text{span}\{x_0, \cdots, x_n\} = \text{span}\{y_0, \cdots, y_n\}$$

其中第二个等号是由格拉姆-施密特过程演算推出的，而最后一个等号是根据$\dim Y_n = n+1$及3.4-2所述$\{y_0, y_1, \cdots, y_n\}$为线性无关的条件而得到的。因此$y_n$有表达式

$$y_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j e_j \qquad (4)$$

根据正交性有

$$y_n \perp Y_{n-1} = \text{span}\{y_0, \cdots, y_{n-1}\} = \text{span}\{e_0, \cdots, e_{n-1}\}$$

这就推出了，对于$k=0, 1, \cdots, n-1$有

$$0 = \langle y_n, e_k \rangle = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \langle e_j, e_k \rangle = \alpha_k$$

因此式（4）便导出$y_n = \alpha_n e_n$，由于$\| y_n \| = \| e_n \| = 1$，所以，$|\alpha_n| = 1$，准确点说，由于$y_n$，$e_n$都是实矢量，故$\alpha_n = +1$或$-1$。又由于式（2c）中$t^n$的系数是正的，所以对足够大的$t$，$y_n(t) > 0$，从而对足够大的$t$，象从§3.4中（13）、（14）和$x_n(t) = t^n$所能够看到的那样，也有$e_n(t) > 0$。因此，$\alpha_n = +1$且$y_n = e_n$。这就证实了由式（2b）给出的$P_n(t)$使式（2a）成立。

在（a）、（b）的证明完成之后，再结合上面的证明结果，便完成了整个的证明。

(a) 我们从式（2b）推出式（3），记$u = t^2 - 1$，则函数u^n和它的各阶导数$(u^n)'$，$(u^n)''$，$\cdots$，$(u^n)^{(n-1)}$在$t = \pm 1$为零。而$(u^n)^{(2n)} = (2n)!$。对式（2b)用分部积分法进行n次积分可得

$$\begin{aligned}(2^n n!)^2 \| P_n \|^2 &= \int_{-1}^{1} (u^n)^{(n)} (u^n)^{(n)} dt \\ &= (u^n)^{(n-1)} (u^n)^{(n)} \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (u^n)^{(n-1)} (u^n)^{(n+1)} dt \\ &= \cdots = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} u^n dt = 2(2n)! \int_{0}^{1} (1-t^2)^n dt \\ &= 2(2n)! \int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n+1}\tau d\tau \qquad (t = \sin\tau) \\ &= 2^{2n+1}(n!)^2/(2n+1)\end{aligned}$$

两边除以 $(2^n n!)^2$ 便得到式（3）。

（b）现证 $\langle P_m, P_n\rangle = 0$，其中 $0 \leqslant m < n$。由于 P_m 是多项式，只要对 $m<n$ 证明 $\langle x_m, P_n\rangle = 0$ 就够了。其中 x_m 是式（1）中所定义的。这个结果通过 m 次分部积分便能得到：

$$
\begin{aligned}
2^n n!\langle x_m, P_n\rangle &= \int_{-1}^{1} t^m (u^n)^{(n)} dt \\
&= t^m (u^n)^{(n-1)} \Big|_{-1}^{1} - m\int_{-1}^{1} t^{m-1}(u^n)^{(n-1)} dt \\
&= \cdots = (-1)^m m! \int_{-1}^{1} (u^n)^{(n-m)} dt \\
&= (-1)^m m! (u^n)^{(n-m-1)} \Big|_{-1}^{1} = 0
\end{aligned}
$$

这就完成了对式（2a）和（2b）的证明。

勒让德多项式是重要的勒让德微分方程

$$(1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0 \tag{5}$$

的解。而式（2c）也可以通过对方程（5）用幂级数法求解而得到。

此外，空间 $L^2[a, b]$ 中的一个完全标准正交序列为 (q_n)，其中

$$q_n = p_n / \| p_n \|, \quad p_n(t) = P_n(s), \quad s = 1 + 2\frac{t-b}{b-a} \tag{6}$$

若我们注意到 $a \leqslant t \leqslant b$ 通过线性变换 $t \to s$ 与 $-1 \leqslant s \leqslant 1$ 一一对应，且正交性保持不变，便能证明上述结论。

因而对任一紧区间 $[a, b]$，空间 $L^2[a, b]$ 都有完全标准正交序列。从而定理3.6-4蕴含着

实空间 $L^2[a, b]$ 是可分的。

3.7-2埃尔米特（Hermite）多项式 有实用价值的空间还有 $L^2(-\infty, +\infty)$，$L^2[a, +\infty)$，$L^2(-\infty, b]$。这些空间不能象定理3.7-1那样直接对 (x_j) 施行格拉姆-施密特正交化过程来得到它们的标准正交序列，因为积分区间是无限的。但是，如果我们对幂函数序列 (x_j) 的每一项都乘上一个简单而递减很快的函数，便可望使无穷积分取有限值。显然，有适当指数的指数函数便是一个很自然的选择。

现在考虑实空间 $L^2(-\infty, +\infty)$，其上的内积为

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt$$

我们对函数列

$$w(t) = e^{-t^2/2}, \quad tw(t), \quad t^2 w(t), \quad \cdots$$

施行格拉姆-施密特过程。$w(t)$ 的指数中的因子 1/2 纯属习惯的取用，没有更深的含义。这些函数是 $L^2(-\infty, +\infty)$ 中的元素。事实上，它们在 R 上是有界的，假定对所有的 t 有 $|t^n w(t)| \leqslant k_n$，因而有

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2/2} t^n e^{-t^2/2} dt \right| \leqslant k_{m+n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = k_{m+n}\sqrt{2\pi}$$

格拉姆-施密特过程给出标准正交序列（e_n），其中（图36）。

$$e_n(t)=[1/(2^n n!\sqrt{2\pi})^{1/2}]e^{-t^2/2}H_n(t) \tag{7a}$$

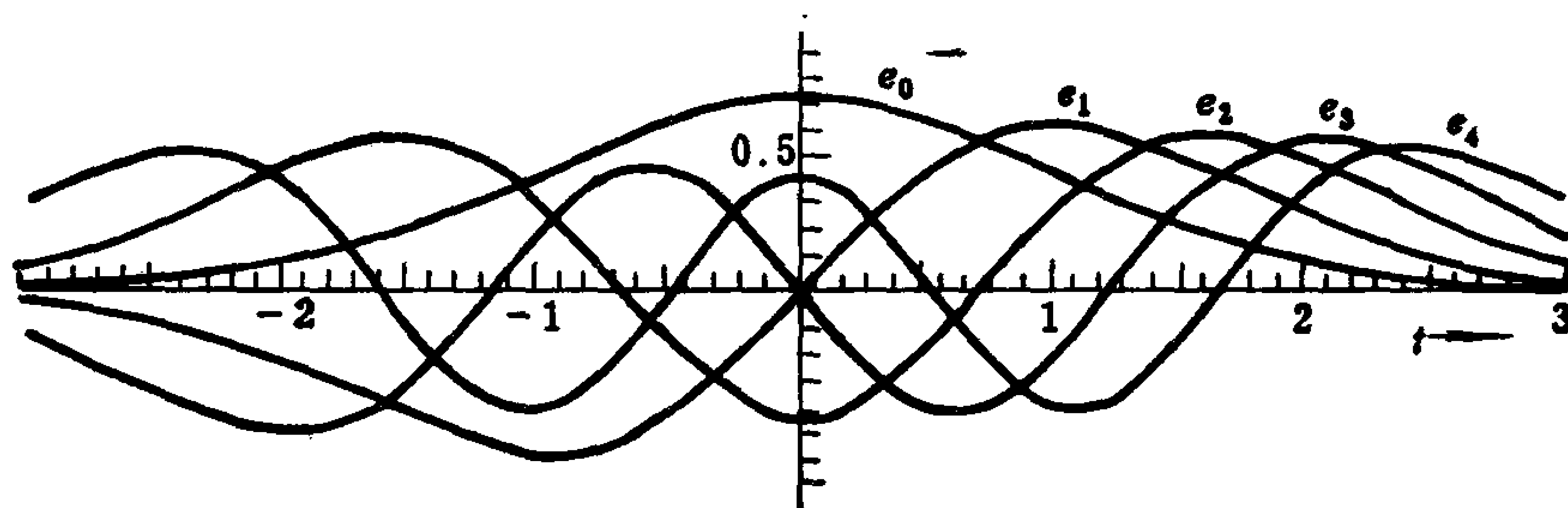


图36 式(7a)中含有埃尔米特多项式的函数$e_n(t)$的曲线

而其中

$$H_0(t)=1, \quad H_n(t)=(-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}) \qquad n=1, 2 \tag{7b}$$

H_n叫做 n 阶的埃尔米特多项式。

将式（7b）中的微分完成后，可以得到

$$H_n(t)=n!\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\frac{2^{n-2j}}{j!(n-2j)!}t^{n-2j} \tag{7c}$$

其中若 n 是偶数，$N=n/2$；若 n 是 奇 数，$N=(n-1)/2$。注 意，当 $n=2$，3，…，时，式（7c）也能写成

$$H_n(t)=\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j}{j!}n(n-1)\cdots(n-2j+1)(2t)^{n-2j} \tag{7c'}$$

前几个埃尔米特多项式的显式为

$$\begin{aligned} &H_0(t)=1 && H_1(t)=2t \\ &H_2(t)=4t^2-2 && H_3(t)=8t^3-12t \\ &H_4(t)=16t^4-48t^2+12 && H_5(t)=32t^5-160t^3+120t \end{aligned} \tag{7*}$$

由式（7a）和（7b）定义的序列（e_n）是标准正交的。

证明：式（7a）和（7b）表明，我们必须证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}H_m(t)H_n(t)dt=\begin{cases}0, & m\neq n \\ 2^n n!\sqrt{\pi} & m=n\end{cases} \tag{8}$$

对式（7c'）微分便有

$$\begin{aligned} H_n'(t)&=2n\sum_{j=0}^{M}\frac{(-1)^j}{j!}(n-1)(n-2)\cdots(n-2j)(2t)^{n-2j-1} \\ &=2nH_{n-1}(t) \qquad (n\geqslant 1) \end{aligned}$$

其中若 n 是偶数，$M=(n-2)/2$；若 n 是奇数，则$M=(n-1)/2$。关于H_m也写出类似的关系式，并假定$m\leqslant n$。为简便计，用 v 表示式（8）中的指数函数 e^{-t^2}，作m次分部积分，则由式（7b），可得到

$$(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}H_m(t)H_n(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}H_m(t)v^{(n)}dt$$

$$=H_m(t)v^{(n-1)}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}2mH_{m-1}(t)v^{(n-1)}dt$$

$$=-2m\int_{-\infty}^{+\infty}H_{m-1}(t)v^{(n-1)}dt=\cdots$$

$$=(-1)^m2^m m!\int_{-\infty}^{+\infty}H_0(t)v^{(n-m)}dt$$

其中$H_0(t)=1$。若 $m<n$，由于 v 及其导数当 $t\to\pm\infty$ 时趋于0，所以只要再积分一次便得到零。这便证明了（e_n）的正交性。关于$m=n$时证明式（8），需要用（7a）限定$\|e_n\|=1$。若$m=n$，把上面最后的积分式记为J，则

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

这是大家熟悉的一个结果。为验证它，我们来计算J^2，利用极坐标r，θ和 $dsdt=rd\theta dr$，有

$$J^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}ds\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(s^2+t^2)}dsdt=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi$$

这就证明了式（8），因此（e_n）的标准正交性得证。

传统上我们常常把式（8）说成是：埃尔米特多项式H_n相对于权函数w^2 形成一个正交序列，其中w就是开始时定义的函数 $e^{-t^2/2}$。

还能证明由式（7a）和（7b）定义的（e_n）在实空间$L^2(-\infty,\ +\infty)$中是完全的。因此该空间是可分的（见3.6-4）。

最后我们指出，埃尔米特多项式 H_n 满足埃尔米特微分方程

$$H_n''-2tH_n'+2nH_n=0 \qquad (9)$$

注意：很遗憾，在文献中的术语是不统一的。事实上，由

$$He_0(t)=1,\quad He_n(t)=(-1)^n e^{t^2/2}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2/2})\qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

所定义的函数He_n也叫做埃尔米特多项式，并且更严重的是，有时也用H_n来记它。

在§11.3中我们将研究埃尔米特多项式在量子力学中的一个应用。

3.7-3拉盖尔多项式 空间$L^2(-\infty,\ b]$和$L^2[a,\ +\infty)$中的完全标准正交序列分别用变换 $t=b-s$ 和 $t=s+a$，可从$L^2[0,\ +\infty)$中的这样一个序列得到。

为此，我们先考虑空间$L^2[0,\ +\infty)$。对序列

$$e^{-t/2},\quad te^{-t/2},\quad t^2e^{-t/2},\quad \cdots$$

施行格拉姆-施密特过程，便得到一个标准正交序列 (e_n)。可以证明 (e_n) 在 $L^2[0, +\infty)$ 是完全的。而 (e_n) 是由

$$e_n(t)=e^{-t/2}L_n(t), \qquad n=0, 1, \cdots \tag{10a}$$

给出的（见图37），其中 $L_n(t)$ 为 n 阶的拉盖尔多项式，它被定义为

$$L_0(t)=1, \quad L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}), \qquad n=1, 2, \cdots \tag{10b}$$

亦即

$$L_n(t)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}\binom{n}{j}t^j \tag{10c}$$

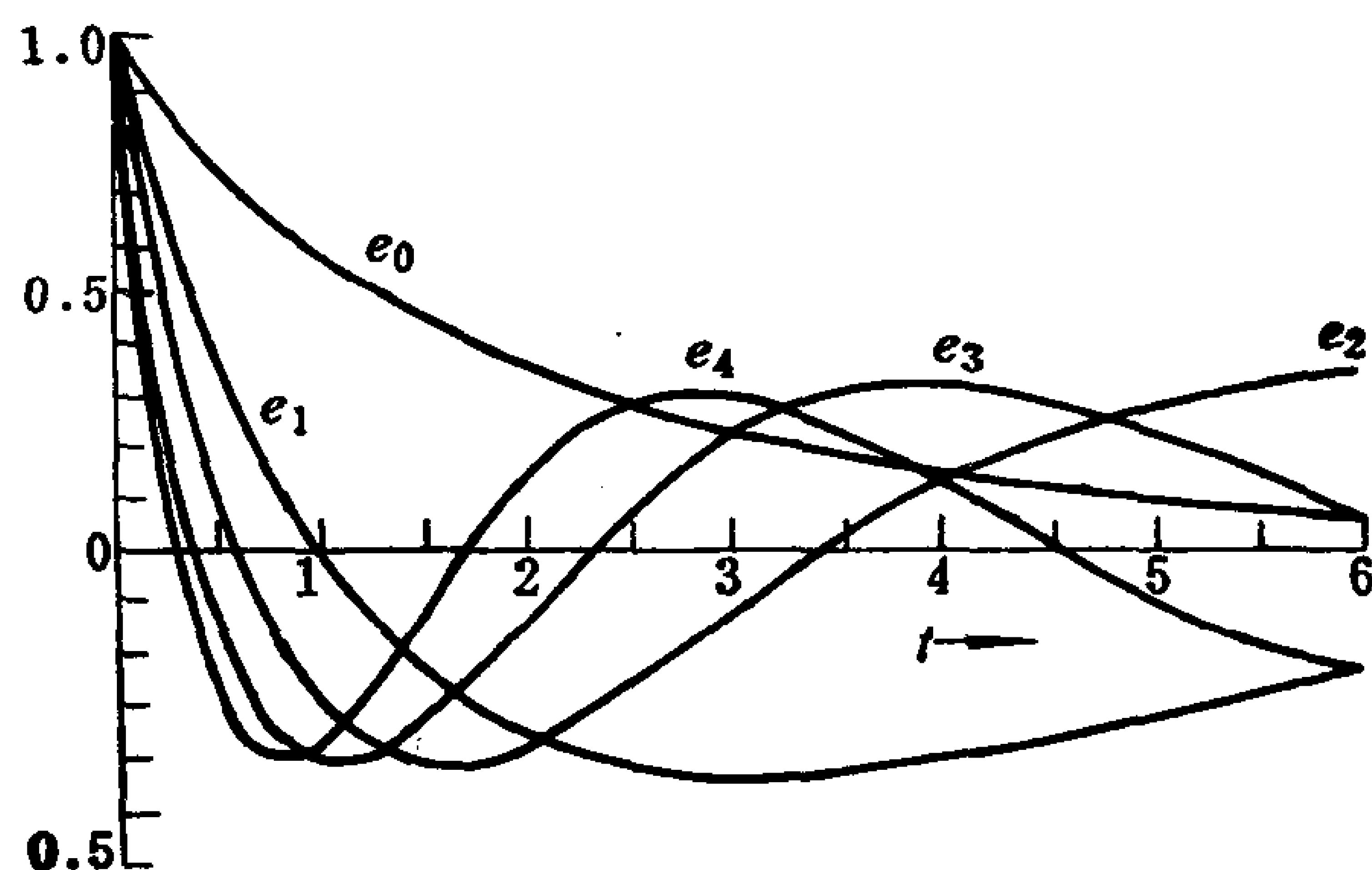


图37　含有拉盖尔多项式的(10a)函数 $e_n(t)$

前几个拉盖尔多项式的显式为

$$L_0(t)=1, \qquad L_1(t)=1-t,$$

$$L_2(t)=1-2t+\frac{1}{2}t^2, \qquad L_3(t)=1-3t+\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3 \tag{10*}$$

$$L_4(t)=1-4t+3t^2-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{24}t^4$$

拉盖尔多项式 L_n 是拉盖尔微分方程

$$tL_n''+(1-t)L_n'+nL_n=0 \tag{11}$$

的解。

要想详细地了解拉盖尔多项式，可参阅 $A \cdot Erde'lyi$ (1953-55)；也可看柯朗和希尔伯特 (1953-62) Vol. I 。

习　题

1. 证明勒让德微分方程能够被写成

$$[(1-t^2)P_n']'=-n(n+1)P_n$$

用P_m乘这个方程，用$-P_n$乘关于P_m的相应方程，再把两个方程加在一起。把所得到的方程从-1到1进行积分，证明（P_n）是空间$L^2[-1,1]$中的正交序列。

2.从式（2b）推出式（2c）。

3.（**生成函数**）证明

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)w^n$$

左端的函数叫做勒让德多项式的生成函数。在研究各种特殊函数时，生成函数是有用的。参见柯朗和希尔伯特（1953-62）及$A\cdot Erde'lyi$等（1953-55）。

4.证明

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos\theta}}=\frac{1}{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$

其中r是$\mathbf{R}^3$中给定点A_1和A_2间的距离，如图38所示。并且$r_2>0$（这个公式在电位理论中是有用的。）

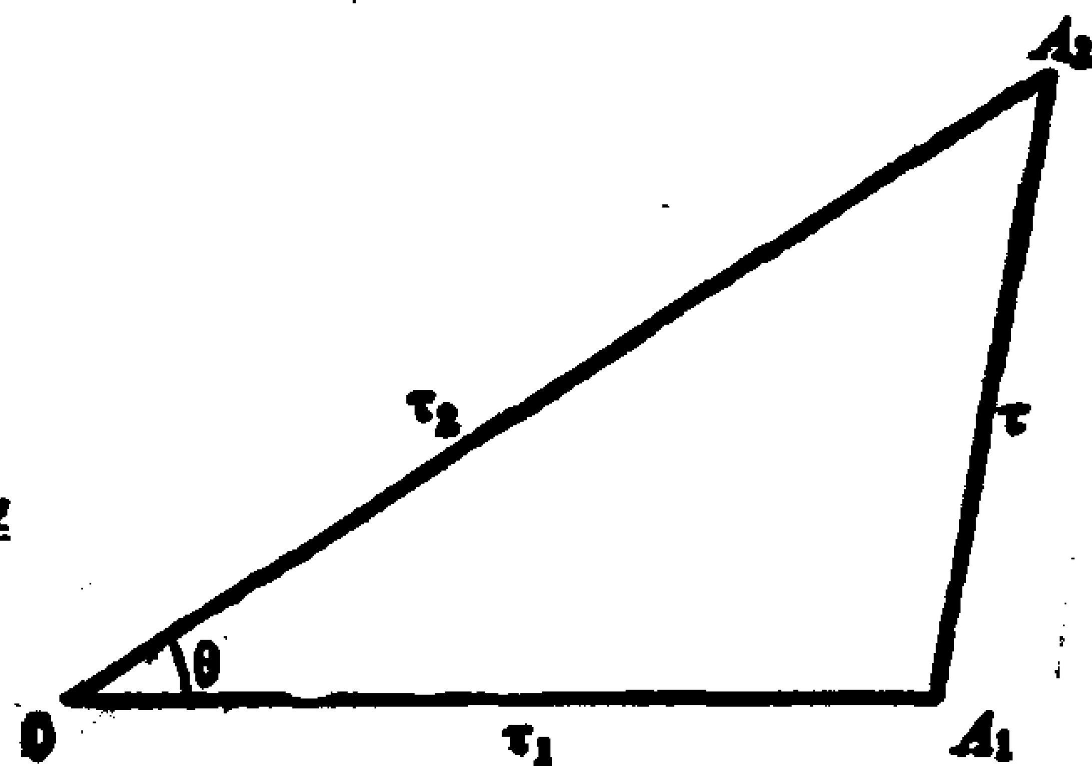


图38 习题4

5.用幂级数方法求勒让德多项式。把

$$x(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots$$

代入勒让德方程。证明：通过确定系数便能得到解$x=c_0x_1+c_1x_2$，其中

$$x_1=1-\frac{n(n+1)}{2!}t^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}t^4-\cdots$$

$$x_2=t-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}t^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}t^5-\cdots$$

证明：对$n\in N$，这两个函数之一便化为一个多项式。若选$c_n=(2n)!/2^n(n!)^2$作为t^n的系数，它和P_n是一致的。

6.（**生成函数**）证明

$$e^{2wt-w^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(t)w^n$$

左端的函数叫做埃尔米特多项的式生成函数。

7.利用式（7b）证明

$$H_{n+1}(t)=2tH_n(t)-H_n{}'(t)$$

8.习题6中的生成函数关于t求微分，证明

$$H_n{}'(t)=2nH_{n-1}(t)\qquad(n\geqslant1)$$

并利用习题7，证明H_n满足埃尔米特微分方程。

9.用埃尔米特多项式解微分方程$y''+(2n+1-t^2)y=0$。

10.用习题8，证明

$$(e^{-t^2}H_n{}')'=-2ne^{-t^2}H_n$$

利用这个结果和习题1中阐明的方法来证明式（7a）定义的函数在R上是正交的。

11.（**生成函数**） 用式（10c）证明

$$\psi(t, w)=\frac{1}{1-w}\exp\left[-\frac{tw}{1-w}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(t)w^n$$

12.习题11中的ψ关于w微分，证明

（a） $(n+1)L_{n+1}(t)-(2n+1-t)L_n(t)+nL_{n-1}(t)=0$

ψ关于t微分，证明

（b） $L_{n-1}(t)=L'_{n-1}(t)-L'_n(t)$

13.利用习题12，证明

（c） $tL_n'(t)=nL_n(t)-nL_{n-1}(t)$

利用（c）和习题12中的（b），证明L_n满足拉盖尔微分方程（11）。

14.证明式（10a）的函数的范数等于1。

15.证明式（10a）的函数构成空间$L^2[0, +\infty)$中的一个正交序列。

§3.8 希尔伯特空间上泛函的表示

知道各种空间上的有界线性泛函的一般形式，有其实际的重要性。这一点曾在§2.10中指出并说明过。对于一般的巴拿赫空间，这些公式及其推导有时是很复杂的。然而，对于希尔伯特空间，情况却异常简单。

3.8-1黎斯定理（希尔伯特空间上的泛函） 希尔伯特空间H上的每一个有界线性泛函都能表示成内积的形式，即

$$f(x)=\langle x, z\rangle \tag{1}$$

其中z依赖于f，并且由f唯一确定，还有范数

$$\|z\|=\|f\| \tag{2}$$

证明：我们分以下几步证明

（a）f有表示（1），

（b）（1）中的z是唯一的，

（c）公式（2）成立。

其详细证明如下。

（a）若$f=0$，我们取$z=0$，（1）与（2）皆成立。设$f\neq0$。为启发证明的思路，先让我们考虑：若表示（1）存在，z必须有什么性质。首先，$z\neq0$，否则$f=0$。其次，对满足$f(x)=0$的一切x都有$\langle x, z\rangle=0$，也就是说，对f的零空间中所有的x，有$\langle x, z\rangle=0$。因此$z\perp\mathscr{N}(f)$。这就提示我们去考虑$\mathscr{N}(f)$和它的正交补$\mathscr{N}(f)^\perp$。

根据2.6-9，$\mathscr{N}(f)$是一个矢量空间，并且由2.7-10还知$\mathscr{N}(f)$是闭的。此外，$f\neq0$蕴含着$\mathscr{N}(f)\neq H$，所以根据投影定理3.3-4有$\mathscr{N}(f)^\perp\neq\{0\}$。因此，$\mathscr{N}(f)^\perp$包含一个$z_0\neq0$。我们置

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x$$

其中 $x \in H$是任意的。两边用 f 作用，便得到

$$f(v) = f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0$$

这就证明了$v \in \mathcal{N}(f)$。由于$z_0 \perp \mathcal{N}(f)$，我们有

$$\begin{aligned} 0 = \langle v, z_0 \rangle &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle \end{aligned}$$

注意 $\langle z_0, z_0 \rangle = \|z_0\|^2 \neq 0$，所以能够关于$f(x)$解出，结果是

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0 \rangle} \langle x, z_0 \rangle$$

这就能够按（1）的形式写出，其中

$$z = \overline{\frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0 \rangle}} z_0$$

由于 $x \in H$是任意的，（1）被证明。

(b) 现证（1）中的 z 是唯一的。假定对所有的 $x \in H$，有

$$f(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle$$

则对所有的 x 有 $\langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0$。特别选 $x = z_1 - z_2$，便有

$$\langle x, z_1 - z_2 \rangle = \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = \|z_1 - z_2\|^2 = 0$$

因此 $z_1 - z_2 = 0$，所以 $z_1 = z_2$，唯一性得证。

(c) 最后证明（2）。若 $f = 0$，则 $z = 0$，（2）显然成立。若 $f \neq 0$，则 $z \neq 0$。将（1）中的 x 取成 z，再利用 §2.8中的（8），便得到

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leqslant \|f\| \|z\|$$

用 $\|z\| \neq 0$ 去除不等式两端，便得 $\|z\| \leqslant \|f\|$。其余要证明 $\|f\| \leqslant \|z\|$。由（1）和许瓦兹不等式（§3.2），可看出

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leqslant \|x\| \|z\|$$

这就推出

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z \rangle| \leqslant \|z\|$$

合在一起，便证明了（2）。

在 (b) 中证明唯一性的思想，对于后面的使用是值得注意的。

3.8-2引理（等式） 若对内积空间X中的所有w都有 $\langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle$，则$v_1 = v_2$。特别是，若对一切$w \in X$都有 $\langle v_1, w \rangle$，则$v_1 = 0$。

证明：据假设，对所有的$w \in X$有

$$\langle v_1 - v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle - \langle v_2, w \rangle = 0$$

若取$w=v_1-v_2$，便得到$\|v_1-v_2\|^2=0$，从而有$v_1-v_2=0$，故$v_1=v_2$。特别是，在$\langle v_1, w\rangle=0$中取$w=v_1$，便有$\|v_1\|^2=0$，所以$v_1=0$。

希尔伯特空间上有界线性泛函的实用价值在很大程度上是基于黎斯表示（1）的简明性。

此外，在希尔伯特空间的算子理论中，特别是下一节关于有界线性算子T所定义的希尔伯特伴随算子T^*，黎斯表示（1）也是十分重要的。为此，我们需要一些预备知识，这些知识也有其普遍的意义。让我们从下面的定义开始。

3.8-3定义（一个半的线性形式） 设X和Y是同一个域K（$=\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$）上的两个矢量空间。则$X\times Y$上的一个半的线性形式（或一个半的线性泛函）h是一个映射

$$h: X\times Y\to K$$

并对所有的x，x_1，$x_2\in X$和y，y_1，$y_2\in Y$以及所有的标量α，β满足

$$h(x_1+x_2, y)=h(x_1, y)+h(x_2, y) \tag{3a}$$

$$h(x, y_1+y_2)=h(x, y_1)+h(x, y_2) \tag{3b}$$

$$h(\alpha x, y)=\alpha h(x, y) \tag{3c}$$

$$h(x, \beta y)=\bar{\beta}h(x, y) \tag{3d}$$

因此，h关于第一个变元是线性的，而关于第二个变元是共轭线性的。若X和Y都是实空间（$K=\mathbf{R}$），则（3d）简化为

$$h(x, \beta y)=\beta h(x, y)$$

由于它关于第二个变元也是线性的，所以把h叫做双线性的。

若X和Y是赋范空间，又若存在实数c，使得对一切x，y有

$$|h(x, y)|\leqslant c\|x\|\|y\| \tag{4}$$

则称h是有界的，而把数

$$\|h\|=\sup_{\substack{x\in X-\{0\}\\ y\in Y-\{0\}}}\frac{|h(x, y)|}{\|x\|\|y\|}=\sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}}|h(x, y)| \tag{5}$$

叫做h的范数。

例如，内积就是一个半的线性形式，并且是有界的。注意，从（4）和（5）可以推得

$$|h(x, y)|\leqslant\|h\|\|x\|\|y\| \tag{6}$$

在§3.1中已蕴含着"一个半的线性"这个术语的函义。在定义3.8-3中，"形式"和"泛函"这两个词是通用的，至于使用哪一个就看各自的爱好了。对于两个变量的情况，用"形式"一词或许稍好一点，而留"泛函"一词用在诸如定理3.8-1中只有一个变量的情况。这就是我们要做的准备。

非常有趣的是，从定理3.8-1我们能够得到希尔伯特空间上的一个半的线性形式的一般表示。

3.8-4定理（黎斯表示） 设H_1和H_2都是希尔伯特空间，并且

$$h: H_1 \times H_2 \to K$$

是有界的一个半的线性形式。则h有表示

$$h(x, y) = \langle Sx, y \rangle \tag{7}$$

其中S：$H_1 \to H_2$是一个有界线性算子。S由h唯一地确定，并且有范数

$$\| S \| = \| h \| \tag{8}$$

证明：我们考察$\overline{h(x, y)}$。由于取了复共轭，所以$\overline{h(x, y)}$关于y是线性的。为了使得定理3.8-1可用，我们让x保持不变。这时把$\overline{h(x, y)}$中的y看作变量，它是y的线性泛函，故有表示

$$\overline{h(x, y)} = \langle y, z \rangle$$

因此

$$h(x, y) = \overline{\langle y, z \rangle} = \langle z, y \rangle \tag{9}$$

其中$z \in H_2$是唯一的，当然是依赖于我们所固定的$x \in H_1$。这样，由（9），每给定一个变量$x \in H_1$，便有唯一的$z \in H_2$与之对应，因此定义了一个算子

$$S: H_1 \to H_2, \text{由} z = Sx \text{给出}$$

把$z = Sx$代入（9），便得到（7）。

S是线性的。事实上，其定义域为矢量空间H_1，从（7）和一个半线性性，对所有的$y \in H_2$有

$$\begin{aligned} \langle S(\alpha x_1 + \beta x_2), y \rangle &= h(\alpha x_1 + \beta x_2, y) \\ &= \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y) \\ &= \alpha \langle Sx_1, y \rangle + \beta \langle Sx_2, y \rangle \\ &= \langle \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y \rangle \end{aligned}$$

所以根据引理3.8-2便有

$$S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Sx_1 + \beta Sx_2$$

S是有界的。实际上，撇开明显的情况$S = 0$，从（5）和（7）便有

$$\| h \| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle Sx, y \rangle|}{\| x \| \| y \|} \geqslant \sup_{\substack{x \neq 0 \\ Sx \neq 0}} \frac{|\langle Sx, Sx \rangle|}{\| x \| \| Sx \|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Sx \|}{\| x \|} = \| S \|$$

这就证明了S的有界性，并且$\| h \| \geqslant \| S \|$。

应用许瓦兹不等式

$$\| h \| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle Sx, y \rangle|}{\| x \| \| y \|} \leqslant \sup_{x \neq 0} \frac{\| Sx \| \| y \|}{\| x \| \| y \|} = \| S \|$$

便推出$\| h \| \leqslant \| S \|$，合在一起，便证明了（8）。

S是唯一的。事实上，假定有线性算子，T：$H_1 \to H_2$，对所有的$x \in H_1$和$y \in H_2$也满足

$$h(x, y) = \langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

则由引理3.8-2知，对所有的$x \in H_1$有$Tx = Sx$。因此，据定义有$T = S$。

习　题

1.（空间$\mathbf{R}^3$）证明：$\mathbf{R}^3$上的任一线性泛函f都能用点积

$$f(x) = x \cdot z = \xi_1\zeta_1 + \xi_2\zeta_2 + \xi_3\zeta_3$$

来表示。

2.（空间l^2）证明：l^2上的每一个有界线性泛函f都能表示成如下形式

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j\bar{\zeta}_j \qquad [z = (\zeta_j) \in l^2]$$

3.若z是内积空间X的任一固定的元素，证明$f(x) = \langle x, z\rangle$在$X$上定义了一个有界线性泛函$f$，且$\|f\| = \|z\|$。

4.考察习题3。如果$z \mapsto f$所给出的映射C：$X \to X'$是满射，证明X一定是希尔伯特空间。

5.证明：实空间l^2的对偶空间是l^2（用3.8-1）。

6.证明：定理3.8-1定义的等距对射

$$T: H \to H'$$

$$z \mapsto f_z = \langle \cdot, z\rangle$$

不是线性的，而是共轭线性的，即

$$\alpha z + \beta v \mapsto \bar{\alpha} f_z + \bar{\beta} f_v$$

7.证明：希尔伯特空间H的对偶空间H'是具有内积$\langle \cdot, \cdot\rangle_1$为

$$\langle f_z, f_v\rangle_1 = \overline{\langle z, v\rangle} = \langle v, z\rangle$$

的希尔伯特空间，其中$f_z(x) = \langle x, z\rangle$，等等。

8.证明：任一希尔伯特空间H都和其二次对偶空间$H'' = (H')'$同构（见§3.6）。（这叫做H的自反性，它将在§4.6中关于赋范空间作更详细的讨论）。

9.（零化子）就希尔伯特空间H的子集$M \neq \phi$的情况，阐明§2.10 习题13中的M^a与§3.3中的$M^{\perp}$之间的关系。

10.证明：内积空间X上的内积$\langle \cdot, \cdot\rangle$是一个有界的一个半的线性形式$h$。在这种情况下，$\|h\|$是什么?

11.若X是一个矢量空间，h是$X \times X$上的$1\frac{1}{2}$线性形式，证明：对于固定的y_0。$f_1(x) = h(x, y_0)$在X上定义了一个线性泛函f_1；固定x_0，而$f_2(y) = \overline{h(x_0, y)}$也在$X$上定义了一个线性泛函$f_2$。

12.设X和Y都是赋范空间。证明：$X \times Y$上的一个有界的一个半的线性形式h，关于

两个变量都是连续的。

13.（**埃尔米特形式**）设X是域K上的矢量空间。$X\times X$上的埃尔米特$1\frac{1}{2}$线性形式或简称埃尔米特形式h，是这样的一个映射h：$X\times X\to K$，它对所有的x，y，$z\in X$和$\alpha\in K$满足

$$h(x+y,\ z)=h(x,\ z)+h(y,\ z)$$

$$h(\alpha x,\ y)=\alpha h(x,\ y)$$

$$h(x,\ y)=\overline{h(y,\ x)}$$

若$K=\mathbf{R}$，最后的条件$h(x,\ y)=\overline{h(y,\ x)}$变成什么？要使得$h$是$X$上的一个内积，还必须对$h$再施加什么条件？

14.（**许瓦兹不等式**）设X是矢量空间而h是$X\times X$上的一个埃尔米特形式。若对所有的$x\in X$都有$h(x,\ x)\geqslant 0$，则称h是半正定的。证明h满足许瓦兹不等式

$$|h(x,\ y)|^2\leqslant h(x,\ x)h(y,\ y)$$

15.（**半范数**）若h满足习题14中的条件，证明$p(x)=\sqrt{h(x,\ x)}$（$\geqslant 0$）在X上定义了一个半范数。（见§2.3习题12）

§3.9 希尔伯特伴随算子

上一节的结果能使我们对希尔伯特空间上的每一个有界线性算子T，引入一个希尔伯特伴随算子。这个算子是在研究矩阵和线性微分方程以及线性积分方程中的问题时提出的。我们将要看到，这个算子能帮助我们来定义三类重要的算子（即所谓自伴算子，酉算子，正规算子），由于这些算子在各种应用中起着关键的作用，所以被广泛的研究。

3.9-1**定义（希尔伯特伴随算子T^*）** 设H_1和H_2是希尔伯特空间，T：$H_1\to H_2$是一个有界线性算子。则使得①对所有的$x\in H_1$和$y\in H_2$满足

$$\langle Tx,\ y\rangle=\langle x,\ T^*y\rangle \tag{1}$$

的算子

$$T^*:\ H_2\to H_1$$

叫做T的希尔伯特伴随算子T^*。

当然，首先需要证明这个定义是有意义的，也就是说，对于给定的T，这样定义的T^*是存在的。

3.9-2 **定理（存在性）** 定义3.9-1中T的希尔伯特伴随算子T^*是存在的，唯一的，而且是一个有界线性算子，其范数

$$\|T^*\|=\|T\| \tag{2}$$

① 由于内积中的元素已表明它们所在的空间，所以我们能用同一个符号$\langle\cdot,\cdot\rangle$来表记$H_1$和$H_2$上的内积。

证明：因为内积是$1\frac{1}{2}$线性的，T是线性的，所以公式

$$h(y, x)=\langle y, Tx\rangle \tag{3}$$

在$H_2\times H_1$上定义了一个$1\frac{1}{2}$线性形式。事实上，从

$$\begin{aligned} h(y, \alpha x_1+\beta x_2) &= \langle y, T(\alpha x_1+\beta x_2)\rangle \\ &= \langle y, \alpha Tx_1+\beta Tx_2\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle y, Tx_1\rangle+\bar{\beta}\langle y, Tx_2\rangle \\ &= \bar{\alpha}h(y, x_1)+\bar{\beta}h(y, x_2) \end{aligned}$$

可以看出h的共轭线性性。事实上，从许瓦兹不等式

$$|h(y, x)|=|\langle y, Tx\rangle|\leqslant\|y\|\,\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|\,\|y\|$$

可以看出h是有界的。同时也推出$\|h\|\leqslant\|T\|$。此外，从

$$\|h\|=\sup_{\substack{x\neq0\\y\neq0}}\frac{|\langle y, Tx\rangle|}{\|y\|\,\|x\|}\geqslant\sup_{\substack{x\neq0\\Tx\neq0}}\frac{|\langle Tx, Tx\rangle|}{\|Tx\|\,\|x\|}=\|T\|$$

还可推出$\|h\|\geqslant\|T\|$，合在一起，便有

$$\|h\|=\|T\| \tag{4}$$

定理3.8-4给出h的一个黎斯表示；将该表示中的S写成T^*，便有

$$h(y, x)=\langle T^*y, x\rangle \tag{5}$$

而且由定理3.8-4还知道，T^*：$H_2\to H_1$是被唯一确定了范数（见(4)）为

$$\|T^*\|=\|h\|=\|T\|$$

的有界线性算子。这就证明了（2）。将(3)和(5)加以比较便有$\langle y, Tx\rangle=\langle T^*y, x\rangle$，取共轭就得到（1），从而看出$T^*$就是我们所希望的算子。

在研究希尔伯特自伴算子的性质时，使用下述引理将会带来方便。

3.9-3引理（零算子） 设X和Y都是内积空间，而且Q：$X\to Y$是一个有界线性算子。则

(a) $Q=0$当且仅当对所有的$x\in X$和$y\in Y$都有$\langle Qx, y\rangle=0$。

(b) 若Q：$X\to X$，其中X是复内积空间，并且对所有的$x\in X$都有$\langle Qx, x\rangle=0$，则$Q=0$。

证明：(a) $Q=0$意味着对一切x有$Qx=0$因而有

$$\langle Qx, y\rangle=\langle 0, y\rangle=0\langle w, y\rangle=0$$

反之，若对所有的x和y都有$\langle Qx, y\rangle=0$，则由3.8-2知，对所有的x有$Qx=0$，从而据定义知$Q=0$。

(b) 据假设，对每个$v=\alpha x+y\in X$有$\langle Qv, v\rangle=0$，也就是

$$0 = \langle Q(\alpha x + y), \alpha x + y\rangle$$
$$= |\alpha|^2\langle Qx, x\rangle + \langle Qy, y\rangle + \alpha\langle Qx, y\rangle + \bar{\alpha}\langle Qy, x\rangle$$

根据假设，上式右端的前两项为零，取$\alpha = 1$，便有

$$\langle Qx, y\rangle + \langle Qy, x\rangle = 0$$

再取$\alpha = i$代入，又得

$$\langle Qx, y\rangle - \langle Qy, x\rangle = 0$$

两式相加可得$\langle Qx, y\rangle = 0$，由（a）便推出$Q = 0$。

在引理的（b）中，X为复空间是必不可少的。事实上，若X是实空间，结论可以不成立。一个反例是，Q是平面$\mathbf{R}^2$上的一个90°旋转，显然它是线性的，且$Qx \perp x$，故对所有的$x \in \mathbf{R}^2$，$\langle Qx, x\rangle = 0$，但$Q \neq 0$。（这样一个旋转在复平面中是什么？）

现在我们能够列出并可证明希尔伯特伴随算子的某些共同性质，在以后应用这些算子时，我们要常常用到这些性质。

3.9-4定理（希尔伯特伴随算子的性质） 设H_1和H_2是希尔伯特空间，$S: H_1 \to H_2$和$T: H_1 \to H_2$是有界线性算子，α是任意标量。则有

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad \langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \qquad (x \in H_1,\ y \in H_2)\\
&(b)\quad (S+T)^* = S^* + T^*\\
&(c)\quad (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*\\
&(d)\quad (T^*)^* = T\\
&(e)\quad \|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2\\
&(f)\quad T^*T = 0 \Longleftrightarrow T = 0\\
&(g)\quad (ST)^* = T^*S^* \qquad (\text{假定}H_2 = H_1)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

证明：（a）从（1）可得到（6a）：

$$\langle T^*y, x\rangle = \overline{\langle x, T^*y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle$$

（b）根据（1），对所有的x，y有

$$
\begin{aligned}
\langle x, (S+T)^*y\rangle &= \langle (S+T)x, y\rangle\\
&= \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle\\
&= \langle x, S^*y\rangle + \langle x, T^*y\rangle\\
&= \langle x, (S^*+T^*)y\rangle
\end{aligned}
$$

因此，根据3.8-2对所有的y有$(S+T)^*y = (S^*+T^*)y$，再据定义便知$(S+T)^* = S^* + T^*$，此即（6b）。

（c）注意不要把公式（6c）和公式$T^*(\alpha x) = \alpha T^*x$混淆。通过下面的计算并把引理3.9-3($a$)应用到$Q = (\alpha T)^* - \bar{\alpha}T^*$，便得到（6$c$）。

$$
\begin{aligned}
\langle (\alpha T)^*y, x\rangle &= \langle y, (\alpha T)x\rangle = \langle y, \alpha(Tx)\rangle\\
&= \bar{\alpha}\langle y, Tx\rangle = \bar{\alpha}\langle T^*y, x\rangle = \langle \bar{\alpha}T^*y, x\rangle
\end{aligned}
$$

(d) $(T^*)^*$又记作T^{**}. 从（6a）和（1），对一切$x\in H_1$和$y\in H_2$有

$$\langle (T^*)^*x, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

再把引理3.9-3(a) 应用到$Q=(T^*)^*-T$，便推出（6d）。

(e) 首先可看到T^*T: $H_1\to H_1$, TT^*: $H_2\to H_2$。根据许瓦兹不等式，有

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leqslant \|T^*Tx\|\|x\|$$
$$\leqslant \|T^*T\|\|x\|^2$$

关于一切范数等于1的x取上确界，便得到$\|T\|^2\leqslant\|T^*T\|$。再应用§2.7中的（7）及本节的（2），便得到

$$\|T\|^2\leqslant\|T^*T\|\leqslant\|T^*\|\|T\|=\|T\|^2$$

因此证明了$\|T^*T\|=\|T\|^2$，将T与T^*的位置交换，再次利用（2），又得到

$$\|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2=\|T\|^2$$

由（6d）知，这里的。$T^{**}=T$。所以（6e）得证。

(f) 从（6e）立即可得（6f）。

(g) 反复应用（1），便有

$$\langle x, (ST)^*y\rangle = \langle (ST)x, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle$$

据引理3.8-2知$(ST)^*y=T^*S^*y$，从而据定义证明了（6g）。

习　题

1. 证明$0^*=0$，$I^*=I$。

2. 设H是一个希尔伯特空间，T: $H\to H$是一个对射有界线性算子，其逆是有界的。证明$(T^*)^{-1}$存在，并且

$$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$$

3. 若（T_n）是希尔伯特空间上的一个有界线性算子序列，且$T_n\to T$，证明$T_n^*\to T^*$。

4. 设H_1和H_2都是希尔伯特空间，T: $H_1\to H_2$是一个有界线性算子。若$M_1\subset H_1$和$M_2\subset H_2$满足$T(M_1)\subset M_2$，证明$M_1^\perp\supset T^*(M_2^\perp)$。

5. 设习题4中的M_1和M_2是闭子空间。证明$T(M_1)\subset M_2$当且仅当$M_1^\perp\supset T^*(M_2^\perp)$。

6. 若习题4的$M_1=\mathscr{N}(T)=\{x\mid Tx=0\}$，证明

(a) $T^*(H_2)\subset M_1^\perp$, ($b$) $[T(H_1)]^\perp\subset\mathscr{N}(T^*)$, ($c$) $M_1=[T^*(H_2)]^\perp$。

7. 设T_1和T_2是从复希尔伯特空间H到H的有界线性算子。若对一切$x\in H$都有$\langle T_1x, x\rangle=\langle T_2x, x\rangle$，证明$T_1=T_2$。

8. 设$S=I+T^*T$: $H\to H$，其中T是线性有界的，证明S^{-1}: $S(H)\to H$存在。

9. 证明：希尔伯特空间H上的有界线性算子T: $H\to H$，当且仅当T能表示成

$$Tx=\sum_{j=1}^{n}\langle x, v_j\rangle w_j, \qquad [v_j, w_j\in H]$$

其值域才是有限维的。

10. (**右移位算子**)　设 (e_n) 是可分的希尔伯特空间H中的完全标准正交序列，而所谓H上的右移位算子是指这样的一个线性算子T：$H\to H$，对$n=1, 2, \cdots$，有$Te_n=e_{n+1}$。解释这个名字的来历，求它的值域，零空间，范数和希尔伯特伴随算子T^*。

§3.10　自伴算子，酉算子，正规算子

实用上最重要的有界线性算子类可用希尔伯特伴随算子来定义。

3.10-1**定义（自伴算子，酉算子和正规算子）**　希尔伯特空间H上的有界线性算子T：$H\to H$

若$T^*=T$，则称T是自伴的或埃尔米特的，

若T是对射且$T^*=T^{-1}$，则称T是酉算子，

若$TT^*=T^*T$，则称T是正规算子。

T的希尔伯特伴随算子T^*是由§3.9中（1）来定义的，也就是

$$\langle Tx, y\rangle=\langle x, T^*y\rangle$$

若T是自伴的，则上式变成

$$\langle Tx, y\rangle=\langle x, Ty\rangle \tag{1}$$

若T是自伴的或是酉算子，则T是正规的。

这从定义立即可以看出。然而，正规算子不一定是自伴算子或酉算子。例如，若I：$H\to H$是一个恒等算子，则$T=2iI$便是正规的，因为$T^*=-2iI$（见3.9-4），故$TT^*=T^*T=4I$，但$T^*\neq T$且$T^*\neq T^{-1}=-\frac{1}{2}iI$。

从下一个例子很容易导出非正规的算子。读者可以证明§3.9习题10中的算子T也是一个非正规的算子。

在矩阵的研究中也采用定义3.10-1中的术语。我们下面阐明这样做的理由，并指出某些重要的关系。

3.10-2**例子（矩阵）**　我们考虑空间$\mathbf{C}^n$，其上的内积定义为（见3.1-4）。

$$\langle x, y\rangle=x^{\mathsf{T}}\bar{y} \tag{2}$$

其中x和y被写成列矢量，T表示转置；因而$x^{\mathsf{T}}=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，并且采用通常的矩阵乘法。

设T：$\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$是一个线性算子（其有界性在定理2.7-8中已证明）。$\mathbf{C}^n$的一个基一旦给定后，我们便能用两个n阶方阵来表示T及其希尔伯特伴随算子T^*，不妨设它们分别为A和B。

利用（2）和常用的矩阵乘积的转置运算法则，$(Bx)^{\mathsf{T}}=x^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}$我们得到

$$\langle Tx, y\rangle=(Ax)^{\mathsf{T}}\bar{y}=x^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}\bar{y}$$

及

$$\langle x, T^* y\rangle = x^{\mathsf T}\bar{B}\bar{y}$$

根据§3.9中的（1），上两式的左端对所有的x，$y\in \mathbf{C}^n$是相等的，因此必定有$A^{\mathsf T}=\bar{B}$。结果便得到

$$B=\bar{A}^{\mathsf T}$$

这个结果可表述如下：

若给定$\mathbf{C}^n$的一个基，则$\mathbf{C}^n$上的一个线性算子关于这个基有一个矩阵表示，而其希尔伯特伴随算子便可用该矩阵的复共轭转置来表示。

因此，有如下结论：

若T是自伴的，则表示矩阵为埃尔米特矩阵；

若T是酉算子，则表示矩阵为酉矩阵；

若T是正规算子，则表示矩阵为正规矩阵。

类似地，对线性算子T：$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，其结论是：

若T是自伴的，则表示矩阵为实对称阵；

若T是酉算子，则表示矩阵为正交矩阵。

就此来说，需要记住如下定义。对方阵$A=(\alpha_{jl})$而言：

如果$\bar{A}^{\mathsf T}=A$，（因此$\bar{a}_{kj}=a_{jk}$），则A叫做埃尔米特矩阵；

如果$\bar{A}^{\mathsf T}=-A$（因此$\bar{a}_{kj}=-\bar{a}_{jk}$），则$A$叫做反埃尔米特矩阵；

如果$\bar{A}^{\mathsf T}=A^{-1}$，则$A$叫做酉矩阵矩阵。

如果$A\bar{A}^{\mathsf T}=\bar{A}^{\mathsf T}A$，则$A$叫做正规矩阵。

对实方阵A而言：

如果$A^{\mathsf T}=A$，（因此$a_{kj}=a_{jk}$，）则A叫做（实）对称矩阵；

如果$A^{\mathsf T}=-A$，（因此$a_{kj}=-a_{jk}$），则A叫做（实）反对称矩阵；

如果$A^{\mathsf T}=A^{-1}$，则A叫做正交矩阵。

因此，实厄米特矩阵是（实）对称矩阵；实反厄米特矩阵是（实）反对称矩阵；实酉阵就是正交矩阵。（埃尔米特矩阵是在法国数学家*Charles Hermite*（1822-1901）死后被命名的。）

现在回到任意希尔伯特空间上的线性算子上来，并且陈述一个关于自伴性的重要而又相当简单的判据。

3.10-3定理（自伴性） 设T：$H\to H$是一个希尔伯特空间H上的有界线性算子，则

(*a*) 若T是自伴的，则$\langle Tx, x\rangle$对一切$x\in H$都是实的。

(*b*) 若H是复的且$\langle Tx, x\rangle$对一切$x\in H$都是实的，则算子T是自伴的。

证明：(a) 若T是自伴的，则对一切$x\in H$有

$$\overline{\langle Tx, x\rangle}=\langle x, Tx\rangle=\langle Tx, x\rangle$$

因此$\langle Tx, x\rangle$等于其复共轭，所以它是实的。

(*b*) 若$\langle Tx, x\rangle$对一切$x\in H$都是实的，则

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, T^*x\rangle = \langle T^*x, x\rangle$$

因此

$$0 = \langle Tx, x\rangle - \langle T^*x, x\rangle = \langle (T - T^*)x, x\rangle$$

并且$T - T^* = 0$，这是因为H是复的利用引理3.9-3(b)推出的。

在该定理的(b)中，H是复的这一条件必不可少。很明显，对实空间H来讲，其上的内积总是实的。所以对线性算子T不作任何进一步的假设，$\langle Tx, x\rangle$也是实的。

自伴算子的积（合成[①]）在应用中经常出现，所以下述定理是很有用的。

3.10-4定理（积的自伴性） 希尔伯特空间H上的两个有界自伴线性算子S和T的积，当且仅当S与T是可交换的，即

$$ST = TS$$

ST是自伴的。

证明：由假设和上节中的($6g$)，有

$$(ST)^* = T^*S^* = TS$$

因此

$$ST = (ST)^* \Longleftrightarrow ST = TS$$

这就完成了证明。

在各种问题中还会出现自伴算子的序列，为此我们有

3.10-5定理（自伴算子的序列） 设(T_n)是希尔伯特空间H上的一个有界自伴算子T_n: $H \to H$的序列。假定(T_n)是收敛的，比如说

$$T_n \to T, \quad \text{也就是} \quad \|T_n - T\| \to 0$$

其中$\|\cdot\|$是空间$B(H, H)$上的范数，见§2.10。则极限算子T是H上的有界自伴线性算子。

证明：我们应该证明$T^* = T$。这从$\|T - T^*\| = 0$可以推出。为此，用3.9-4和3.9-2有

$$\|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\|$$

再用$B(H, H)$中的三角不等式便得

$$\begin{aligned}\|T - T^*\| &\leqslant \|T - T_n\| + \|T_n - T_n^*\| + \|T_n^* - T^*\| \\ &= \|T - T_n\| + 0 + \|T_n - T\| \\ &= 2\|T_n - T\| \to 0 \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

因此$\|T - T^*\| = 0$，从而$T^* = T$。

关于自伴线性算子的基本性质，以上定理给予我们一些初步的概念。这对我们进一步的

---

① 关于映射合成方面的术语和记法，在附录1的A1.2中有一个复习材料。

研究是有帮助的，特别是对研究这些算子的谱论（第九章），更是如此。在那里将研究它们的其他性质。

现在我们转到酉算子并考察它们的某些基本性质。

3.10-6定理（酉算子） 设U：$H\to H$，V：$H\to H$都是酉算子，H是希尔伯特空间。则

(a) U是等距算子（见1.6-1）；因而对一切$x\in H$有$\|Ux\|=\|x\|$；

(b) 倘若$H\neq\{0\}$，$\|U\|=1$；

(c) $U^{-1}(=U^*)$是酉算子

(d) UV是酉算子；

(e) U是正规算子

此外，还有

(f) 复希尔伯特空间H上的有界线性算子T是酉算子，当且仅当T是等距的满射。

证明：(a) 可从下式推出：

$$\|Ux\|^2=\langle Ux,\ Ux\rangle=\langle x,\ U^*Ux\rangle=\langle x,\ Ix\rangle=\|x\|^2。$$

(b) 能直接从 (a) 推出。

(c) 由于U是对射，所以U^{-1}也是对射，据3.9-4

$$(U^{-1})^*=U^{**}=U=(U^{-1})^{-1}$$

(d) UV是对射，而由3.9-4和2.6-11便得

$$(UV)^*=V^*U^*=V^{-1}U^{-1}=(UV)^{-1}$$

(e) 可从$U^{-1}=U^*$和$UU^{-1}=U^{-1}U=I$推出。

(f) 假定T是等距满射。等距意味着内射性，所以T是对射。现证$T^*=T^{-1}$。根据等距，

$$\langle T^*Tx,\ x\rangle=\langle Tx,\ Tx\rangle=\langle x,\ x\rangle=\langle Ix,\ x\rangle$$

因此

$$\langle (T^*T-I)x,\ x\rangle=0$$

并且根据引理3.9-3(b) 有$T^*T-I=0$，故$T^*T=I$。由此又可得

$$TT^*=TT^*(TT^{-1})=T(T^*T)T^{-1}=TIT^{-1}=I$$

合在一起有$T^*T=TT^*=I$。因此$T^*=T^{-1}$，故T是酉算子。反过来，若T是酉算子，则据定义知T是满射，而据 (a) 知T是等距的。

要注意，等距算子未必是酉算子，因为它可以不是满射。由

$$(\xi_1,\ \xi_2,\xi_3,\cdots)\ \longmapsto(0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \cdots)$$

所给出的右移位算子T：$l^2\to l^2$就是一个例子，其中$x=(\xi_j)\in l^2$。

习　题

1.若S和T是希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子，α和β是实数，证明$\tilde{T}=\alpha S+$

βT是自伴的。

2.我们怎样能够利用定理3.10-3关于复希尔伯特空间来证明定理3.10-5?

3.证明：若T：$H\to H$是有界自伴线性算子，则对正整数n，T^n也是有界自伴线性算子。

4.证明：对H上的任意有界线性算子T，算子

$$T_1=\frac{1}{2}(T+T^*) \text{ 和 } T_2=\frac{1}{2i}(T-T^*)$$

是自伴的。并证明

$$T=T_1+iT_2,\quad T^*=T_1-iT_2$$

同时证明分解的唯一性，也就是，$T_1+iT_2=S_1+iS_2$蕴含着$S_1=T_1$和$S_2=T_2$；这里的S_1和S_2据假设是自伴的。

5.在C^2（见3.1-4）上用$Tx=(\xi_1+i\xi_2,\ \xi_1-i\xi_2)$来定义算子$T$：$C^2\to C^2$，其中$x=(\xi_1,\ \xi_2)$。求$T^*$。证明$T^*T=TT^*=2I$。求习题4中所定义的$T_1$和$T_2$。

6.若T：$H\to H$是有界自伴线性算子，并且$T\neq 0$，则$T^n\neq 0$。(*a*) 关于$n=2$，4，8，16，…来证明上述结论，(*b*) 关于每个$n\in N$来证明上述结论。

7.证明：酉矩阵的列矢量相对于C^n上的内积构成一个标准正交组。

8.证明：等距线性算子T：$H\to H$满足$T^*T=I$，其中I是H上的恒等算子。

9.证明：非酉算子的一个等距线性算子T：$H\to H$映希尔伯特空间H到H的一个真闭子空间上。

10.设X是一个内积空间，T：$X\to X$是一个等距线性算子。若$\dim X<\infty$，证明T是酉算子。

11.（**酉等价性**）设S和T是希尔伯特空间H上的线性算子。若在H上存在酉算子U，使得

$$S=UTU^{-1}=UTU^*$$

则称算子S酉等价于T。若T是自伴的，证明S是自伴的。

12.证明：T是正规算子当且仅当习题4中的T_1和T_2是可交换的。用二级的正规矩阵来说明之。

13.若T_n：$H\to H$（$n=1$，2，…）是正规线性算子且$T_n\to T$，证明T是正规线性算子。

14.若S和T是满足$ST^*=T^*S$及$TS^*=S^*T$的正规线性算子，证明其和$S+T$和其积ST也是正规线性算子。

15.证明：复希尔伯特空间H上的有界线性算子T：$H\to H$当且仅当对一切$x\in H$有$\|T^*x\|=\|Tx\|$，它才是正规算子。利用这个结论证明：对正规线性算子有$\|T^2\|=\|T\|^2$。

第四章　赋范空间和巴拿赫空间的基本定理

粗略地讲，这一章包含了赋范空间和巴拿赫空间的其他的理论基础。如果没有这些理论，巴拿赫空间的理论价值以及它们在实际问题中的应用都相当有限。本章的四个重要定理是：汉恩-巴拿赫（Hahn-Banach）定理，一致有界性定理，开映射定理，和闭图定理。它们是巴拿赫空间理论的奠基石。（第一个定理对任意的赋范空间都成立。）

本章内容概要

1.汉恩-巴拿赫定理 4.2-1（变形 4.3-1，4.3-2）。这是一个关于矢量空间上线性泛函的延拓定理。它保证了在赋范空间上能充分地填补线性泛函，从而获得足够的对偶空间的理论以及完满的伴随算子的理论（§§4.5，4.6）。

2.巴拿赫-斯坦因豪斯（Banach-Steinhaus）的一致有界性定理4.7-3。这个定理给出了（$\|T_n\|$）是有界的充分条件，其中 T_n 是巴拿赫空间到赋范空间的有界线性算子。它在分析中有各种（简单而深刻的）应用，例如在研究傅立叶级数(见4.7-5)，弱收敛性（§§4.8，4.9），序列的可和性（§4.10），数值积分（§4.11）等方面。

3.开映射定理4.12-2。这个定理是说，从一个巴拿赫空间到一个巴拿赫空间的有界线性算子T是一个开映射，即映开集到开集上。因此，若T是对射，T^{-1}是连续的（“有界逆定理”）。

4.闭图定理4.13-2。这个定理给出了闭线性算子（见4.13-1）为有界的条件。在物理和其它的应用中，闭线性算子是重要的。

§4.1　佐恩引理

在证明基本的汉恩-巴拿赫定理时，我们需要用佐恩引理。汉恩-巴拿赫定理是线性泛函的延拓定理，在建立这个定理时我们将论述它为什么重要。佐恩引理有各种应用，本节稍后将给出两个例子。引理的背景是半序集。

4·1-1　定义（半序集，链）　一个半序集是指在其上定义了“半序”关系的集合M，也就是存在一个满足如下条件的二元关系“$\leqslant$”：

（$Po1$）对每个 $a\in M$ 有 $a\leqslant a$。（自反性）

（$Po2$）若 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a$，则 $a=b$。（反对称性）

（$Po3$）若 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant c$，则 $a\leqslant c$。（传递性）

这里的“半”是强调，M可以包含既不满足 $a\leqslant b$,又不满足$b\leqslant a$ 的元素 a 和 b。这时把a和b叫做不可比较的元素。反之，若元素 a 和 b 满足关系 $a\leqslant b$ 与 $b\leqslant a$ 之一（或都满足），便叫做是可比较的元素。

全序集或链是每两个元素皆可比较的半序集。换句话说，链是一个不含有不可比较元素

的半序集。

半序集M的子集W的一个**上界**是指这样的一个元素$u\in M$，它使得对每个$x\in W$都有

$$x\leqslant u$$

（u依赖于M和W，它可能存在，也可能不存在。）M的**极大元**是指这样的一个$m\in M$，它使得

$$m\leqslant x \text{ 蕴含着 } m=x$$

（同样，M可能有也可能没有极大元。要注意，极大元不必是一个上界。）

例子

4.1-2 实数 设$M=R$，并且$x\leqslant y$取通常的含义。M是一个全序集。M没有极大元。

4.1-3 幂集 设$\mathscr{P}(X)$是由给定集合X的所有子集构成的集合，叫做X的幂集。令$A\leqslant B$表示$A\subset B$的意思，即A是B的子集。则$\mathscr{P}(X)$是一个半序集，$\mathscr{P}(X)$的唯一极大元为X。

4.1-4 n元实序组 设M是所有形如

$$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \qquad y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$$

等的n元实序组构成的集合。令$x\leqslant y$表示对每个$j=1,2,\cdots n$都有$\xi_j\leqslant\eta_j$，而其中$\xi_j\leqslant\eta_j$取通常的含义，这便在M上定义了半序。

4.1-5 正整数集 设$M=N$，即所有正整数集。令$m\leqslant n$表示m能整除n。这也在M上定义了半序。

在习题中给出了另外的例子。也可看G.伯柯夫〔*Birkoff* (1967)〕。

有了4.1-1中定义的几个概念，我们便能够描述佐恩引理，它是被当作一个公理①来看待的。

4.1-6 佐恩引理 设$M\neq\phi$是半序集。假若每一个链$C\subset M$都有一个上界，则M至少有一个极大元。

应用

4.1-7 哈梅尔（Hamel）基 每个矢量空间$X\neq\{0\}$都存在一个哈梅尔基（见§2.1）。

证明：设M是X的所有线性无关子集构成的集合。由于$X\neq\{0\}$，所以有$0\neq x\in X$，从而有$\{x\}\in M$，说明了$M\neq\phi$。用集的“包含”关系在M上定义半序（见4.1-3）。每个链$C\subset M$都有一个上界，即C中所含X的所有子集之并。因此，根据佐恩引理M有一个极大元B。可以断言B就是X的一个哈梅尔基。为此，令$Y=\operatorname{span}(B)$，则Y是X的一个子空间，特别有$Y=X$。否则，便存在$z\in X$且$z\notin Y$，从而$B\cup\{z\}$便是一个以B为真子集的线性无关集，即$B\cup\{z\}\in M$，这就与B的极大性发生矛盾。

4.1-8 完全标准正交集 每个希尔伯特空间$H\neq\{0\}$都存在一个完全标准正交集（见§3.6）。

证明：设M是H的所有标准正交子集构成的集合。由于$H\neq\{0\}$，故有$0\neq x\in H$，从而H的标准正交子集为$\{y\}$，$\{y\}=\{\|x\|^{-1}x\}\in M$，这说明$M\neq\phi$。仍用集的“包含”关系在$M$上定义半序，则$M$为半序集，显然$M$中的每个链$C$都存在一个上界，即$C$中所含$X$的所有子

---

① “引理”一词是历史造成的。佐恩引理能从选择公理推出。所谓选择公理，是说对给定的集合E，存在一个从幂集$\mathscr{P}$(E)到E的映射c（“选择函数”），使得若B⊂E，B≠φ，便有c(B)∈B。反之，选择公理也能从佐恩引理推出，所以佐恩引理与选择公理是等价的公理。

集之并。据佐恩引理，M有一极大元F。现证F是H中的完全标准正交集。采取反证法，若F不是完全的，则根据定理 3.6-2，一定存在$0 \neq z \in H$且$z \perp F$。因此$F_1 = F \cup \{e\}$也是一个标准正交集，其中$e = \|z\|^{-1}z$。故$F_1 \in M$，且F_1以F为其真子集。这就与F的极大性发生矛盾。

习　题

1. 验证例子 4.1-3 中的论断。

2. 设X是区间$[0, 1]$上的所有实值函数构成的集合，而$x \leqslant y$意味着对所有的$t \in [0, 1]$都有$x(t) \leqslant y(t)$。证明这样可定义一个半序。它是一个全序吗？X有极大元吗？

3. 证明：对于所有复数$z = x + iy$，$w = u + iv \cdots$的集合，规定$z \leqslant w$意味着$x \leqslant u$和$y \leqslant v$，便能定义一个半序，其中对于实数而言，$\leqslant$就取通常的含义。

4. 相对于例 4.1-5 中的半序，求出M的所有极大元，其中M是(a)$\{2, 3, 4, 8\}$，(b)所有素数的集合。

5. 求证：有限半序集A至少有一个极大元。

6. (**最小元，最大元**) 证明：半序集M至多能有一个元a，使得对一切$x \in M$有$a \leqslant x$，并且至多能有一个元b，使得对一切$x \in M$有$x \leqslant b$。〔若这样的a（或b）存在，便叫做M的最小（最大）元，〕

7. (**下界**) 半序集M的子集$A \neq \phi$的一个下界，是指对一切$y \in A$都满足$x \leqslant y$的$x \in M$。求例 4.1-5 中子集$A = \{4, 6\}$的上界和下界。

8. 半序集M的子集$A \neq \phi$的最大下界是指A的这样一个下界x，它使得对A的任一下界l都有$l \leqslant x$；记之为$x = g \cdot l \cdot b \cdot A = \inf A$。类似地，$A$的最小上界，记之为$y = l \cdot u \cdot b \cdot A = \sup A$，是$A$的这样一个上界$y$，它使得对$A$的任一上界$u$都有$y \leqslant u$。(a)若$A$有一个$g \cdot l \cdot b$，证明它是唯一的。(b)例 4.1-3 中的$g \cdot l \cdot b\{A, B\}$和$l \cdot u \cdot b\{A, B\}$各是什么？

9. (**格**) 一个半序集M，如果它的任意两个元素x，y都有一个$g \cdot l \cdot b$（记为$x \wedge y$）和一个$l \cdot u \cdot b$（记为$x \vee y$），则称M为一个格。证明例4.1-3 中的半序集是一个格，其中$A \wedge B = A \cap B$，$A \vee B = A \cup B$。

10. 一个半序集M的极小元是指满足"$y \leqslant x \Rightarrow y = x$"的$x \in M$。求习题4(a)中的所有极小元。

§4.2　汉恩—巴拿赫定理

汉恩-巴拿赫定理是一个线性泛函的延拓定理。在下一节我们将会看到，这个定理保证了赋范空间充分地配备了有界线性泛函，并且使我们有可能得到足够的对偶空间理论。而这些理论也是赋范空间一般理论的根本部分。从这个意义上来说，汉恩-巴拿赫定理是关于有界线性算子的最重要的定理之一。此外，我们的讨论还表明，该定理还表征线性泛函可按预先设计的值进行延拓。该定理是在 1927 年由H·汉恩发现的。而目前较为一般的形式（定理 4.2-1）是在 1929年由S·巴拿赫重新发现的，1938 年博南布卢斯特（$H.F.Bohnenblust$）和索布茨克（$A.Sobczyk$）把它推广到复线性空间（定理 4.3-1）。见附录 3 中的参考文献。

一般地说，在延拓问题中我们所考虑的数学对象（比如映射）本来是定义在给定集合X

的一个子集Z上，希望把它从Z延拓到整个的X上，并且要求原对象的某些性质在延拓后能继续保留。

在汉恩-巴拿赫定理中，被延拓的对象是定义在线性空间X的子空间Z上的线性泛函f，还要求这个泛函具有一定的有界性质，而这个有界性质是用**次线性泛函**来描述的。所谓次线性泛函，是定义在线性空间X上的一个实值泛函p，并且是**次可加的**，即

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y) \qquad 对一切\ x,\ y\in X \tag{1}$$

而且p还是**正齐次的**，即

$$p(\alpha x)=\alpha p(x) \qquad 对R中一切实数 \quad \alpha\geqslant 0\ 及x\in X \tag{2}$$

（注意，赋范空间上的范数就是这样的一个泛函。）

我们将假定，要延拓的泛函f在Z上用定义在X上的这样一个泛函p来强制，并且在将f从Z延拓到X上后，仍保留其线性性及被强制的条件，所以延拓到X上的泛函$\tilde{f}$仍然是线性的和仍为p所强制。这也是定理的难点。在这一节，考虑的空间X是实的。定理在复空间的推广放在下一节。

4·2-1汉恩-巴拿赫定理（线性泛函的延拓） 设X是一个实矢量空间，p是定义在X上的一个次线性泛函。此外，设f是定义在X的子空间Z上的一个线性泛函，且满足

$$f(x)\leqslant p(x) \qquad 对一切 \quad x\in Z \tag{3}$$

则f有一个从Z到X的线性延拓$\tilde{f}$，且满足

$$\tilde{f}(x)\leqslant p(x) \qquad 对一切 \quad x\in X \tag{3*}$$

即$\tilde{f}$是X上的一个线性泛函，在X上满足（3*），对每个$x\in Z$有$\tilde{f}(x)=f(x)$。

证明：证明过程分以下几步：

(a)设E是f的所有这样的线性延拓g的集合，在它们的定义域$\mathscr{D}(g)$上，都满足$g(x)\leqslant p(x)$。在E上定义半序，再据佐恩引理得到E的极大元$\tilde{f}$，

(b)证明$\tilde{f}$是定义在整个空间X上。

(c)证明一个在(b)中利用的辅助关系。

下面开始证明

(a)设E是所有满足下述条件的f的线性延拓g的集合，即对所有的$x\in\mathscr{D}(g)$有

$$g(x)\leqslant p(x)$$

由于$f\in E$，显然$E\neq\phi$。通过

$$g\leqslant h \qquad 意味着\ h\ 是\ g\ 的一个延拓$$

能够在E上定义半序，即据定义，$\mathscr{D}(h)\supset\mathscr{D}(g)$并且对每个$x\in\mathscr{D}(g)$有$h(x)=g(x)$。

对任意一个链$C\subset E$，我们用

$$若x\in\mathscr{D}(g),\ \hat{g}(x)=g(x) \qquad (g\in C)$$

来定义$\hat{g}$，$\hat{g}$是一个线性泛函，其定义域为

$$\mathscr{D}(\hat{g})=\bigcup_{g\in C}\mathscr{D}(g)$$

因为C是一个链，故$\mathscr{D}(\hat{g})$是一个矢量空间。$\hat{g}$的定义是明确的。事实上，对于g_1，$g_2\in C$和$x\in\mathscr{D}(g_1)\cap\mathscr{D}(g_2)$，由于$C$是一个链，所以有$g_1\leqslant g_2$或$g_2\leqslant g_1$，从而$g_1(x)=g_2(x)$。很显然，对所有的$g\in C$有$g\leqslant\hat{g}$，因此$\hat{g}$是$C$的一个上界。由于$C\subset E$是任意的，因而据佐

恩引理E有一个极大元$\tilde{f}$。而据E的定义，$\tilde{f}$是f的一个线性延拓，且满足

$$\tilde{f}(x)\leqslant p(x) \qquad x\in\mathscr{D}(\tilde{f}) \tag{4}$$

(b) 现在来证明$\mathscr{D}(\tilde{f})=X$。假若$\mathscr{D}(\tilde{f})\neq X$，则可选取一个$y_1\in X-\mathscr{D}(\tilde{f})$。考察$X$的子空间$Y_1=\operatorname{span}(\mathscr{D}(\tilde{f}),\ y_1)$。注意到$0\in\mathscr{D}(\tilde{f})$，故$y_1\neq 0$。故每个$x\in Y_1$都能写成

$$x=y+\alpha y_1, \qquad y\in\mathscr{D}(\tilde{f})$$

并且这个表示是唯一的。事实上，若$y+\alpha y_1=\tilde{y}+\beta y_1$，$\tilde{y}\in\mathscr{D}(\tilde{f})$，则$y-\tilde{y}=(\beta-\alpha)y_1$。而$y-\tilde{y}\in\mathscr{D}(\tilde{f})$，又$y_1\notin\mathscr{D}(\tilde{f})$，故只能有$y-\tilde{y}=0$和$\beta-\alpha=0$。这就推出了唯一性。

在Y_1上用

$$g_1(y+\alpha y_1)=\tilde{f}(y)+\alpha c \tag{5}$$

来定义泛函g_1，其中c是任一实常数。不难看出g_1是线性的。此外，对$\alpha=0$还有$g_1(y)=\tilde{f}(y)$。因此g_1是$\tilde{f}$的一个真正延拓，也就是说，这个延拓使得$\mathscr{D}(\tilde{f})$是$\mathscr{D}(g_1)$的真子集。如果我们能证明对所有的$x\in\mathscr{D}(g_1)$满足，

$$g_1(x)\leqslant p(x) \tag{6}$$

则便证明了$g_1\in E$，这将与$\tilde{f}$的极大性发生矛盾，从而说明$\mathscr{D}(\tilde{f})\neq X$是不真的，而$\mathscr{D}(\tilde{f})=X$是真实的。

(c) 按照(b)的需要，最后我们必须证明用适当的c在（5）中所定义的g_1是满足（6）的。

我们来考察任意的y，$z\in\mathscr{D}(\tilde{f})$。从（4）和（1）我们得到

$$\begin{aligned}\tilde{f}(y)-\tilde{f}(z)=\tilde{f}(y-z)&\leqslant p(y-z)\\ &=p(y+y_1-y_1-z)\\ &\leqslant p(y+y_1)+p(-y_1-z)\end{aligned}$$

把上式最后一项移至左端，$\tilde{f}(y)$项移至右端，我们得到

$$-p(-y_1-z)-\tilde{f}(z)\leqslant p(y+y_1)-\tilde{f}(y) \tag{7}$$

其中y_1是固定的。由于左端不含y，而右端不含z，所以若左端关于$z\in\mathscr{D}(\tilde{f})$取上确界（记之为$m_0$），右端关于$y\in\mathscr{D}(\tilde{f})$取下确界（记之为$m_1$）不等式仍然成立。因此有$m_0\leqslant m_1$，而取$c$满足$m_0\leqslant c\leqslant m_1$，便从（7）可推得

$$-p(-y_1-z)-\tilde{f}(z)\leqslant c \qquad \text{对一切}\quad z\in\mathscr{D}(\tilde{f}) \tag{8a}$$

$$c\leqslant p(y+y_1)-\tilde{f}(y) \qquad \text{对一切}\quad y\in\mathscr{D}(\tilde{f}) \tag{8b}$$

我们首先就（5）中的α为负数时来证明（6），然后再就α为正数时证明。对于$\alpha<0$，在(8a)中取$z=\alpha^{-1}y$，便有

$$-p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)-\tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right)\leqslant c$$

两端用$-\alpha>0$去乘，便得

$$\alpha p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)+\tilde{f}(y)\leqslant-\alpha c$$

从该式和（5），再用$y+\alpha y_1=x$（见上面），便得到所需要的不等式

$$g_1(x)=\tilde{f}(y)+\alpha c\leqslant-\alpha p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)=p(\alpha y_1+y)=p(x)$$

对于$\alpha=0$有$x\in\mathscr{D}(\tilde{f})$，没有什么可证明的。对于$\alpha>0$，在(8b)中取$y=\alpha^{-1}y$，便得到

$$c \leqslant p\left(\frac{1}{\alpha} y + y_1\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha} y\right)$$

用 $\alpha > 0$ 去乘上式两端便有

$$\alpha c \leqslant \alpha p\left(\frac{1}{\alpha} y + y_1\right) - \tilde{f}(y) = p(x) - \tilde{f}(y)$$

由此和（5）便得

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leqslant p(x)$$

不用佐恩引理能够证明这个定理吗？这个问题很有意思，特别是引理没有给出一个构造性的方法。如果在（5）中我们取 $\tilde{f} = f$，对每一个实数 c，便得到 f 的一个从 $\mathscr{D}(f)$ 到子空间 $Z_1 = \mathrm{span}(\mathscr{D}(f) \cup \{y_1\})$ 的线性延拓 g_1，并且能够选 c 使得对一切 $x \in Z_1$ 都满足 $g_1(x) \leqslant p(x)$，在(c)的证明中只要取 $\tilde{f} = f$ 就能办到。若 $X = Z_1$，证明便告结束。若 $X \neq Z_1$，取 $y_2 \in X - Z_1$，重复 f 到 $Z_2 = \mathrm{span}(Z_1, y_2)$ 的延拓过程。如此下去，便得到一个子空间序列 (Z_n)，并且对每个 n 都有 $Z_n \subset Z_{n+1}$，使得 f 能够线性地从 Z_n 延拓到 Z_{n+1} 上，还对一切 $x \in Z_n$ 满足 $g_n(x) \leqslant p(x)$，这里的 g_n 是 f 延拓到 Z_n 上的线性泛函。若

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} Z_j$$

则延拓 n 次后便告完成。但若

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j$$

我们能够用归纳法证明。然而，若 X 没有这样的一个表示，我们必须象上面证明的那样求助于佐恩引理了。

当然，对一些特殊的空间整个情形可能要变得简单些。希尔伯特空间就是这种类型，因为该空间上的线性泛函有黎斯表示 3.8-1，在下一节我们就要讨论这一事实。

习　题

1. 证明：线性泛函的绝对值具有（1）和（2）所描述的性质。

2. 证明：矢量空间 X 上的范数是 X 上的一个次线性泛函。

3. 证明：$p(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n$，其中 $x = (\xi_n) \in l^\infty$，ξ_n 是实数，在 l^∞ 上定义了一个次线性泛函。

4. 证明：次数性泛函 p 满足 $p(0) = 0$ 和 $p(-x) \geqslant -p(x)$。

5.（**凸集**）若 p 是矢量空间 X 上的一个次线性泛函，证明 $M = \{x \mid p(x) \leqslant \gamma,\ \gamma > 0$ 是固定的$\}$ 是一个凸集。（见 §3.3.）

6. 若赋范空间 X 上的次加性泛函 p 在 0 是连续的且 $p(0) = 0$，证明对一切 $x \in X$，p 是连续的。

7. 若 p_1 和 p_2 是矢量空间 X 上的次线性泛函，而 c_1 和 c_2 是两个正的常数，证明 $p = c_1 p_1 + c_2 p_2$ 是 X 上的次线性泛函。

8. 若赋范空间X上的次加性泛函在球面$\{x \mid \|x\|=r\}$外是非负的，证明它在整个X上都是非负的。

9. 设p是实矢量空间X上的次线性泛函，而f是用$f(x)=\alpha p(x_0)$在$Z=\{x\in X \mid x=\alpha x_0, \alpha\in\mathbf{R}\}$上定义的泛函，其中$x_0\in X$是固定的。证明$f$是$Z$上满足$f(x)\leqslant p(x)$的一个线性泛函。

10. 若p是实矢量空间X上的一个次线性泛函，证明在X上存在一个线性泛函$\tilde{f}$满足。

$$-p(-x)\leqslant \tilde{f}(x)\leqslant p(x)$$

§4.3 复矢量空间和赋范空间的汉恩-巴拿赫定理

汉恩-巴拿赫定理4.2-1是关于实矢量空间的。其包括到复矢量空间的一个推广是由$H.F.$博南布卢斯特和$A.$索布茨克(1938)得到的。

4.3-1 汉恩-巴拿赫定理（推广） 设X是实的或复的矢量空间，p是X上的一个次可加的实值泛函，即对一切x，$y\in X$有

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y) \tag{1}$$

（同定理4.2-1一样），并且对每一个标量α满足

$$p(\alpha x)=|\alpha|p(x) \tag{2}$$

此外，设f是定义在X的子空间Z上的一个线性泛函且满足

$$|f(x)|\leqslant p(x) \qquad \text{对一切 } x\in Z \tag{3}$$

则f有一个从Z到X的线性延拓$\tilde{f}$，且满足

$$|\tilde{f}(x)|\leqslant p(x) \qquad \text{对一切} x\in X \tag{3*}$$

证明(a)实矢量空间。若X是实的，情形是简单的。则式(3)蕴含着对一切$x\in Z$有$f(x)\leqslant p(x)$。因此，据汉恩-巴拿赫定理4.2-1存在从Z到X的一个线性延拓$\tilde{f}$，且满足

$$\tilde{f}(x)\leqslant p(x) \qquad \text{对一切} x\in X \tag{4}$$

由此式和(2)便得到

$$-\tilde{f}(x)=\tilde{f}(-x)\leqslant p(-x)=|-1|p(x)=p(x)$$

亦即$\tilde{f}(x)\geqslant -p(x)$，与(4)合在一起就证明了(3*)。

(b)复矢量空间。设X是复的。则Z也是一个复矢量空间。因此f是复值的泛函，我们可把它写成

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x) \qquad x\in Z$$

其中f_1和f_2都是实值的。等一会我们把X和Z看作为实矢量空间，并分别用X_r和Z_r来表示它们；这就简单地意味着，我们限制在只用实数作标量乘法（代替了复数）。由于f在Z上是线性的，并且f_1和f_2是实值的，所以f_1和f_2是Z_r上的线性泛函。因为复数的实部不能超过其绝对值，故有$f_1(x)\leqslant|f(x)|$。因此，根据(3)有

$$f_1(x) \leqslant p(x) \qquad \text{对一切} x \in Z,$$

根据汉恩-巴拿赫定理 4.2-1，存在f_1的一个从Z_r到X_r的线性延拓 $\tilde{f}_1$，且满足

$$\tilde{f}_1(x) \leqslant p(x) \qquad \text{对一切} x \in X_r \tag{5}$$

这就解决了 f_1，现转到 f_2。回到Z并利用 $f = f_1 + if_2$，对每个$x \in Z$我们有

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix)$$

两端的实部一定是相等的：

$$f_2(x) = -f_1(ix) \qquad x \in Z \tag{6}$$

因此，若对一切 $x \in X$，令

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix) \qquad x \in X \tag{7}$$

则从（6）可以看出，在Z上有 $\tilde{f}(x) = f(x)$。这就证明了 $\tilde{f}$ 是f的一个从Z到X的延拓。剩下的任务是要证明

（i）$\tilde{f}$ 是复矢量空间X上的一个线性泛函，

（ii）在X上 $\tilde{f}$满足(3*)。

利用（7）及$\tilde{f}_1$在实矢量空间X_r上的线性性，对任意的复标量 $a+ib$，其中a，b 为实数，通过下面的计算

$$\begin{aligned}\tilde{f}[(a+ib)x] &= \tilde{f}_1(ax+ibx) - i\tilde{f}_1(iax-bx)\\ &= a\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix) - i[a\tilde{f}_1(ix) - b\tilde{f}_1(x)]\\ &= (a+ib)[\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)]\\ &= (a+ib)\tilde{f}(x)\end{aligned}$$

便能看出(i)是成立的。现在证明(ii)。对任意满足$\tilde{f}(x)=0$ 的 x，根据式（1）和式（2）可推出$p(x) \geqslant 0$，所以(ii)是成立的，也见习题 1 。设 x使得 $\tilde{f}(x) \neq 0$。利用复数的指数形式表示，可把 $\tilde{f}(x)$写成

$$\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)| e^{i\theta}, \qquad \text{故} \quad |\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(x)e^{-i\theta} = \tilde{f}(e^{-i\theta} x)$$

由于 $|\tilde{f}(x)|$ 是实的，所以$\tilde{f}(e^{-i\theta}x)$ 也是实的，因而等于其实部。因此由（2）便得到

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{f}_1(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|\, p(x) = p(x)$$

这就完成了整个的证明。

虽然汉恩-巴拿赫定理没有直接谈到连续性，但这个定理的一个主要应用是研究有界线性泛函的。这就要回到赋范空间，它也是我们最关心的。事实上，定理 4.3-1 蕴含着下面的基本定理。

4.3-2汉恩-巴拿赫定理（赋范空间） 设 f是定义在赋范空间X的子空间Z上的一个有界线性泛函。则在X上存在一个有界线性泛函 $\tilde{f}$，它是 f的从Z到X的一个延拓，并且有和f相同的范数，即

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z \tag{8}$$

其中

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)|, \qquad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

（而在 $Z = \{0\}$ 的情况下，$\|f\|_Z = 0$）

证明：若 $Z = \{0\}$，则 $f = 0$，因而其延拓为 $\tilde{f} = 0$。设 $Z \neq \{0\}$。我们希望利用定理4.3-1。因此我们先必须找到一个适当的 p。由于对一切 $x \in Z$ 有

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_Z \|x\|$$

这就是（3）的形式，其中

$$p(x) = \|f\|_Z \|x\| \tag{9}$$

我们看到，这个 p 是定义在整个 X 上的。此外，由三角不等式

$$p(x+y) = \|f\|_Z \|x+y\| \leqslant \|f\|_Z \|x\| + \|f\|_Z \|y\| = p(x) + p(y)$$

可推出，p 在 X 上满足（1），而由于

$$p(\alpha x) = \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha| \ \|f\|_Z \|x\| = |\alpha| \ p(x)$$

故 p 在 X 上还满足（2）。因此便能够应用定理 4.3-1 而得到：在 X 上存在一个线性泛函 $\tilde{f}$，它是 f 的一个延拓，且满足

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x) = \|f\|_Z \|x\| \qquad x \in X$$

关于一切范数等于 1 的 $x \in X$ 取上确界，便得到不等式

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| \leqslant \|f\|_Z$$

由于在延拓之下这个范数不会减小，所以又有 $\|\tilde{f}\|_X \geqslant \|f\|_Z$。合在一起便得到（8），定理获证。

在特殊的情况下，上述情形可能变得很简单。希尔伯特空间就是如此。事实上，若 Z 是希尔伯特空间 $X = H$ 的一个闭子空间，则 f 有一个黎斯表示 3.8-1，比如说

$$f(x) = \langle x, z\rangle \qquad z \in Z$$

其中 $\|z\| = \|f\|$。当然，由于内积定义在整个 H 上，这就立即给出了 f 的一个从 Z 到 H 的线性延拓 $\tilde{f}$，因为据定理 3.8-1 有 $\|\tilde{f}\| = \|z\| = \|f\|$，所以 $\tilde{f}$ 和 f 有相同的范数。因此，在这种情况下延拓是很直接的。

从定理 4.3-2 我们还能推导出另一个非常有用的结果，粗略地说，它表明赋范空间 X 的对偶空间 X' 由充分多的有界线性泛函组成，这些泛函多到可以用来分辨 X 的点。关于伴随算子（§4.5）和所谓的弱收敛性（§4.8）的研究，它将成为不可缺少的工具。

4·3-3定理（有界线性泛函） 设 X 是一个赋范空间，而 $x_0 \neq 0$ 是 X 的任一元素。则在 X 上存在一个有界线性泛函 $\tilde{f}$，它满足

$$\|\tilde{f}\| = 1, \qquad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$$

证明：我们考虑X的子空间$Z = \text{span}(x_0)$。则任一$x \in Z$有$x = \alpha x_0$，α是标量。在Z上我们定义线性泛函f如下

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\| \tag{10}$$

由于

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \, \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|$$

故f是有界的，且有范数$\|f\| = 1$。再根据定理 4.3-2，f有一个从Z到X的线性延拓$\tilde{f}$，且范数$\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$。从式（10）便可看出$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$。

4·3-4推论（范数，零矢量） 对于赋范空间X中的每个x，都有

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \tag{11}$$

因此，若x_0对所有的$f \in X'$都有$f(x_0) = 0$，则$x_0 = 0$。

证明：在定理 4.3-3 中，把x_0换成x，便有

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geqslant \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|\tilde{f}\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|$$

而从$|f(x)| \leqslant \|f\| \, \|x\|$又可得到

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leqslant \|x\|$$

习　题

1.（半范数） 证明（1）和（2）蕴含着$p(0) = 0$和$p(x) \geqslant 0$，所以p是一个半范数(见§2.3 习题 12）。

2. 证明式（1）和式（2）蕴含着$|p(x) - p(y)| \leqslant p(x - y)$。

3. 已经证明式（7）所定义的$\tilde{f}$是复矢量空间X上的一个线性泛函。证明：为此只要证明$\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x)$就够了。

4. 设p是定义在矢量空间X上的且满足（1）和（2）的泛函。证明：对任一给定的$x_0 \in X$，都存在X上的一个线性泛函$\tilde{f}$，它满足$\tilde{f}(x_0) = p(x_0)$并对一切$x \in X$还满足$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x)$。

5. 若定理 4.3-1 中的X是一个赋范空间，而对某一$k > 0$有$p(x) \leqslant k\|x\|$，试证$\|\tilde{f}\| \leqslant k$。

6. 为了说明定理 4.3-2，考虑用$f(x) = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$，$x = (\xi_1, \xi_2)$，在欧氏平面$\mathbf{R}^2$上定义的泛函$f$，给出它的到$\mathbf{R}^3$的线性延拓$\tilde{f}$及相应的范数。

7. 在希尔伯特空间的情况下，给出定理 4.3-3 的另一个证明。

8. 设X是一个赋范空间，X'是其对偶空间。若$X \neq \{0\}$，证明X'也不能是$\{0\}$。

9. 对可分的赋范空间X，不用佐恩引理，试给出定理 4.3-2 的直接证明。（佐恩引理被间接地应用在定理 4.2-1 的证明中。）

10. 直接从 4.3-3 得到 4.3-4 中的第二个论断。

11. 若对赋范空间X上的每一个有界线性泛函 f 都有 $f(x)=f(y)$，试明 $x=y$。

12. 为了说明定理 4.3-3，设X是欧氏平面 $\mathbf{R}^2$，求泛函 $\tilde{f}$。

13. 证明：在定理 4.3-3 的假设下，在X上有一个有界线性泛函$\hat{f}$，它满足 $\|\hat{f}\|=\|x_0\|^{-1}$及$\hat{f}(x_0)=1$。

14.（**超平面**）证明：对赋范空间X中的任一球面 $S(0;\ r)$ 和任一点 $x_0\in S(0;\ r)$，都存在一个超平面 $H_0\ni x_0$，使得球 $\tilde{B}(0;\ r)$ 整个都落在由 H_0 所确定的两个半空间中的一个之内。（见 §2.8 习题 12，15.）图 39 给出了一个简单的说明。

15. 若赋范空间X中的一点 x_0，对所有范数等于 1 的 $f\in X$ 都有 $|f(x_0)|\leqslant c$，证明 $\|x_0\|\leqslant c$。

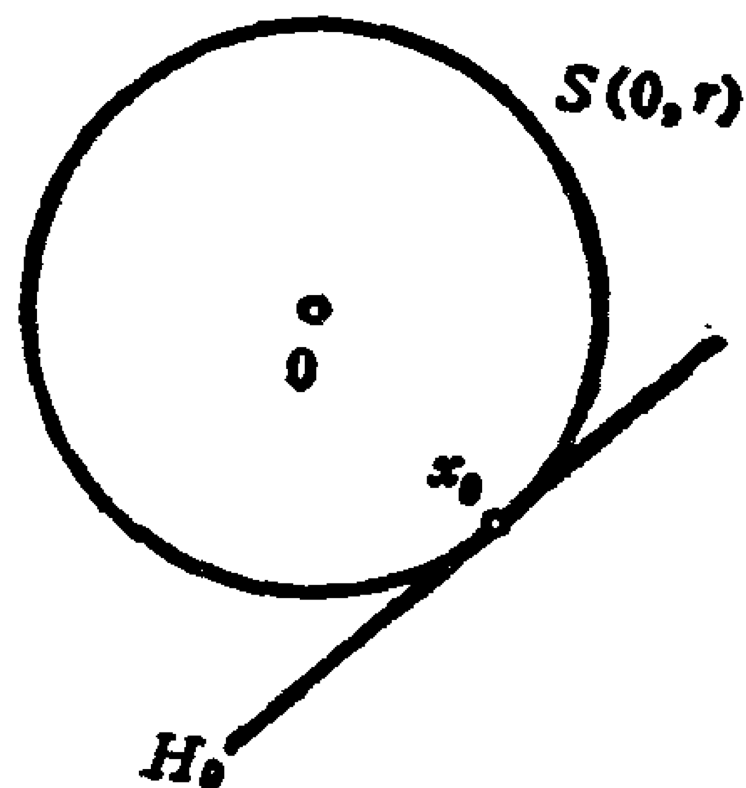


图39　在欧氏平面$\mathbf{R}^2$的情况下对习题14的说明

§4.4　应用到C〔a, b〕上的有界线性泛函

汉恩-巴拿赫定理4.3-2有很多重要的应用。上一节我们研究了其中的一个。本节再介绍另一个应用①。事实上，我们要利用定理 4.3-2 得到$C[a,\ b]$上有界线性泛函的一般表示公式，其中$[a,\ b]$是一个给定的紧区间。对于特殊空间上泛函的这种一般表示，其重要的意义已在 §2.10 的末尾阐明过。而在目前的情况下，泛函的表示是一个黎曼-斯蒂杰积分。所以让我们回想一下这个积分的定义和几个性质，它是大家熟知的黎曼积分的一个推广。我们从下面的概念开始。

首先对定义在$[a,\ b]$上函数w，来定义

$$\mathrm{Var}(w)=\sup\sum_{j=1}^{n}|w(t_j)-w(t_{j-1})| \qquad (1)$$

式中的上确界是关于区间$[a,\ b]$的所有分割

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b \qquad (2)$$

来取的，其中分点的个数$n\in N$是任意的，并且 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$的值是在$[a,\ b]$上任选的，但必须满足（2）。（1）中的$\mathrm{Var}(w)$叫做函数$w$在$[a,\ b]$上的**全变差**。当 $\mathrm{Var}(w)$ 是有限的时，函数 w 叫做$[a,\ b]$上的**有界变差**函数。

很显然，定义在$[a,\ b]$上的一切有界变差函数构成一个矢量空间，在这个空间上定义范数

$$\|w\|=|w(a)|+\mathrm{Var}(w) \qquad (3)$$

后，便得到一个赋范空间，记之为$BV[a,\ b]$，这里的BV是取"*bounded Variation*"两词的字头。

现在给出黎曼-斯蒂杰积分的概念如下：设$x\in C[a,b]$，$w\in BV[a,b]$，P_n表示由(2)给出的$[a,b]$的一个分割，并用$\eta(P_n)$表示各区间$[t_{j-1},t_j]$的最大长度，即

① 这一节是选用内容，后面只有一次要用到本节的结果。(即 §9.9)

$$\eta(P_n)=\max(t_1-t_0,\ t_2-t_1,\ \cdots,\ t_n-t_{n-1})$$

对$[a,b]$的每个分割P_n，我们考察和式

$$s(P_n)=\sum_{j=1}^{n}x(t_j)[w(t_j)-w(t_{j-1})] \qquad (4)$$

如果存在一个具有如下性质的数φ：对每个$\varepsilon>0$，都有一个$\delta>0$，使得当

$$\eta(P_n)<\delta \qquad (5)$$

时总有

$$|\varphi-s(P_n)|<\varepsilon \qquad (6)$$

成立，则称φ为x在$[a,b]$上关于w的**黎曼-斯蒂杰积分**，并记之为

$$\int_a^b x(t)\,dw(t) \qquad (7)$$

因此，式（7）可以认为是和式（4）关于$[a,b]$的分割序列(P_n)的极限，当然P_n应该满足，当$n\to\infty$时有$\eta(P_n)\to 0$；见（5）。

注意，若$w(t)=t$，积分（7）就是大家熟知的$x(t)$在$[a,b]$上的黎曼积分。

再者，若x在$[a,b]$上是连续的，w在$[a,b]$上有可积的导数，则

$$\int_a^b x(t)\,dw(t)=\int_a^b x(t)w'(t)\,dt \qquad (8)$$

其中符号（$'$）表示关于t的微分

积分（7）关于$x\in C[a,b]$是线性的，即对一切x_1，$x_2\in C[a,b]$和标量α，β，有

$$\int_a^b[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]\,dw(t)=\alpha\int_a^b x_1(t)\,dw(t)+\beta\int_a^b x_2(t)\,dw(t)$$

积分（7）关于$w\in BV[a,b]$也是线性的，即对一切w_1，$w_2\in BV[a,b]$和标量γ，δ，有

$$\int_a^b x(t)\,d[\gamma w_1(t)+\delta w_2(t)]=\gamma\int_a^b x(t)\,dw_1(t)+\delta\int_a^b x(t)\,dw_2(t)$$

我们还需要不等式

$$\left|\int_a^b x(t)\,dw(t)\right|\leqslant\max_{t\in J}|x(t)|\,\mathrm{Var}(w) \qquad (9)$$

其中$J=[a,b]$。我们注意到这里推广了微积分中大家所熟悉的一个公式。事实上，若$w(t)=t$，则$\mathrm{Var}(w)=b-a$，而（9）便取

$$\left|\int_a^b x(t)\,dt\right|\leqslant\max_{t\in J}|x(t)|\,(b-a)$$

$C[a,b]$上的有界线性泛函的表示定理是F·黎斯（1909）给出的，兹陈述如下：

4·4-1黎斯定理（C[a,b]上的泛函） $C[a,b]$上的每个有界线性泛函f都能用一个黎曼-斯蒂杰积分表示为

$$f(x)=\int_a^b x(t)\,dw(t) \tag{10}$$

其中 w 是〔a,b〕上的有界变差函数，并有总变差

$$\mathrm{Var}(w)=\|f\| \tag{11}$$

证明：设 B〔a,b〕表示〔a,b〕上的一切有界函数组成的矢量空间，其范数为

$$\|x\|=\sup_{t\in J}|x(t)| \qquad J=[a,b]$$

则 C〔a,b〕是赋范空间 B〔a,b〕的一个子空间。根据关于赋范空间的汉恩-巴拿赫定理4.3-2，定义在空间 C〔a,b〕上的每个有界线性泛函 f 都有一个从 C〔a,b〕到 B〔a,b〕上的延拓 $\tilde{f}$。此外，由该定理还知道线性泛函 $\tilde{f}$ 是有界，并且与 f 有相同的范数，即

$$\|\tilde{f}\|=\|f\|$$

现在我们定义一个（10）中所需要的函数 w。为此，先考虑图 40 所表示的函数 x_t，在〔a, b〕中它的表达式为

$$x_t=\begin{cases}1 & t\in(a,b]\\ 0 & t\in(t,b]\end{cases}$$

显然 $x_t\in B$〔a,b〕。顺便指出，x_t 叫做区间〔a,t〕的示性函数。利用 x_t 和 $\tilde{f}$，我们在〔a,b〕上定义 w 如下：

$$w(a)=0;\quad w(t)=\tilde{f}(x_t),\qquad t\in(a,\ b$$

图 40　函数 x_t

下面证明 $w(t)\in BV$〔a,b〕且 $\mathrm{Var}(w)\leqslant\|f\|$。

我们利用复数的指数形式，也就是，若令 $\theta=\arg(\zeta)$，便有

$$\zeta=|\zeta|e(\zeta),\qquad \text{其中}\ e(\zeta)=\begin{cases}1 & \zeta=0\\ e^{i\theta} & \zeta\neq 0\end{cases}$$

可以看出，若 $\zeta\neq 0$，则 $|\zeta|=\zeta e^{-i\theta}$。因此，对任意的 ζ，不管它是否为零，都有

$$|\zeta|=\zeta\overline{e(\zeta)} \tag{12}$$

其中"—"是通常的取复共轭的意思。为了简化后面的表达式，我们记

$$\varepsilon_j=\overline{e(w(t_j)-w(t_{j-1}))},\qquad x_{t_j}=x_j$$

这样就避免了脚码之下还有脚码。则由式(12)，对任意的分割式(2)，便得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|w(t_j)-w(t_{j-1})| &= |\tilde{f}(x_1)|+\sum_{j=2}^{n}|\tilde{f}(x_j)-\tilde{f}(x_{j-1})|\\ &=\varepsilon_1\tilde{f}(x_1)+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j[\tilde{f}(x_j)-\tilde{f}(x_{j-1})]\\ &=\tilde{f}(\varepsilon_1x_1+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j(x_j-x_{j-1}))\\ &\leqslant\|\tilde{f}\|\,\|\varepsilon_1x_1+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j(x_j-x_{j-1})\|\end{aligned}$$

此式右端中，$\|\bar{f}\| = \|f\|$（见前面），而据x_i的定义，对每个$t\in[a,b]$，$x_1, x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_{n-1}$ 中只有一项是不等于零（并且它的范数等于1），又有 $|\varepsilon_i| = 1$，故 $\|\varepsilon_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \varepsilon_j (x_j - x_{j-1})\| = 1$。在上式左端，关于$[a,b]$的所有分割取上确界，使得

$$\operatorname{Var}(w) \leqslant \|f\| \tag{13}$$

这就证明了w是$[a,b]$上的有界变差函数。

再来证明（10），其中$x\in C[a,b]$。对于形如（2）的每个分割P_n，我们定义一个函数，为简单起见，我们用z_n〔代替$z(P_n)$或z_{P_n}之类的记法〕表示它，但应记住z_n依赖于P_n而不仅仅决定于n。这个函数为

$$z_n = x(t_0) x_1 + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1}) [x_j - x_{j-1}] \tag{14}$$

则$z_n\in B[a,b]$。据w的定义，

$$\begin{aligned} \bar{f}(z_n) &= x(t_0)\bar{f}(x_1) + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1}) [\bar{f}(x_j) - \bar{f}(x_{j-1})] \\ &= x(t_0)w(t_1) + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1}) [w(t_j) - w(t_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^{n} x(t_{j-1}) [w(t_j) - w(t_{j-1})] \end{aligned} \tag{15}$$

在推导最后的一个等式时用到了$w(t_0) = w(a) = 0$。我们选择$[a,b]$的任一满足$\eta(P_n)\to 0$的分割序列(P_n)；见式（5）。（注意，式(15)中的t_j是依赖于P_n的。这一事实我们记在头脑里，不再用诸如$t_{j,n}$之类的繁琐记号来表达它。）当$n\to\infty$时，式(15)右端的和式趋于（10）中的积分。而若能证明还有$\bar{f}(z_n)\to\bar{f}(x)$，则由于$x\in C[a,b]$，便推出了（10）。

现在来证明$\bar{f}(z_n)\to\bar{f}(x)$。联想到$x_i$的定义(见图40)，可看出(14)给出了$z_n(a) = x(a)\cdot 1$，这是因为当$t = a$时，(14)中的和式部分等于零。因此有$z_n(a) - x(a) = 0$。此外，若$t_{j-1} < t \leqslant t_j$，则由（14）可得到$z_n(t) = x(t_{j-1})\cdot 1$；见图40。对这样的$t$有

$$|z_n(t) - x(t)| = |x(t_{j-1}) - x(t)|$$

因此，若$\eta(P_n)\to 0$，$\|z_n - x\|\to 0$，这是因为x在$[a,b]$上连续，而由$[a,b]$的紧性，又是一致连续。$\bar{f}$的连续性蕴含着$\bar{f}(z_n)\to\bar{f}(x)$。再根据$\bar{f}(x) = f(x)$，便证明了（10）。

最后证明（11）。从（10）和（9）可得到

$$|f(x)| \leqslant \max_{t\in J} |x(t)| \operatorname{Var}(w) = \|x\| \operatorname{Var}(w)$$

两端再关于$C[a,b]$中范数等于1的一切x取上确界，便得到$\|f\| \leqslant \operatorname{Var}(w)$，把它与(13)合在一起又得到式（11）。

我们要注意，定理中的$w(t)$不是唯一的。不过可以用规范化条件使之唯一。所谓规范化条件是要求w在a的值等于零且是右连续的，也就是

$$w(a)=0, \qquad w(t+0)=w(t) \qquad (a<t<b)$$

欲详细了解，可看$A\cdot E\cdot$泰勒（1958）$pp.$197-200，也可看$F\cdot$黎斯和纳吉（$B\cdot Sz$-$Nagy$，1955）$p\cdot$111。

黎斯定理作为现代积分理论的出发点也是很有意义的。关于这方面的历史注释见$N\cdot Bourbaki$(1955)$p.$169。

§4.5 伴随算子

针对赋范空间X上的一个有界线性算子$T:X\to Y$，我们可以定义一个所谓T的伴随子算子$T^{\times}$。提出$T^{\times}$的动机原出于解算子方程的需要，这在§8.5中将会看到。这样的算子方程出现在物理和其它的应用之中。本节我们要定义伴随算子$T^{\times}$，并且研究它的某些性质，包括它和§3.9中定义的希尔伯特伴随算子T^{*}①之间的关系。重要的是要注意，我们目前的讨论依赖于汉恩-巴拿赫定理（通过定理4.3-3），如果没有这个定理，我们的讨论很难深入下去。

现在考虑有界线性算子$T:X\to Y$，这里的X和Y是两个赋范空间。我们打算定义T的伴随算子$T^{\times}$。为此，先从Y上的任一有界线性泛函g开始。显然，g对所有的$y\in Y$都有定义。令$y=Tx$，我们便能得到X上的一个泛函，称之为f：

$$f(x)=g(Tx), \qquad x\in X \tag{1}$$

由于g和T都是线性的，所以f也是线性的。又因为

$$|f(x)|=|g(Tx)|\leqslant\|g\|\,\|Tx\|\leqslant\|g\|\,\|T\|\,\|x\|$$

所以f也是有界的。上式两端关于所有范数等于1的$x\in X$取上确界，便得到不等式

$$\|f\|\leqslant\|g\|\,\|T\| \tag{2}$$

这表明$f\in X'$，这里的X'为2·10-3中定义的X的对偶空间。根据假设$g\in Y'$，因此对于变量$g\in Y'$来说，（1）定义了一个从Y'到X'的算子，我们把它叫做T的伴随算子，记之为$T^{\times}$。因而便有

$$\begin{array}{c} X\xrightarrow{T}Y \\ X'\xleftarrow{T^{\times}}Y' \end{array} \tag{3}$$

特别要注意，$T^{\times}$是定义在Y'上的算子，而给定的算子T是定义在X上。我们把上述总结为：

4·5-1定义（伴随算子$T^{\times}$） 设T：$X\to Y$是一个有界线性算子，X，Y是两个赋范空间。则T的伴随算子$T^{\times}:Y'\to X'$是按

$$f(x)=(T^{\times}g)(x)=g(Tx), \quad g\in Y' \tag{4}$$

①在希尔伯特空间的情况下，T的伴随算子$T^{\times}$和T的希尔伯特伴随算子T^{*}不是等同的(尽管$T^{\times}$与T^{*}是互相关联的，如本节后面阐明的那样。）。关于希尔伯特伴随算子T^{*}中的星号，是标准的的记法。由于在希尔伯特空间T^{*}有其自己的含义。而在一般的赋范空间理论中，又有另外的含义，容易引起混乱。所以我们不用T^{*}而是用$T^{\times}$表示T的伴随算子。我们认为用$T^{\times}$比某些文献中用符号T'更好些。

来定义的，其中 X'和 Y'分别是 X和 Y的对偶空间。

我们的首要目标是要证明 T 的伴随算子 $T^\times$ 和 T 有相同的范数。后面将会看到，这个性质是很基本的。在证明这个性质时需要用到由汉恩-巴拿赫定理导出的定理4.3-3。如此说来，汉恩-巴拿赫定理是建立完满的伴随算子理论所不可缺少的，同样也是一般线性算子理论的基础。

4·5-2定理（伴随算子的范数）。 定义4·5-1中的伴随算子 $T^\times$是线性且有界的，并且

$$\|T^\times\| = \|T\| \tag{5}$$

证明：由于 $T^\times$ 的定义域 Y' 是一个矢量空间，并且容易推得

$$\begin{aligned}(T^\times(\alpha g_1+\beta g_2))(x) &= (\alpha g_1+\beta g_2)(Tx)\\ &= \alpha g_1(Tx)+\beta g_2(Tx)\\ &= \alpha(T^\times g_1)(x)+\beta(T^\times g_2)(x)\end{aligned}$$

所以 $T^\times$ 是线性的。

现在来证明(5)。从(4)我们有$f = T^\times g$，而由式(2)可推得

$$\|T^\times g\| = \|f\| \leqslant \|g\|\,\|T\|$$

上式关于一切范数等于1的 $g\in Y'$取上确界，便得到不等式

$$\|T^\times\| \leqslant \|T\| \tag{6}$$

因此要得到式(5)，还必须证明$\|T^\times\| \geqslant \|T\|$。而由定理 4.3-3，对每个非零的 $x_0\in X$，有 $g_0\in Y'$使得

$$\|g_0\| = 1 \qquad \text{且} \qquad g_0(Tx_0) = \|Tx_0\|$$

再根据伴随算子 $T^\times$的定义便有 $g_0(Tx_0) = (T^\times g_0)(x_0)$。记 $f_0 = T^\times g_0$，从而得到

$$\begin{aligned}\|Tx_0\| = g_0(Tx_0) &= f_0(x_0)\\ &\leqslant \|f_0\|\,\|x_0\|\\ &= \|T^\times g_0\|\,\|x_0\|\\ &\leqslant \|T^\times\|\,\|g_0\|\,\|x_0\|\end{aligned}$$

由于$\|g_0\| = 1$，因而对每个 $x_0\in X$有

$$\|Tx_0\| \leqslant \|T^\times\|\,\|x_0\|$$

（由于$T0=0$，故它包括了 $x_0=0$的情形）但总是有不等式

$$\|Tx_0\| \leqslant \|T\|\,\|x_0\|$$

注意到$c = \|T\|$是对所有 $x_0\in X$保证$\|Tx_0\| \leqslant c\|x_0\|$成立的最小常数，所以$\|T^\times\|$不能小于$\|T\|$，也就是必有$\|T^\times\| \geqslant \|T\|$。将此与式(6)合在一起便得到式(5)。

让我们用矩阵表示的算子来说明这里的讨论，这能帮助读者自己去构造例子。

4·5-3例子（矩阵） 在n维欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$中，线性算子 T：$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 能用矩阵表示（见§2.9）。其中矩阵 $T_E = (\tau_{jk})$ 依赖于对 $\mathbf{R}^n$ 的基 $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的选取，E的元素一旦按某一次序排定就保持不变。选定基 E，把 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 及$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$

都看作列矢量，并利用矩阵相乘的通常记法，则有

$$y=T_E x,\qquad \text{分量 } \eta_j=\sum_{k=1}^{n}\tau_{jk}\xi_k \tag{7}$$

其中 $j=1,2,\cdots,n$。令 $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 表示 E 的对偶基（见§2·9），它是 $\mathbf{R}^{n\prime}$ 的一个基（据2.10-5 $\mathbf{R}^{n\prime}$ 也是一个 n 维的欧几德空间）。则每个 $g\in\mathbf{R}^{n\prime}$ 都有一个表示

$$g=\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\cdots+\alpha_n f_n$$

按对偶基的定义应有 $f_j(y)=f_j(\sum\eta_k e_k)=\sum\eta_k f_j(e_k)=\eta_j$。因此根据（7）可得到

$$g(y)=g(T_E x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\eta_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\tau_{jk}\xi_k$$

交换求和的次序，便能写成如下形式

$$g(T_E x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\xi_k\qquad \text{其中 } \beta_k=\sum_{j=1}^{n}\tau_{jk}\alpha_j \tag{8}$$

我们能把上式看作是用 g 在 X 上定义一个泛函 f，即

$$f(x)=g(T_E x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\xi_k$$

与伴随算子的定义联系起来，上式又可写成

$$f=T_E^{\times}g\qquad \text{按分量}\qquad \beta_k=\sum_{j=1}^{n}\tau_{jk}\alpha_j$$

要注意，在 β_k 中我们是关于第一个脚码取和的（也就是关于矩阵 T_E 的第 k 列的所有元取和的），所以得到下述结果：

若 T 是用矩阵 T_E 表示的，则它的伴随算子 $T^{\times}$ 是用 T_E 的转置来表示的。

顺便指出，若 T 是从 $\mathbf{C}^n$ 到 $\mathbf{C}^n$ 的线性算子时，上述结论也是成立的。

在研究伴随算子时，下面的公式（9）-（12）都是有用的，它们的证明留给读者。设 $S,\ T\in B(X,Y)$（见§2·10），则有

$$(S+T)^{\times}=S^{\times}+T^{\times} \tag{9}$$

$$(\alpha T)^{\times}=\alpha T^{\times} \tag{10}$$

设 $X,\ Y,\ Z$ 是三个赋范空间，$T\in B(X,Y)$，$S\in B(Y,Z)$，则关于乘积 ST 的伴随算子（见图41）我们有

$$(ST)^{\times}=T^{\times}S^{\times} \tag{11}$$

若 $T\in B(X,Y)$ 且 T^{-1} 存在，又 $T^{-1}\in B(Y,X)$，则 $(T^{\times})^{-1}$ 也存在，$(T^{\times})^{-1}\in B(X',\ Y')$ 且

$$(T^{\times})^{-1}=(T^{-1})^{\times} \tag{12}$$

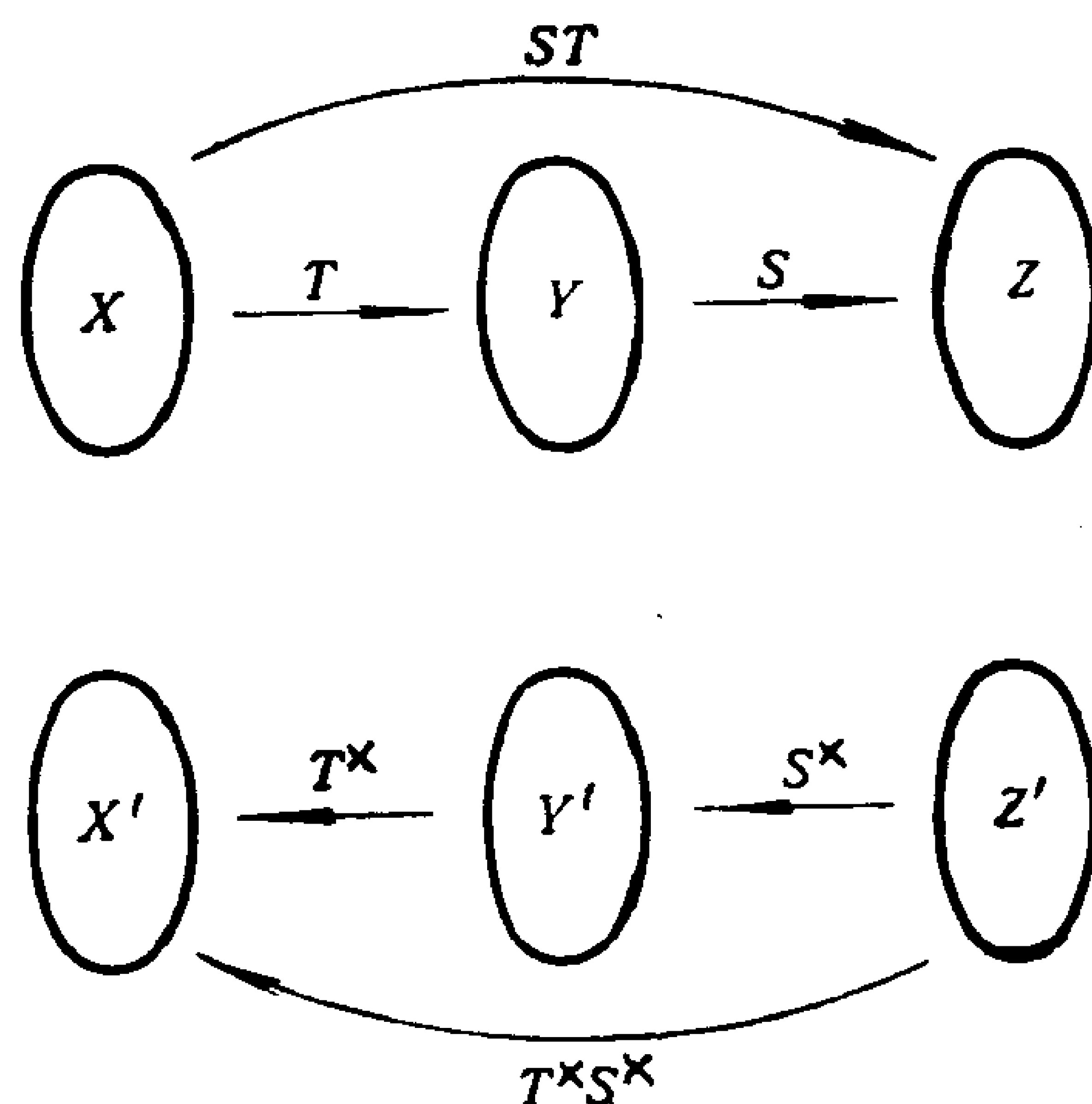


图 41　公式(11)的说明

伴随算子 $T^{\times}$ 和希尔伯特伴随算子 T^*（见§3·9）之间的关系。我们将证明，在 X 和 Y 都是希尔伯特空间。即 $X=H_1$，

$Y=H_2$，且 T：$X\to Y$ 是一个有界线性算子的情况下，存在如下的关系。首先有（见图 42）

$$H_1 \xrightarrow{T} H_2$$

$$H_1' \xleftarrow{T^\times} H_2' \tag{13}$$

与前面一样，这里的 $T^\times$ 是算子 T 的伴随算子，其定义是

$$T^\times g=f \tag{14a}$$

$$f\in H_1',\quad g\in H_2'$$

$$g(Tx)=f(x) \tag{14b}$$

由于 f，g 是希尔伯特空间上的线性泛函，它们有进一步的特征，就是有黎斯表示（见3.8-1），不妨设

$$f(x)=\langle x,x_0\rangle \qquad x_0\in H_1 \tag{15a}$$

$$g(y)=\langle y,y_0\rangle \qquad y_0\in H_2 \tag{15b}$$

并且据定理 3·8-1 还知，x_0，y_0 分别由 f 和 g 唯一地确定。这就定义了算子

$$A_1: H_1'\to H_1, \qquad A_1 f=x_0$$

$$A_2: H_2'\to H_2, \qquad A_2 g=y_0$$

从定理 3·8-1 可看出有 $\|A_1 f\|=\|x_0\|=\|f\|$，$\|A_2 g\|=\|y_0\|=\|g\|$，所以 A_1 和 A_2 都是等距对射。此外，算子 A_1，A_2 是共轭线性的（见 § 3·1）。事实上，若我们记 $f_1(x)=\langle x,x_1\rangle$，$f_2(x)=\langle x,x_2\rangle$，则对一切 x 和标量 α,β 有

$$\begin{aligned}(\alpha f_1+\beta f_2)(x)&=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)\\&=\alpha\langle x,x_1\rangle+\beta\langle x,x_2\rangle\\&=\langle x,\bar{\alpha}x_1+\bar{\beta}x_2\rangle\end{aligned} \tag{16}$$

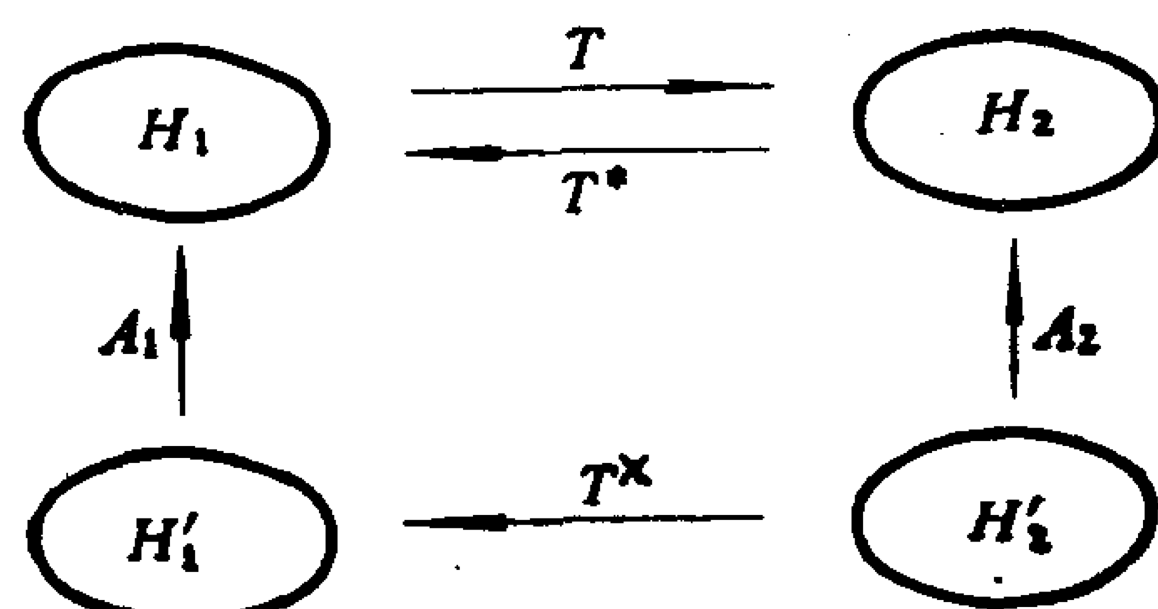


图 42　式(13)和式(17)中的算子

根据 A_1 的定义，便证明了共轭线性性

$$A_1(\alpha f_1+\beta f_2)=\bar{\alpha}A_1 f_1+\bar{\beta}A_1 f_2$$

关于 A_2，证明是类似的。

算子的合成给出了这样一个算子（见图 42）

$$T^*=A_1 T^\times A_2^{-1}: H_2\to H_1,\quad T^* y_0=x_0 \tag{17}$$

由于 T^* 包含两个共轭线性映射 A_1，A_2^{-1} 及一个线性映射 $T^\times$，所以 T^* 也是线性的，我们来证明这里的 T^* 的确是 T 的希尔伯特伴随算子。这是很简单的，从式（14）．（15）．（16）立即推出

$$\langle Tx,y_0\rangle=g(Tx)=f(x)=\langle x,x_0\rangle=\langle x,T^*y_0\rangle$$

除了记法上有所不同外，这就是 § 3·9中的式（1）。因此，我们的结论是：

式（17）用 T 的伴随算子给出了希尔伯特空间上线性算子 T 的希尔伯特伴随算子 T^* 的表示。

还要注意，从(5)和A_1、A_2的等距性，能立即推出$\|T^*\|=\|T\|$（定理3·9-2）。

为了结束这个讨论，我们也列出T：$X\to Y$的伴随算子$T^\times$与T：$H_1\to H_2$的希尔伯特伴随算子T^*之间的一些主要差别，这里的X和Y是赋范空间，H_1和H_2是希尔伯特空间。

$T^\times$是定义在Y的对偶空间Y'上，而Y'是包含了T的值域$\mathscr{R}(T)$。T^*是直接定义在H_2上，而H_2包含了T的值域$\mathscr{R}(T)$。T^*的这一性质使得我们能够用T的希尔伯特伴随算子来定义很重要的算子类。（见3·10-1）。

对于$T^\times$，根据(10)有

$$(\alpha T)^\times=\alpha T^\times$$

但是对于T^*，根据3·9-4有

$$(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$$

在有限维的情况下，$T^\times$的矩阵表示是T的矩阵表示的转置，而T^*的矩阵表示则是T的矩阵表示的复共轭转置（详细的，见4·5-3和3·10-2）。

习　　题

1.证明由(1)定义的泛函是线性的。

2.零算子0和恒等算子I的伴随算子是什么？

3.证明(9)。

4.证明(10)。

5.证明(11)。

6.证明$(T^*)^\times=(T^\times)^*$。

7.把(11)和例子4·5-3结合起来，能得到什么样的矩阵公式？

8.证明(12)。

9.（零化子）设X和Y是赋范空间，T：$X\to Y$是一个有界线性算子且令$M=\overline{\mathscr{R}(T)}$为$T$的值域的闭包。证明（见§2·10习题13）

$$M^a=\mathscr{N}(T^\times)$$

10.（零化子）设B是赋范空间X的对偶空间X'的一个子集。B的零化子^aB被定义为

$$^aB=\{x\in X\mid 对一切 f\in B 有 f(x)=0\}$$

证明在习题9中有

$$\mathscr{R}(T)\subset{}^a\mathscr{N}(T^\times)$$

相对于解算子方程$Tx=y$这意味着什么？

§4.6　自反空间

在§2·8中我们讨论过矢量空间的代数自反性。本节讨论的课题是赋范空间的自反性。

首先让我们回想一下§2·8中讨论过的内容。我们还记得，若典范映射 $C: X \leftarrow X^{**}$ 是满射时，便说矢量空间是代数自反的，这里的 $X^{**}=(X^*)^*$ 是 X 的二次代数对偶空间，并且映射 C 是用 $x \mapsto g_x$ 来定义的，其中

$$g_x(f)=f(x) \qquad (f\in X^* \text{是变量}) \tag{1}$$

也就是说，对任一 $x\in X$，其象是用（1）所定义的线性泛函 g_x。若 X 是有限维的，则 X 是代数自反的。这在定理2·9-3中已证明过。

让我们转到现在要处理的问题。我们考虑赋范空间 X，其对偶空间 X' 如2·10-3中所定义，并且 X' 的对偶空间为 $(X')'$，这个空间也记为 X''，并且也叫做 X 的**二次对偶空间**。

通过选取固定的 $x\in X$ 在 X' 上定义一个泛函 g_x，并且置

$$g_x(f)=f(x) \qquad (f\in X' \text{是变量}) \tag{2}$$

看起来和式（1）是一样的，但要注意这里的 f 是有界的。而由于有下面的基本引理，所以 g_x 也是有界的。

4·6-1 引理（g_x 的范数） 对赋范空间 X 中的每一个固定的 x，用式(2)所定义的泛函 g_x 是 X' 上的一个有界线性泛函，所以 $g_x\in X''$，并且有范数

$$\|g_x\|=\|x\| \tag{3}$$

证明：g_x 的线性性从§2·8已经知道。而由式(2)和推论4·3-4可推出式(3)：

$$\|g_x\|=\sup_{\substack{f\in X'\\ f\neq 0}}\frac{|g_x(f)|}{\|f\|}=\sup_{\substack{f\in X'\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|}=\|x\| \tag{4}$$

对每个 $x\in X$，都有唯一的一个由（2）给出的有界线性泛函 $g_x\in X''$ 与之对应。这就定义了一个映射

$$\begin{aligned} C:\ & X\to X'' \\ & x\mapsto g_x \end{aligned} \tag{5}$$

C 叫做 X 到 X'' 的**典范映射**。还能够证明 C 是线性的内射，且保持范数不变。这就能够象§2·10中定义的那样用赋范空间的同构来表述。

4·6-2 引理（典范映射） 式(5)所给出的典范映射 C 是赋范空间 X 到赋范空间 $\mathscr{R}(C)$ 上的一个同构，$\mathscr{R}(C)$ 是 C 的值域。

证明：因为

$$g_{\alpha x+\beta y}(f)=f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)=\alpha g_x(f)+\beta g_y(f)$$

象§2·8一样，可看出 C 是线性的。特别，$g_x-g_y=g_{x-y}$。因此根据式(3)可得到

$$\|g_x-g_y\|=\|g_{x-y}\|=\|x-y\|$$

这就证明了 C 是等距的，它保持范数不变。等距蕴含着内射性。直接从我们的公式也能看出这一点。事实上，若 $x\neq y$，则 $g_x\neq g_y$，可从§2·2中公理($N2$)推出，因此 C 是 X 到它的值域 $\mathscr{R}(C)$ 上的对射。

若 X 和 Z 的一个子空间同构，则称 X **可嵌入**到 Z 中。这和§2·8中的讨论是类似的，但要

注意的是，这里考虑的是赋范空间的同构，也就是说，除了作为矢量空间是同构的外，还要求保持范数相等（见§2·10）。引理4·6-2表明，X是可嵌入到X''的，而C又叫做X到X''的标准嵌入。

一般情况下，C不一定是满射，所以C的值域$\mathscr{R}(C)$可能是X''的真子空间。若$\mathscr{R}(C)=X''$，便是满射，这是一个重要的情形，有必要给予它一个名字。

4·6-3 定义（自反性） 若由式（2）和式（5）给出的典范映射C：$X\to X''$满足

$$\mathscr{R}(C)=X''$$

则称赋范空间X是自反的。

这个概念是H·汉恩（1927）引进的，而洛奇（E·R·Lorch，1939）把它叫做"自反性"。汉恩在研究赋范空间中由积分方程而导出的线性方程时，也包括对汉恩-巴拿赫定理以及对偶空间的最早研究，他认识到"自反性"的重要性。

若X是自反的，据引理4·6-2，X和X''是同构的（因而是等距的）。有趣的是，R·C·James（1950，1951）曾证明过其逆一般不真。

此外，完备性并不意味着自反性，但反过来则有

4·6-4 定理（完备性） 若赋范空间X是自反的，则X是完备的（因而是巴拿赫空间）。

证明：由于X''是X'的对偶空间，根据定理2·10-4，X''是完备的，而X的自反性又意味着。$\mathscr{R}(C)=X''$。故根据引理4·6-2，X与X''同构，所以X是完备的。

$\mathbf{R}^n$是自反的。直接从2·10-5便能推出这一结论，它也是任一有限维赋范空间X的一个模型。事实上，若$\dim X<\infty$，则X上的每个线性泛函都是有界的（见2·7-8），所以$X'=X^*$。因而X的代数自反性（见2·9-3）意味着：

4.6-5 定理（有限维） 每个有限维赋范空间都是自反的。

l^p（$1<p<\infty$）是自反的。这可从2·10-7推出。类似地还能证明$L^p[a,b]$（$1<p<\infty$）也是自反的。并且还可证明$C[a,b]$不是自反的空间（见2·2-5）。除此之外，l^1（下面证明），$L^1[a,b]$，l^∞（见2·2-4）以及l^∞的子空间c和c_0也都不是自反的。其中c表示所有收敛的标量序列构成的空间，c_0表示所有收敛到零的标量序列构成的空间。

4·6-6 定理（希尔伯特空间） 每个希尔伯特空间都是自反的。

证明：我们通过证明"对每个$g\in H''$，都有一个$x\in H$使得$g=Cx$"来证明典范映射C：$H\to H''$的满射性。作为一个准备，我们先用$Af=z$定义A：$H'\to H$，其中z是由3·8-1中的黎斯表示$f(x)=\langle x,z\rangle$给出，从而知道A是一个等距对射。从§4·5中(16)还知道A是共轭线性的，再由2·10-4知H'是完备的，并且它是内积定义为

$$\langle f_1,f_2\rangle_1=\langle Af_2,Af_1\rangle$$

的希尔伯特空间。要注意上式两端中f_1和f_2的次序。§3·1中的（IP1）到（IP4）是不难验证的，特别是（IP2）可从A的共轭线性性推得：

$$\langle\alpha f_1,f_2\rangle_1=\langle Af_2,A(\alpha f_1)\rangle=\langle Af_2,\bar{\alpha}Af_1\rangle=\alpha\langle f_1,f_2\rangle_1$$

设$g\in H''$是任意的，且其黎斯表示为

$$g(f)=\langle f,f_0\rangle_1=\langle Af_0,Af\rangle$$

再联想到$f(x)=\langle x,z\rangle$ 及 $z=Af$，并记$Af_0=x$，便可得到

$$\langle Af_0, Af\rangle=\langle x,z\rangle=f(x)$$

合在一起便有 $g(f)=f(x)$，即根据C的定义有 $g=Cx$。由于 $g\in H''$ 是任意的，所以证明了C是满射，从而证明了H的自反性。

在证明一些空间不是自反的时候，可分性与不可分性有时起着一定的作用。自反性与可分性之间的这一联系是很有意思的，也是很简单的。定理 4·6-8 （见后面）在这里是个关键，它是说，X'的可分性蕴含着X的可分性（其逆一般不真）。因此，若赋范空间X是自反的，由引理 4·6-2 知X''与X同构。所以在这种情况下，X的可分性意味着X''是可分的，再由4·6-8知X'是可分的。由此我们得到如下结论：

一个可分的赋范空间X，若其对偶空间X'是不可分的，则X不可能是自反的。

例子 l^1不是自反的。

证明：由 1·3-10 知 l^1 是可分的，而 $l^{1\prime}=l^\infty$ 是不可分的，见 2·10-6 和 1·3-9，所以l^1不是自反的。

我们所希望的定理 4·6-8 可从下述引理得到。这个引理的简单说明表示在图43中。

4·6-7 引理（泛函的存在性） 设Y是赋范空间X的一个真闭子空间。任取$x_0\in X-Y$，且令

$$\delta=\inf_{\tilde{y}\in Y}\|\tilde{y}-x_0\| \tag{6}$$

它表示x_0到Y的距离。则存在一个$\tilde{f}\in X'$且满足

$$\|\tilde{f}\|=1，\ 对一切y\in Y有\tilde{f}(y)=0。\ \tilde{f}(x_0)=\delta \tag{7}$$

证明：证明的思路是很简单的。我们考虑子空间$Z=\operatorname{span}(Y\cup\{x_0\})$，并在子空间$Z\subset X$上定义有界线性泛函$f$如下：

$$f(z)=f(y+\alpha x_0)=\alpha\delta,\quad y\in Z \tag{8}$$

先证明f满足式(7)，然后根据 4·3-2 把f延拓到X 。详细如下：

每个 $z\in Z$ 都有唯一的表示

$$z=y+\alpha x_0\ ,\qquad y\in Y$$

这就是式(8)中用到的。f 的线性性很容易看出。

由于Y是闭的，$\delta>0$，因此$f\neq 0$。若$\alpha=0$，则对一切 $y\in Y$ 有 $f(y)=0$；若$\alpha=1$且$y=0$，则有$f(x_0)=\delta$。

现证f是有界的。若$\alpha=0$，则$f(z)=0$。设$\alpha\neq 0$，利用(6)并注意到$-(\alpha^{-1})y\in Y$便可得到

$$\begin{aligned}|f(z)|=|\alpha|\delta&=|\alpha|\inf_{\tilde{y}\in Y}\|\tilde{y}-x_0\|\\&\leqslant|\alpha|\left\|-\frac{y}{\alpha}-x_0\right\|\\&=\|y+\alpha x_0\|\end{aligned}$$

此即 $|f(z)| \leqslant \|z\|$。因此f是有界的且 $\|f\| \leqslant 1$。

再证 $\|f\| \geqslant 1$。根据下确界的定义，Y 包含一个序列 (y_n) 且满足 $\|y_n - x_0\| \to \delta$。设 $z_n = y_n - x_0$，根据(8)则有$f(z_n) = -\delta$（相当(8)中的$\alpha = -1$），当$n \to \infty$时还有

$$\|f\| = \sup_{\substack{z \in Z \\ z \neq 0}} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geqslant \frac{|f(z_n)|}{\|z_n\|} = \frac{\delta}{\|z_n\|} \to \frac{\delta}{\delta} = 1$$

因此 $\|f\| \geqslant 1$，故有 $\|f\| = 1$。最后利用关于赋范空间的汉恩-巴拿赫定理 4·3-2，可把 f 延拓到X上且范数不增加。从而完成了引理的证明。

利用这个引理，便能得到可望的定理。

4·6-8 定理（可分性） 若赋范空间X的对偶空间X'是可分的，则X自己也是可分的。

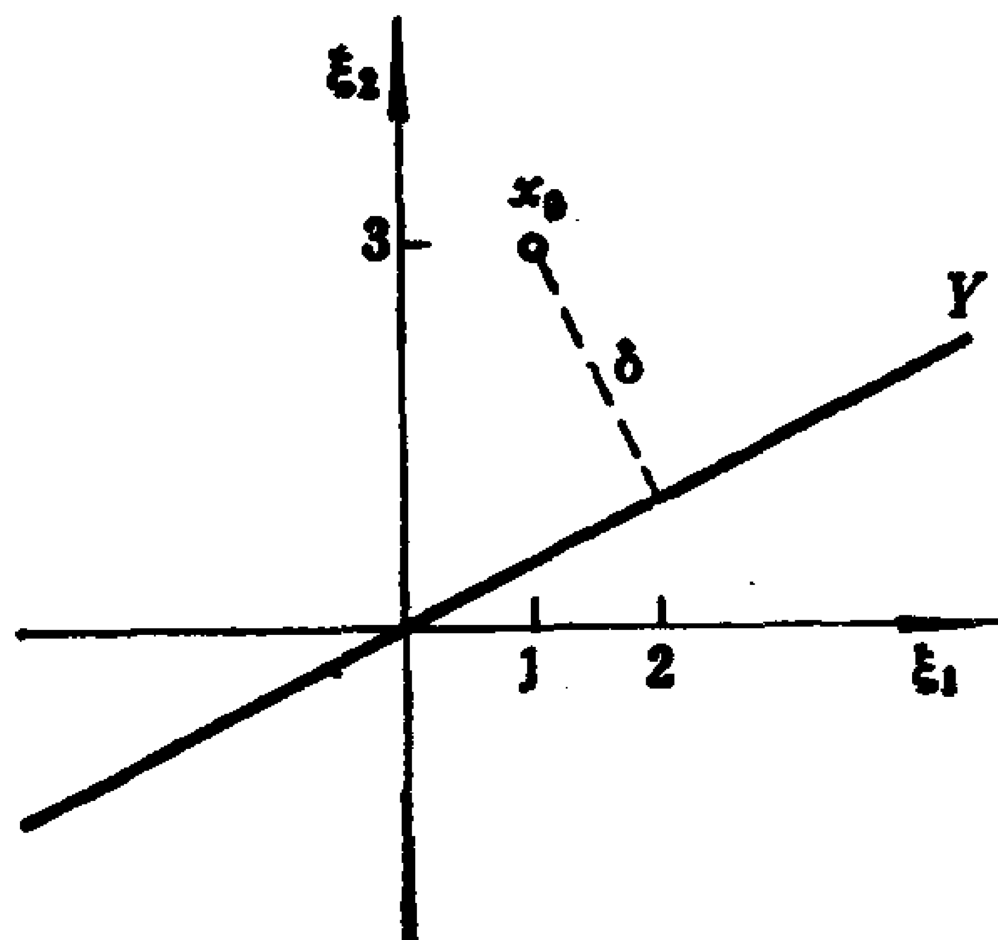


图43 在引理 4·6-7 中，$X = R^3$，
$Y = \{(\xi_1, \frac{1}{2}\xi_1, 0)\}$
$x_0 = (1,3,0), \delta = \sqrt{5}$
$Z = \mathrm{span}(Y \cup \{x_0\}) = \xi_1\xi_2$-平面
$f(z) = (-\xi_1 + 2\xi_2)/\sqrt{5}$.

证明：假设X'是可分的，则X'中的单位球面 $U' = \{f \mid \|f\| = 1\}$ 也包含一个可数的稠密子集，不妨设为 (f_n)。由于 $f_n \in U'$，有

$$\|f_n\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x)| = 1$$

根据上确界的定义，我们能找到范数等于1的点 $x_n \in X$ 使得

$$|f_n(x_n)| \geqslant \frac{1}{2}$$

令$Y = \overline{\mathrm{span}\,(x_n)}$。则由于$Y$有可数的稠密子集，即在对$(x_n)$作线性组合时，所用组合系数的实部和虚部都取有理数，这样所得到的集合在Y中是稠密的并且是可数的。因此Y是可分的。

现在来证 $Y = X$。假若 $Y \neq X$，则由于Y是闭的，根据引理 4·6-7，存在泛函 $\tilde{f} \in X'$且满足 $\|\tilde{f}\| = 1$，并对一切$y \in Y$有$\tilde{f}(y) = 0$。又由于$x_n \in Y$，故有$\tilde{f}(x_n) = 0$，并且对所有的 n 都有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leqslant |f_n(x_n)| &= |f_n(x_n) - \tilde{f}(x_n)| \\ &= |(f_n - \tilde{f})(x_n)| \\ &\leqslant \|f_n - \tilde{f}\| \, \|x_n\| \end{aligned}$$

注意到其中 $\|x_n\| = 1$，故有 $\|f_n - \tilde{f}\| \geqslant \frac{1}{2}$。因为 $\tilde{f} \in U'$，事实上 $\|\tilde{f}\| = 1$。这便与假设(f_n)在U'中稠密发生矛盾。

习　题

1. 若$X = \mathbf{R}^n$，试问(2)中的泛函f和g_n是什么？
2. 对于X为希尔伯特空间的情况，给出引理 4·6-7 的一个简单证明。

3. 若赋范空间 X 是自反的，证明 X' 也是自反的。

4. 证明：巴拿赫空间X是自反的，当且仅当其对偶空间 X' 是自反的（提示：不加证明的利用自反巴拿赫空间的闭子空间是自反的这一事实）。

5. 证明：在引理 4·6-7 的假设之下，在X上存在一个有界线性泛函 h 满足

$$\|h\| = 1/\delta, \text{ 对一切有 } y\in Y \text{ 有 } h(y) = 0, \quad h(x_0) = 1$$

6. 证明：赋范空间X的不同的闭子空间 Y_1和Y_2有不同的零化子（见 § 2·10 习题13）。

7. 设Y是赋范空间X的这样一个闭子空间，它使得在Y上处处等于零的$f\in X'$在整个X上也都处处等于零。证明$Y = X$。

8. 设M是赋范空间X的任一子集。证明：$x_0\in X$为$A = \overline{\text{span} M}$的元，当且仅当对满足$f|_M = 0$的每个$f\in X'$都有$f(x_0) = 0$时。

9. （完全集）证明：赋范空间X的子集M在X中是完全的，当且仅当在M上处处等于零的每个 $f\in X'$在X上也处处等于零时。

10. 证明：若赋范空间X有一个包含 n 个元素的线性无关子集，则它的对偶空间X'也是如此。

§ 4.7 范畴定理，一致有界性定理

由巴拿赫和斯坦因豪斯（1927）给出的一致有界性定理（或一致有界性原理）是非常重要的。事实上，在整个分析中有很多与这个定理相关的结果。最早的是出现在勒贝格（1909）的一个研究之中。一致有界性定理，汉恩-巴拿赫定理（§ § 4·2，4·3），开映射定理（§ 4·12）以及闭图定理（§ 4·13），常常被认为是赋范空间中的泛函分析的四大基石。和汉恩-巴拿赫定理不同的是，其余三个定理要求赋范空间是完备的。确实这三个定理刻划了巴拿赫空间的一些最重要的性质，它们是一般赋范空间所不具备的。

非常有趣的是，这三个定理能够以同一个定理为基础推导出来。具体点讲，就是我们先证明所谓的贝尔(*Baire*)范畴定理，然后从它推出一致有界性定理（在本节）以及开映射定理（§ 4·12）。最后就容易证明闭图定理（§ 4·13）

贝尔范畴定理在泛函分析中还有各种其它的应用，这就是为什么很多证明都要涉及到范畴的主要原因；这方面的内容可参考由爱德华兹（*R·E·Edwards*，1965）和凯利（*J·L·Kelley*）和纳米奥卡（*I·Namioka*）所写的较为深入的著作。

在定义 4·7-1 中我们叙述贝尔定理 4·7-2 需要的概念。这些概念都有新老两个名字，我们把老的名字放在括号内。出于完全不同的数学目的虽然也利用到范畴，但它们在本书中不出现，所以下面不再讨论它。

4·7-1 定义（范畴） 对于度量空间X的子集M，

（a）若其闭包$\overline{M}$没有内点（见 § 1·3），则称M在X中是稀疏（或无处稠密）的。

（b）若M为可数多个在X中稀疏的子集之并，则称M在X中是贫乏（或属第一范畴）的。

（c）若M在X中不是贫乏的，则称M在X中是非贫乏（或属第二范畴）的。

4·7-2 贝尔范畴定理（完备度量空间） 若度量空间$X\neq\phi$是完备的，则它在自己内是

非贫乏的。

因此，若$X \neq \phi$是完备的并且

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \qquad (A_k\text{是闭的}) \tag{1}$$

则至少有一个A_k包含一个非空的开子集。

证明：证明的思路很简单。假若完备度量空间$X \neq \phi$在自己内是贫乏的，则有

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \tag{1*}$$

其中每个M_k在X中都是稀疏的。我们将构造一个柯西序列(p_k)，它的极限p（根据X的完备性，p是存在的）不落在任一M_k之内，因而与表达式(1*)发生矛盾。

根据假设M_1在X中是稀疏的，所以由定义知$\overline{M}_1$不含有非空的开集，但X是含有非空开集的（例如X自己），这就意味着$\overline{M}_1 \neq X$。因而$\overline{M}_1$的余集$\overline{M}_1^c = X - \overline{M}_1$是一个非空的开集。因此可在$\overline{M}_1^c$中取一点$p_1$及以$p_1$为中心的开球

$$B_1 = B(p_1; \varepsilon_1) \subset \overline{M}_1^c \qquad \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$$

又因假设M_2在X中是稀疏的，所以$\overline{M}_2$不含有任何非空的开集，因此它不含开球$B\left(p_1; \frac{1}{2}\varepsilon_1\right)$

这就意味着$\overline{M}_2^c \cap B\left(p_1; \frac{1}{2}\varepsilon_1\right)$是非空的开集。所以可在其中取一个开球

$$B_2 = B(p_2; \varepsilon_2) \subset \overline{M}_2^c \cap B\left(p_1; \frac{1}{2}\varepsilon_1\right) \qquad \varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1$$

因而据归纳法，我们可以得到一个球列

$$B_k = B(p_k; \varepsilon_k), \qquad \varepsilon_k < 2^{-k}$$

使得$B_k \cap M_k = \phi$，并且

$$B_{k+1} \subset B\left(p_k; \frac{1}{2}\varepsilon_k\right) \subset B_k, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

由于$\varepsilon_k < 2^{-k}$，所以球心序列(p_k)是一个柯西序列，因此可设$p_k \to p \in X$（因假定X是完备的而保证了这一点），并且对每个m和$n > m$都有$B_n \subset B\left(p_m; \frac{1}{2}\varepsilon_m\right)$，故$n \to \infty$时有

$$d(p_m, p) \leqslant d(p_m, p_n) + d(p_n, p) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon_m + d(p_n, p) \to \frac{1}{2}\varepsilon_m$$

因而对每个m，都有$p \in B_m$。又由于$B_m \subset \overline{M}_m^c$，可以看出对每个$m$都有$p \notin \overline{M}_m$，所以$p \notin \bigcup M_m = X$。这就与$p \in X$矛盾，从而贝尔定理获证。

要注意的是，贝尔定理的逆一般是不真的。*N·Bourbaki*（1955）E_x·6，pp3-4给出了在自己中是非贫乏的非完备赋范空间的例子。

现在我们能从贝尔定理很容易地得到所希望的一致有界性定理。这个定理是说，若X是

一个巴拿赫空间，且算子序列 $T_n \in B(X, Y)$ 在每一点 $x \in X$ 都是有界的，则该序例是一致有界的。换句话说，点态有界性蕴含着某一更强的有界性，即一致有界性。（后面（2）中的实数 C_x，一般是随 x 而改变的，所以用脚注 x 指出这一点，而最本质的是 C_x 不依赖于 n。）

4·7·3 一致有界性定理 设 X 是一个巴拿赫空间，Y 是一个赋范空间，(T_n) 是一个有界线性算子序列 T_n: $X \to Y$，并且对每个 $x \in X$，$(\|T_n x\|)$ 是有界的，也就是

$$\|T_n x\| \leqslant C_x, \qquad n = 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

其中 C_x 是一个实数。则算子范数序列 $(\|T_n\|)$ 是有界的，即存在一个 C，使得

$$\|T_n\| \leqslant C, \qquad n = 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

证明：对每个 $k \in N$，令 $A_k \subset X$ 为

$$A_k \{x \in X \mid \|T_n x\| \leqslant k, \text{ 对所有的} n\}$$

则 A_k 是闭的。事实上，对任一的 $x \in \bar{A}_k$，在 A_k 中有一个序列 (x_j) 收敛到 x。这意味着对每个固定的 n，我们有 $\|T_n x_j\| \leqslant k$，因而根据 T_n 和范数的连续性（见§2·2），可得到 $\|T_n x\| \leqslant k$。这便证明了 $x \in A_k$，从而证明 A_k 是闭的。

根据（2），每个 $x \in X$ 都属于某一个 A_k，因而

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

由于 X 是完备的，根据贝尔定理便可推出至少有某一个 A_k 包含有一个开球，不妨设

$$B_0 = B(x_0; r) \subset A_{k_0} \tag{4}$$

设 $x \in X$ 是任一非零元，我们置

$$z = x_0 + \gamma x, \quad \gamma = \frac{r}{2\|x\|} \tag{5}$$

则 $\|z - x_0\| < r$，所以 $z \in B_0$。而由（4）及 A_{k_0} 的定义，对所有的 n，都有 $\|T_n z\| \leqslant k_0$。由于 $x_0 \in B_0$，故也有 $\|T_n x_0\| \leqslant k_0$。从（5）又可得到

$$x = \frac{1}{\gamma}(z - x_0)$$

从而对所有的 n 便得到

$$\|T_n x\| = \frac{1}{\gamma}\|T_n(z - x_0)\| \leqslant \frac{1}{\gamma}(\|T_n z\| + \|T_n x_0\|)$$

$$\leqslant \frac{2}{\gamma} k_0 = \frac{4}{r} k_0 \|x\|$$

因此对所有的 n，有

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\| \leqslant \frac{4}{r} k_0$$

取 $c = \frac{4}{r} k_0$，便有 $\|T_n\| \leqslant c$，这就证明了式（3）。

应用

4.7-4 多项式空间 所有的多项式构成的矢量空间 X，在其上定义范数

$$\|x\| = \max_j |\alpha_j|, \quad \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \text{为 } x \text{ 的系数} \tag{6}$$

后，它是一个不完备的赋范空间。

证明：我们来构造一个X上的有界线性算子序列，它是满足式(2)的，但不满足式(3)，从而证明了X不可能是完备的。

我们可以把一个非零的次数为 N_x 的多项式 $x \neq 0$ 写成如下形式：

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^j, \quad (\text{若} j > N_x, \quad \alpha_j = 0)$$

（对于 $x=0$，通常不定义它的次数，但在这里也是可以这样表示的。）我们把下面泛函序列

$$T_n 0 = f_n(0) = 0, \quad T_n x = f_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \tag{7}$$

取作定义在 X 上的算子序列 $T_n = f_n$。f_n 是线性的。根据式(6)有 $|\alpha_j| \leqslant \|x\|$，故 $|f_n(x)| \leqslant n\|x\|$，所以 f_n 是有界的。此外，对每个固定的 $x \in X$，序列$(|f_n(x)|)$是满足式(2)的，因为次数为 N_x 的多项式 x 有 $N_x + 1$ 个系数，所以根据式(7)可得到

$$|f_n(x)| \leqslant (N_x + 1)\max_j |\alpha_j| = c_x$$

下面证明(f_n)不满足式(3)，即不存在 c，使得对所有的 n 都满足 $\|T_n\| = \|f_n\| \leqslant c$。为此，我们只要选取一些特别"不好"的多项式就能做到这一点。对于 f_n 我们选取如下的多项式

$$x(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n$$

则由(6)知 $\|x\| = 1$，并且

$$f_n(x) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n = n\|x\|$$

因此，$\|f_n\| \geqslant |f_n(x)| / \|x\| = n$，所以$(\|f_n\|)$是无界的。

4·7-5 傅立叶级数 从3·5-1我们联想到一个周期为2π的周期函数x，其傅立叶级数的形式为

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mt + b_m \sin mt) \tag{8}$$

其傅立叶系数由欧拉公式

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos mt\,dt, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin mt\,dt \tag{9}$$

给出（在(8)中所以写为 $a_0/2$，主要是为了把3·5-1中的三个欧拉公式合并为(9)中的两个）。

大家知道，级数(8)甚至能够在 $x(t)$ 不连续的点收敛（习题15给出了一个简单的例子）。这表明 $x(t)$ 的连续性对级数的收敛性不是必要的。但十分意外的是，连续性也不是充分[①]的。事实上，能用一致有界性定理来证明如下的事实。

①$x(t)$在点t_0的连续性及左、右端导数的存在性，对于级数在t_0的收敛是充分的，参见洛果辛斯基(W·Rogosinski，1959)，P·70。

存在着这样的实值连续函数，在给定的点t_0，其傅立叶级数是发散的。

证明：设X是所有周期为2π的实值连续函数的矢量空间，在其上定义范数为

$$\| x \| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} |x(t)| \tag{10}$$

把1·5-5中的$[a,b]$取为$[0,2\pi]$，便知X是一个巴拿赫空间。不失一般性，我们可取$t_0 = 0$。为了证明我们的论断，将把一致有界性定理4·7-3用到$T_n = f_n$上，这里的$f_n(x)$是取x的傅立叶级数的前几项之和在$t=0$的值。对于$t=0$，所有的正弦项都等于零，余弦项都等于1，所以从(8)和(9)可看出

$$f_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{n} a_m$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos mt\right]dt$$

我们先把积分号内用和式表示的函数确定下来。为此，计算

$$2\sin\frac{1}{2}t \cdot \sum_{m=1}^{n} \cos mt = \sum_{m=1}^{n} 2\sin\frac{1}{2}t\cos mt$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\left[-\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)t + \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right]$$

$$= -\sin\frac{1}{2}t + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$

在计算的过程中绝大多数项都成对地消掉了，所以得到上面最后的表达式。两端用$\sin\frac{1}{2}t$除，再加1，便得到

$$1 + 2\sum_{m=1}^{n} \cos mt = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

因此，关于$f_n(x)$的表达式可化简为

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)q_n(t)dt, \quad q_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t} \tag{11}$$

利用这个式子，可证明线性泛函f_n是有界的。事实上，由式(10)和式(11)，便有

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\max|x(t)|\int_0^{2\pi}|q_n(t)|dt = \frac{\|x\|}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|dt$$

由此便看出f_n是有界的。进而关于一切范数等于1的x取上确界，还有

$$\|f_n\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt$$

准确地说，下面可证明其中等号是能达到的。为此，先记

$$|q_n(t)| = y(t)q_n(t)$$

其中，当每个 t 使得 $q_n(t) \geqslant 0$ 时，取 $y(t) = +1$，否则取 $y(t) = -1$。y 是不连续的，但对任意的 $\varepsilon > 0$，它能够被修改成一个范数等于 1 的连续函数 x，使得关于这个 x 有

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} [x(t) - y(t)]\, q_n(t)\, dt\right| < \varepsilon$$

把上式写成两个积分并利用式(11)，便得到

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} x(t)\, q_n(t)dt - \int_0^{2\pi} y(t)q_n(t)dt\right| = \left|f_n(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt\right| < \varepsilon$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，且 $\|x\| = 1$，这就证明了希望得到的公式

$$\|f_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt \tag{12}$$

最后证明序列（$\|f_n\|$）是无界的。将式（11）中的 $q_n(t)$ 代入式（12），并利用对 $t \in (0, 2\pi)$ 有 $\left|\sin\frac{1}{2}t\right| < \frac{1}{2}t$ 的事实，令 $(n + \frac{1}{2})t = v$，便得到

$$\begin{aligned}
\|f_n\| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})t}{\sin\,\frac{1}{2}t}\right| dt \\
&> \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left|\sin\,(n+\frac{1}{2})t\right|}{t}\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v}\, dv = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v}\, dv \\
&\geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin v|\, dv = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1} \to \infty
\end{aligned}$$

$$(n \to \infty \text{时})$$

这是因为调和级数是发散的。因此（$\|f_n\|$）是无界的。所以式（3）（取 $T_n = f_n$）是不成立的。由于 X 是完备的，这就意味着(2)不能对所有的 x 都成立。因此必有 $x \in X$，使得（$|f_n(x)|$）是无界的，而据 f_n 的定义，这意味着 x 的傅立叶级数在 $t = 0$ 是发散的。

要注意，我们的证明只是说这种函数理论上是存在的，并没有说如何去构造在 t_0 傅立叶级数发散这种连续函数 x。L・费叶（1910）给出过这种函数的例子，并且 W・洛果辛斯基

(1959) $pp\cdot 76\text{-}77$ 也构造过一个。

习　题

1.所有的有理数集在(a)实直线 R 中,(b)自己中(取通常的度量),是属于什么范畴?

2.整数集在(a)实直线 R 中,(b)自己中(取 R 诱导的度量),是属于什么范畴?

3.找出离散度量空间 X 中的所有稀疏集。

4.求 R^2 中的一个贫乏稠密子集。

5.证明:度量空间 X 的子集 M 当且仅当 $(\bar{M})^c$ 在 X 中稠密,它才是稀疏的。

6.证明:完备度量空间 X 的贫乏子集 M 的余集 M^c 是非贫乏的。

7.(共鸣)设 X 是一个巴拿赫空间,Y 是一个赋范空间,且 $T_n\in B(X,Y)$ $(n=1,2,\cdots)$ 满足 $\sup_n\|T_n\|=+\infty$。证明存在一个 $x_0\in X$ 使得 $\sup_n\|T_nx_0\|=+\infty$(点 x_0 通常叫做共鸣点。而这个问题是想说明,一致有界性定理又叫做共鸣定理。)

8.证明:定理 4·7-3 中 X 的完备性是必不可少的〔考虑 l^∞ 中由所有的 $x=(\xi_j)$(对于 $j\geqslant J\in N$ 有 $\xi_j=0$,J 依赖于 x)构成的子空间 $X\subset l^\infty$,并取 T_n 为 $T_nx=f_n(x)=n\xi_n$。〕

9.设 $T_n=S^n$,其中算子 S: $l^2\to l^2$ 是用 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\mapsto(\xi_3,\xi_4,\xi_5,\cdots)$ 来定义的。求出 $\|T_nx\|$ 的一个界;求 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_nx\|$,$\|T_n\|$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\|$。

10.(空间 c_0)设 $y=(\eta_j)$,$\eta_j\in$ C 是一个对每个 $x=(\xi_j)\in c_0$ 使 $\sum\xi_j\eta_j$ 都收敛的序列,其中 $c_0\subset l^\infty$ 是一切收敛到零的复数序列构成的子空间。证明 $\sum|\eta_j|<\infty$(用 4·7-3)。

11.设 X 是一个巴拿赫空间,Y 是赋范空间,$T_n\in B(X,Y)$ 对每个点 $x\in X$ 都使 (T_nx) 为 Y 中的一个柯西序列。证明 $(\|T_n\|)$ 是有界的。

12.在习题11中,若再假定 Y 是完备的,证明 $T_nx\to Tx$。其中 $T\in B(X,Y)$。

13.若 (x_n) 是巴拿赫空间 X 中的一个序列,并且对所有的 $f\in X'$ 使得 $(f(x_n))$ 都是有界的。证明 $(\|x_n\|)$ 是有界的。

14.若 X 和 Y 是两个巴拿赫空间,$T_n\in B(X,Y)$,$n=1,2,\cdots$。证明下面的论述是等价的。

(a) $(\|T_n\|)$ 是有界的。

(b) $(\|T_nx\|)$ 对所有的 $x\in X$ 都是有界的。

(c) $(|g(T_nx)|)$ 对所有的 $x\in X$ 及所有的 $g\in Y'$ 都是有界的。

15.为了说明一个函数 x 的傅立叶级数可以在 x 的一个不连续点上是收敛的,求函数

$$x(t)=\begin{cases}0 & -\pi\leqslant t<0\\ 1 & 0\leqslant t<\pi\end{cases}$$

及　$x(t+2\pi)=x(t)$

的傅立叶级数。把 x 的及部分和 S_0,S_1,S_2,S_3 的图象画出,与图44比较。证明在 $t=\pm n\pi$ 级数的值为 $\frac{1}{2}$,即

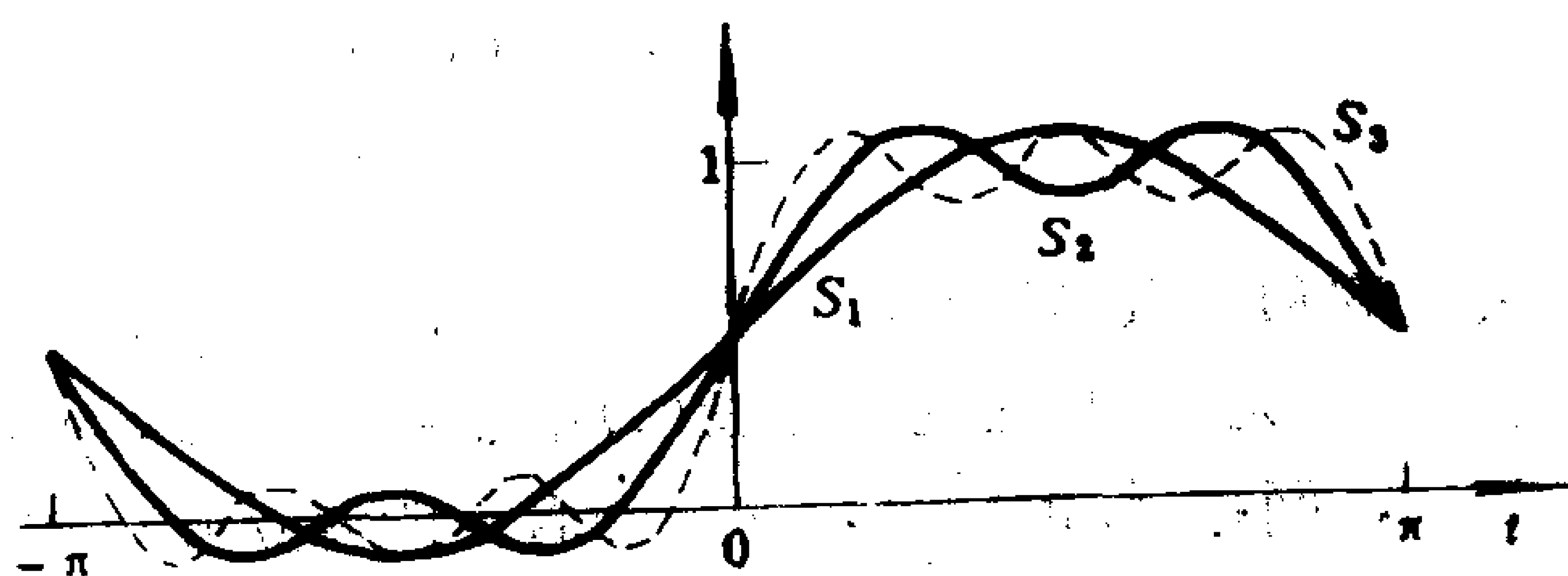


图 44　习题15中的前三个部分和 S_1, S_2, S_3

x 的左右极限的算术平均。这是傅立叶级数的一个典型特征。

§4.8 强收敛和弱收敛

大家知道，在微积分中定义了不同类型的收敛（通常的收敛，条件收敛，绝对和一致收敛）。在序列和级数的理论及其应用中，这些概念为我们提供了极大的适应性。在泛函分析中情况是类似的，不过还能够定义更多的有实际意义的收敛概念。本节主要是关于弱收敛的讨论。由于它的理论使得上节讨论的一致有界性定理有了本质的应用，所以它是一个很基本的概念，故放在这里讲述。事实上，它是一致有界性定理最主要的应用之一。

赋范空间中序列的收敛在 § 2·3 曾定义过，而从现在起，我们把它叫做强收敛，以区别于马上要引入的弱收敛。因此，我们首先叙述：

4·8-1 定义（强收敛） 赋范空间X中的序列(x_n)叫做强收敛的（或按范数收敛的），若存在一个 $x\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$$

有时也记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x$$

或简记为

$$x_n\to x$$

x 叫做(x_n)的强极限，并说(x_n)强收敛到x。

弱收敛是用X上的有界线性泛函来定义的。

4·8-2 定义（弱收敛） 赋范空间X中的序列(x_n)叫做是弱收敛的，若存在一个$x\in X$，使得对每个$f\in X'$都有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$$

也把它记为

$$x_n\xrightarrow{w}x$$

或$x_n\rightharpoonup x$。这时x叫做(x_n)的弱极限，并说(x_n)弱收敛到x。

要注意，弱收敛是指对每个$f\in X'$，数列$(a_n=f(x_n))$的收敛。

在整个分析中（例如，在变分学和微分方程的一般理论中），弱收敛都有各种应用。这个概念也说明了泛函分析的一个基本原则，即对空间本身的研究常常要与它的对偶空间关联在一起。

为了应用弱收敛的概念，我们必须知道下面引理中所陈述的一些基本性质。读者也会注意到，在证明的过程中，我们要利用汉恩-巴拿赫定理（中间要经过4·3-4及4·6-1）和一致有界性定理。这本身也证实了这两个定理在研究弱收敛方面的重要性。

4·8-3 引理（弱收敛） 设(x_n)是赋范空间X中的一个弱收敛序列，设$x_n\xrightarrow{w}x$。则

（a）(x_n) 的弱极限x是唯一的。

（b）(x_n) 的每个子序列都弱收敛到x。

（c）数列（$\|x_n\|$）是有界的。

证明：（a）假定$x_n \xrightarrow{w} x$及$x_n \xrightarrow{w} y$，则有 $f(x_n) \to f(x)$ 及 $f(x_n) \to f(y)$ 。由于（$f(x_n)$）是一个数列，所以它的极限是唯一的。因此 $f(x)=f(y)$。也就是说，对每个 $f \in X'$ 都有

$$f(x)-f(y)=f(x-y)=0$$

故根据推论 4·3-4， $x=y$ ，这便证明了弱极限的唯一性。

（b）由于（$f(x_n)$）是一个收敛数列，所以（$f(x_n)$）的每一个子序列都收敛，且和（$f(x_n)$）有相同的极限。从而证明了（b）。

（c）由于（$f(x_n)$）是一个收敛的数列，所以它是有界的。不妨设对所有的n有 $|f(x_n)| \leqslant c_f$，这里的 c_f 是一个与 f 有关但与n无关的常数。利用典范映射 C：$X \to X''$（见§4·6），我们可定义 $g_n \in X''$如下

$$g_n(f)=f(x_n), \qquad f \in X'$$

（这里用 g_n 代替了g_{x_n} ，避免脚码又附脚码）则对于所有的n有

$$|g_n(f)| = |f(x_n)| \leqslant c_f$$

即序列（$|g_n(f)|$）对每个 $f \in X'$ 都是有界的。根据 2·10-4 X'是完备的，所以可应用一致有界性定理 4·7-3，推出（$\|g_n\|$）是有界的，又根据 4·6-1，$\|g_n\| = \|x_n\|$，从而证明了（c）。

读者或许会奇怪，为什么弱收敛的概念在微积分中不起作用。道理很简单，因为在有限维赋范空间，强收敛与弱收敛是没有任何区别的。让我们来证明这一事实，并附带说明采用“强”与“弱”这两个词的合理性。

4·8-4 定理（强收敛与弱收敛） 设(x_n)是赋范空间X中的一个序列，则

（a）强收敛蕴含着弱收敛，并且有同一极限。

（b）弱收敛一般并不蕴含着强收敛。

（c）若 $\dim X < \infty$，则弱收敛蕴含着强收敛。

证明：（a）根据定义，$x_n \to x$ 意味着 $\|x_n - x\| \to 0$，并且对每个 $f \in X'$ 可推出

$$|f(x_n)-f(x)| = |f(x_n - x)| \leqslant \|f\| \|x_n - x\| \to 0$$

这表明$x_n \xrightarrow{w} x$。

（b）为此我们来考虑希尔伯特空间H中的一个标准正交序列（e_n）。事实上，对每个 $f \in H'$都有一个黎斯表示 $f(x)=\langle x,z\rangle$，因此 $f(e_n)=\langle e_n,z\rangle$。又根据贝塞尔不等式（见 3·4-6）有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n,z\rangle|^2 \leqslant \|z\|^2$$

这表明左端的级数是收敛的。所以它的一般项一定趋于零，即 $\langle e_n,z\rangle \to 0$ （$n \to \infty$）。这就意味着

$$f(e_n)=\langle e_n,z\rangle \to 0$$

由于 $f \in H'$ 是任意的，所以得到 $e_n \xrightarrow{w} 0$。然而由于

$$\|e_m - e_n\|^2 = \langle e_m - e_n, e_m - e_n\rangle = 2, \quad (m \neq n)$$

所以(e_n)不是强收敛的。

（c）假定$x_n \xrightarrow{w} x$　且$\dim X = k$，令$\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$是$X$的任意基，则有

$$x_n = \alpha_1^{(n)} e_1 + \alpha_2^{(n)} e_2 + \cdots + \alpha_k^{(n)} e_k$$

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_k e_k$$

根据假设，对每个$f \in X'$有$f(x_n) \to f(x)$，我们特别取$f_1, f_2, \cdots, f_k$如下

$$f_j(e_j) = 1, \qquad f_j(e_m) = 0 \qquad (m \neq j)$$

（顺便指出$\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$为$\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$的对偶基，见§2·9）则有

$$f_j(x_n) = \alpha_j^{(n)}, \qquad f_j(x) = \alpha_j$$

因此据$f_j(x_n) \to f_j(x)$可推得$\alpha_j^{(n)} \to \alpha_j$，由此立即得到

$$\|x_n - x\| = \left\| \sum_{j=1}^{K} (\alpha_j^{(n)} - \alpha_j) e_j \right\|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{K} |\alpha_j^{(n)} - \alpha_j| \, \|e_j\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

这就证明了(x_n)是强收敛到x的。

有趣的是，也存在使得强收敛与弱收敛互相等价的无穷维空间。例如I·舒尔（1921）曾证明l^1就是这样的一个空间。

最后，我们来研究特别重要的两类空间中的弱收敛问题。

例子

4·8-5 希尔伯特空间　在希尔伯特空间H中，$x_n \xrightarrow{w} x$当且仅当对一切$z \in H$有$\langle x_n, z\rangle \to \langle x, z\rangle$。

证明：显然可由黎斯定理3·8-1推出。

4·8-6 空间l^p　在空间l^p中（$1 < p < \infty$），$x_n \xrightarrow{w} x$当且仅当

（A）序列$(\|x_n\|)$是有界的，

（B）对每个固定的j，当$n \to \infty$时有$\xi_j^{(n)} \to \xi_j$，其中$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots)$，$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$。

证明：l^p的对偶空间是l^q，见2·10-7。l^p的邵德尔基是(e_n)，其中$e_n = (\delta_{nj})$，即它的第n个分量是1，其余为零。span(e_n)在l^q中是稠密的，所以其结论可从下述引理推得。

4·8-7 引理（弱收敛）　在赋范空间X中，$x_n \xrightarrow{w} x$当且仅当

（A）序列$(\|x_n\|)$是有界的，

（B）对X'的完全子集M中的每个元f，都有$f(x_n) \to f(x)$。

证明：在$x_n \xrightarrow{w} x$的假定下，从引理4·8-3（c）可推出（A），而（B）是明显的。

反过来，假定（A）和（B）成立。我们考察任一$f \in X'$，并证明$f(x_n) \to f(x)$。

这就是弱收敛的定义。

根据(A)，对所有的n有$\|x_n\|\leqslant c$，当c取得足够大，也有$\|x\|\leqslant c$。由于M在X'中是完全的，所以对每个$f\in X'$，在span(M)中都有序列(f_i)使得$f_i\to f$。因此，对任意给定的$\varepsilon>0$，都能找到一个j，使得

$$\|f_j-f\|<\frac{\varepsilon}{3c}$$

进而由于$f_j\in\text{span}(M)$，根据(B)，有N存在使得对所有的$n>N$有

$$|f_j(x_n)-f_j(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

利用上面的两个不等式及三角不等式，对所有的$n>N$，便有

$$\begin{aligned}|f(x_n)-f(x)|&\leqslant|f(x_n)-f_j(x_n)|+|f_j(x_n)-f_j(x)|+|f_j(x)-f(x)|\\&<\|f-f_j\|\,\|x_n\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|f_j-f\|\,\|x\|\\&<\frac{\varepsilon}{3c}\cdot c+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3c}\cdot c=\varepsilon\end{aligned}$$

由于$f\in X'$是任意的，这就证明了$x_n\xrightarrow{w}x$。

习　题

1．**（点态收敛）**　若$x_n\in C[a,b]$且$x_n\xrightarrow{w}x\in C[a,b]$，证明$(x_n)$在$[a,b]$上是点态收敛的，即对每一个$t\in[a,b]$，$(x_n(t))$都是收敛的。

2．设X和Y是赋范空间，$T\in B(X,Y)$且(x_n)是X中的一个序列，若$x_n\xrightarrow{w}x_0$，证明$Tx_n\xrightarrow{w}Tx_0$。

3．若(x_n)和(y_n)是同一个赋范空间X中的两个序列。证明：$x_n\xrightarrow{w}x$及$y_n\xrightarrow{w}y$蕴含着

$$x_n+y_n\xrightarrow{w}x+y,\quad \alpha x_n\xrightarrow{w}\alpha x$$

其中α是任一标量。

4．证明：$x_n\xrightarrow{w}x_0$蕴含着$\varliminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|\geqslant\|x_0\|$　（用定理4·3-3）

5．在赋范空间X中，若$x_n\xrightarrow{w}x_0$，证明：$x_0\in\bar{Y}$，其中$Y=\text{span}(x_n)$（用引理4·6-7）

6．若(x_n)是赋范空间X中的弱收敛序列，不妨设$x_n\xrightarrow{w}x_0$。证明：存在一个强收敛到x_0的序列(y_m)，其中每个y_m都是(x_n)中元素的线性组合。

7．证明：赋范空间X中的任一闭子空间Y包含有Y中元的所有弱收敛序列的极限。

8．**（弱柯西序列）**实的（或复的）赋范空间X中的序列(x_n)，若对每个$f\in X'$，$(f(x_n))$分别是**R**（或**C**）中的柯西序列（注意，这时当然有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在），则称$(x_n)$是$X$中的弱柯西序列。证明弱柯西序列是有界的。

9．设A是赋范空间X中的一个集合，并且A的每个非空子集都含有一个弱柯西序列，证明A是有界的。

10．**（弱完备性）**对赋范空间X来讲，若X的每一个弱柯西序列都在X中是弱收敛的，

则称X是弱完备的。若X是自反的，证明X是弱完备的。

§4.9 算子序列和泛函序列的收敛

在对具体情形作抽象的描述中，例如在研究傅立叶级数的收敛问题，插值多项式序列的收敛问题，或者数值积分方法的收敛问题，暂且举这几个，都经常地出现有界线性算子和泛函的序列。在这些情况下，我们通常要考虑这些算子或泛函序列的收敛，相应的范数序列的有界性，或者类似的性质。

经验表明，上一节关于赋范空间的序列所定义的强收敛和弱收敛是非常有用的概念。对于算子 $T_n \in B(X,Y)$ 的序列，有三种收敛性也被证实有极大的理论和实用价值。它们是

（1）按$B(X,Y)$上的范数收敛；

（2）$(T_n x)$在Y中的强收敛；

（3）$(T_n x)$在Y中的弱收敛。

其定义和术语如下所述，它们是由J·冯·诺伊曼(1929-30b)引进的。

4·9-1 定义（算子序列的收敛） 设X和Y是两个赋范空间，(T_n)是空间$B(X,Y)$中的一个算子 T_n 的序列，

（1）若(T_n)按$B(X,Y)$上的范数收敛，则称(T_n)是**一致算子收敛的**[①]；

（2）若对每个 $x\in X$，$(T_n x)$在Y中是强收敛的，则称(T_n)是**强算子收敛的**；

（3）若对每个 $x\in X$，$(T_n x)$在Y中是弱收敛的，则称(T_n)是**弱算子收敛的**。

用公式来表示的话，这就意味着存在一个算子T：$X\to Y$，分别使得

（1）　$\|T_n - T\| \to 0$

（2）　$\|T_n x - Tx\| \to 0$　　　对一切 $x\in X$

（3）　$|f(T_n x) - f(Tx)| \to 0$　　　对一切$x\in X$和$f\in Y'$

T分别叫做(T_n)的一致算子极限，强算子极限和弱算子极限。

在上一节我们曾指出，甚至在微积分中，在很简单的情形中，使用几个不同的收敛概念为我们的研究提供了极大的适应性。尽管如此，读者对我们刚刚引进的很多收敛概念仍可能感到应接不暇和手足无措。甚至会问：对算子序列引进三类收敛性为什么是必要的？回答是：在实际问题中所出现的很多算子都是作为较简单的算子的“某种”极限而给出的，而重要的是要知道，“某种”又意味着什么？算子序列的性质蕴含着极限算子的什么性质？况且，在研究之初我们并不总是知道在什么意义下极限将是存在的。因此，设想几种可能性总是有用的。在特定的问题中，最初只能在很微弱的意义下来确立收敛性，这样至少使研究有一个可靠的起点。而然后为在较强的意义下证明其收敛性开发工具，这也是为保证极限算子有“较好”的性质而作的进一步工作。这是一个很典型的情况，例如在偏微分方程中，就是这样考虑的。

要证明

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$$

是不难的（并且极限相同），但反过来一般不真，这从下面的例子可以看出。

①“算子”常常从这三个术语中略去。为了清晰起见，我们保留它。

例子

4·9-2（空间 l^2） 在空间 l^2 中我们考虑到序列 (T_n)，其中：T_n：$l^2 \to l^2$ 被定义为

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{(n \text{个零})}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \cdots)$$

这里 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$。这个算子 T_n 是线性和有界的。显然，由于 $T_n x \to 0 = 0x$，(T_n) 是强算子收敛到 0。然而，由于 $\| T_n - 0 \| = \| T_n \| = 1$，故 (T_n) 不是一致算子收敛的，

4·9-3（空间 l^2） 算子 T_n：$l^2 \to l^2$ 被定义为

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{(n \text{个零})}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$$

这里 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$。这个算子 T_n 是线性和有界的。我们来证明序列 (T_n) 是弱算子收敛到 0 的，但不是强算子收敛的。

l^2 上的每一个有界线性泛函 f 都有一个黎斯表示 3·8-1，据 3·1-6，即

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\zeta}_j$$

其中 $z = (\zeta_j) \in l^2$。因此，置 $j = n + k$ 并利用 T_n 的定义便有

$$f(T_n x) = \langle T_n x, z \rangle = \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_{j-n} \bar{\zeta}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\zeta}_{n+k}$$

根据 1·2-3 中的柯西-许瓦兹不等式，有

$$|f(T_n x)|^2 = |\langle T_n x, z \rangle|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \sum_{m=n+1}^{\infty} |\zeta_m|^2$$

上式最后一个级数是收敛级数的余和。因此当 $n \to \infty$ 时，不等式右端趋向于零，因而 $f(T_n x) \to 0 = f(0x)$。这表明 (T_n) 是弱算子收敛到 0 的。

然而，由于对于 $x = (1, 0, 0, \cdots)$ 有

$$\| T_m x - T_n x \| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad (m \neq n)$$

故 (T_n) 不是强算子收敛的。

由于**线性泛函**是（值域落在标量域 **R** 或 **C** 中的）线性算子，所以式(1)，式(2)，和式(3)直接可以应用。然而由于下述原因，式(2)和式(3)变成等价的了。原来 $T_n x \in Y$，但现在 $f_n(x) \in$ **R**（或 **C**）。因此(2)和(3)中的收敛性是在有限维（一维）空间 **R**（或 **C**）中考虑的，而据定理 4·8-4(c)，式(2)和式(3)是等价的。留下的两个概念分别叫做 (f_n) 的强收敛和弱星收敛（弱*收敛）。

4·9-4 定义（泛函序列的强收敛和弱星收敛） 设 (f_n) 是赋范空间 X 上的有界线性泛函序列。则：

(a) (f_n) 的强收敛是指，存在一个 $f \in X'$ 使得 $\| f_n - f \| \to 0$。并记为

$$f_n \to f$$

（b）(f_n)的弱星收敛是指，存在一个 $f\in X'$ 使得对一切 $x\in X$ 有$f_n(x)\to f(x)$。并记为①

$$f_n \xrightarrow{w^*} f$$

(a)和(b)中的 f 分别叫做(f_n)的强极限和弱星极限。

回到算子 $T_n\in B(X,Y)$，关于(1)，(2)和(3)中的极限算子 T：$X\to Y$，我们能谈点什么呢?

若收敛是一致的，则 $T\in B(X,Y)$；否则 $\|T_n-T\|$ 将失去意义。若收敛是强的或弱的，则T仍然是线性的，但若X不是完备的，T有可能是无界的。

例子　l^2中“有限非零序列”构成的空间X，取l^2上的度量，是一个不完备的空间。在X上定义有界线性算子T_n的序列如下：

$$T_n x=(\xi_1,2\xi_2,3\xi_3,\cdots,n\xi_n,\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots)$$

所以若 $j\leqslant n$，$T_n x$的第 j 项为 $j\xi_j$，若 $j>n$，$T_n x$ 的第 j 项为 ξ_j。这个序列（T_n）强收敛到无界线性算子 T，T被定义为 $Tx=(\eta_j)$，$\eta_j=j\xi_j$。

然而，若X是完备的，根据下面的基本引理，这个例子所表明的情况就不能再出现。

4·9-5 引理（强算子收敛）　设 $T_n\in B(X,Y)$，其中X是巴拿赫空间，Y是赋范空间。若（T_n）是强算子收敛到极限T，则 $T\in B(X,Y)$。

证明：很容易从T_n的线性性推出T是线性的。由于对每个 $x\in X$，$T_n x\to Tx$，所以对每个 $x\in X$，序列（$T_n x$）是有界的；见1·4-2。由于 X 是完备的，据一致有界性定理，（$\|T_n\|$）是有界的，不妨设对一切 n 有 $\|T_n\|\leqslant c$。由此可推出 $\|T_n x\|\leqslant\|T_n\|\|x\|\leqslant c\|x\|$。这蕴含着 $\|Tx\|\leqslant c\|x\|$。

强算子收敛的一个有用判据是

4.9-6 定理（强算子收敛） 设X和Y是两个巴拿赫空间，(T_n)是$B(X,Y)$中的一个算子序列。(T_n)是强算子收敛的，当且仅当

(A)序列$(\|T_n\|)$是有界的。

(B)对X的完全子集M中的每一x，$(T_n x)$都是Y中的柯西序列。

证明：若对每个 $x\in X$ 都有 $T_n x\to Tx$，则由于 X 是完备的，从一致有界性定理推出(A)，而(B)是明显的。

反之，假定(A)和(B)成立，所以对一切 n 有 $\|T_n\|\leqslant c$。我们来考虑任一 $x\in X$，并证明$(T_n x)$在Y中是强收敛的。设 $\varepsilon>0$ 是给定的，由于span(M)在X中稠密，所以存在 $y\in$span(M)使得

$$\|x-y\|<\frac{\varepsilon}{3c}$$

由于$y\in$span(M)，据(B)序列$(T_n y)$是柯西序列。因此，存在N使得

$$\|T_n y-T_m y\|<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad (m,n>N)$$

利用这两个不等式及三角不等式可得到

①这个概念比(f_n)的弱收敛重要一点，而据4·8-2，(f_n)的弱收敛是指对一切 $g\in X''$ 有$g(f_n)\to g(f)$。通过§4.6中见习题(4)的典范映射能够看出弱收敛蕴含着弱星收敛。

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m y - T_m x\|$$
$$< \|T_n\| \|x-y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_m\| \|x-y\|$$
$$< c\cdot\frac{\varepsilon}{3c} + \frac{\varepsilon}{3} + c\cdot\frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon, \quad (m,n>N)$$

这表明$(T_n x)$是Y中的柯西序列。由于Y是完备的，所以$(T_n x)$在Y中收敛。而由于$x\in X$是任意的，这便证明了(T_n)是强算子收敛的。

4·9-7 推论（泛函） 巴拿赫空间X上的有界线性泛函序列(f_n)是弱星收敛的，且其极限是X上的有界线性泛函，当且仅当

(A)序列$(\|f_n\|)$是有界的。

(B)对X的完全子集M中的每一个x，序列$(f_n(x))$都是柯西序列。

这个推论有一些有趣的应用，在下一节将讨论其中的两个。

习　　题

1. 证明：一致算子收敛 $T_n \to T$，$T_n\in B(X,Y)$蕴含强算子收敛，且有同一极限T。

2. 若$S_n, T_n\in B(X,Y)$且(S_n)和(T_n)分别强算子收敛到极限S和T，证明(S_n+T_n)是强算子收敛到极限$S+T$的。

3. 证明：$B(X,Y)$中的强算子收敛蕴含着弱算子收敛，且有相同的极限。

4. 证明：在上页脚注注①中的弱收敛蕴含着弱星收敛。若X是自反的，证明其逆亦成立。

5. 强算子收敛并不蕴含着一致算子收敛。通过考察$T_n = f_n: l^1 \to \mathbf{R}$，来说明这一论断，其中$f_n(x)=\xi_n$，$x=(\xi_n)$。

6. 设$T_n\in B(X,Y), n=1,2,\cdots$。为了说明定义4·9-1中"一致"这个术语的来历，证明：$T_n\to T$当且仅当对每个$\varepsilon>0$，都存在一个只依赖于ε的N，使得对一切$n>N$和一切范数等于1的$x\in X$都有

$$\|T_n x - Tx\| < \varepsilon$$

7. 设$T_n\in B(X,Y)$，其中X是巴拿赫空间。若(T_n)是强算子收敛的，证明$(\|T_n\|)$是有界的。

8. 设$T_n\to T$，其中$T_n\in B(X,Y)$。证明：对每个$\varepsilon>0$和每个闭球$K\subset X$，都存在一个N使得对一切$n>N$和一切$x\in K$有$\|T_n x - Tx\|<\varepsilon$。

9. 证明在引理4·9-5中，有$\|T\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$。

10. 设X是一个可分的巴拿赫空间，$M\subset X'$是一个有界集。证明：M中的每一个序列都包含一个子序列，它是弱星收敛到X'中的一个元。

§4.10　在序列可求和性方面的应用

在发散序列（和级数）的理论中，弱星收敛有重要的应用。按通常的意义发散序列是没

有极限的。而在发散序列的理论中。我们企图针对一个发散序列指定一个广义的极限。为此所采用的方法叫做可和性方法。

例如，给出一个发散序列 $x=(\xi_k)$，我们可以计算它的算术平均序列 $y=(\eta_n)$：

$$\eta_1=\xi_1,\ \eta_2=\frac{\xi_1+\xi_2}{2},\ \cdots,\ \eta_n=\frac{1}{n}(\xi_1+\cdots+\xi_n),\ \cdots$$

这就是一个可和性方法的例子。若 y 按通常的意义收敛到极限 η，我们便说 x 用这种方法是可和的，并且有广义极限 η。例如，若

$$x=(0,1,0,1,0,\cdots) \quad 则 \quad y=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{5},\cdots\right)$$

并且 x 有广义极限 $\frac{1}{2}$。

一个可和性方法若能表示成如下形式

$$y=Ax$$

其中 $x=(\xi_k)$ 和 $y=(\eta_n)$ 是无穷的列矢量，而 $A=(\alpha_{nk})$ 是一个无穷矩阵，这里的 $n,k=1,2,\cdots$，则便称作为矩阵方法。在公式 $y=Ax$ 中我们利用了矩阵的乘法，也就是说 y 的分量为

$$\eta_n=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\xi_k,\quad n=1,2,\cdots \tag{1}$$

上面的例子是举例说明矩阵方法（矩阵是什么？）

有关的术语如下。由式（1）所给出的方法简称为 A-方法，因为相应的矩阵被记作 A。若（1）中的所有级数和序列 $y=(\eta_n)$ 按通常的意义都收敛，则 y 的极限叫做 x 的 A-极限，并称 x 是 A-可和的。所有 A-可和序列的集合叫做 A-方法的区域。

若一个 A-方法的区域包括了所有收敛序列并且每个收敛序列的 A-极限等于通常的极限，即，

$$\xi_k\to\xi \quad 蕴含着 \quad \eta_n\to\xi,$$

则称该 A-方法是正则的。

显然，正则性是一个相当自然的要求。事实上，一个方法若不能应用到一些收敛的序列或者改变了它们的极限，那么这种方法就没有实用的价值。关于正则性的一个基本判据如下：

4.10-1 托普利兹（Toeplitz）极限定理（正则可和性方法） 具有矩阵 $A=(\alpha_{nk})$ 的 A-可和性方法是正则的，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{nk}=0 \qquad k=1,2,\cdots \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}=1 \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}|\leqslant\gamma \qquad n=1,2,\cdots \tag{4}$$

其中γ是一个与n无关的常数。

证明：我们分两步证明：

(a)：(2)至(4)对于正则性是必要的；

(b)：(2)至(4)对于正则性是充分的。

详细证明如下：

(a)假定A-方法是正则的。设x_k是这样一个无穷矢量，其第k个分量为1，其余分量为零。对于x_k，(1)中的$\eta_n=\alpha_{nk}$。由于序列x_k是收敛的，且极限为0，这证明了(2)必须成立。

此外，$x=(1,1,1,\cdots)$有极限1，而从(1)又看出η_n等于(3)中的级数，因此(3)必须成立。

现在证明对于正则性，(4)是必要的。设c是所有收敛序列构成的巴拿赫空间，其上的范数为

$$\|x\|=\sup_j|\xi_j|$$

见1.5-3。在c上定义线性泛函f_{nm}如下

$$f_{nm}(x)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{nk}\xi_k,\quad m,n=1,2\cdots \tag{5}$$

由于

$$|f_{nm}(x)|\leqslant\sup_j|\xi_j|\sum_{k=1}^{m}|\alpha_{nk}|=(\sum_{k=1}^{m}|\alpha_{nk}|)\|x\|$$

故每个f_{nm}都是有界的。正则性蕴含着式(1)中的级数对一切$x\in c$都是收敛的。因此式(1)在c上定义了线性泛函f_1，f_2，… 如下

$$\eta_n=f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\xi_k,\quad n=1,2\cdots \tag{6}$$

从式(5)可看出，对一切$x\in c$，当$m\to\infty$时$f_{nm}(x)\to f_n(x)$。这就是弱星收敛，并且据引理4.9-5($T=f_n$)f_n是有界的。据推论4.9-7，$(f_n(x))$对一切$x\in c$是收敛的，$(\|f_n\|)$是有界的，不妨设

$$\|f_n\|\leqslant\gamma\qquad\text{对一切 } n \tag{7}$$

对任意固定的$m\in N$定义

$$\xi_k^{(n,m)}=\begin{cases}|\alpha_{nk}|/\alpha_{nk} & k\leqslant m \text{ 且 } \alpha_{nk}\neq 0\\ 0 & k>m \text{ 或 } \alpha_{nk}=0\end{cases}$$

则有$x_{nm}=(\xi_k^{(n,m)})\in c$，并且当$x_{nm}\neq 0$时有$\|x_{nm}\|=1$，当$x_{nm}=0$时有$\|x_{nm}\|=0$，此外，对一切$m$有

$$f_{nm}(x_{nm})=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{nk}\xi_k^{(n,m)}=\sum_{k=1}^{m}|\alpha_{nk}|$$

因此

$$\sum_{k=1}^{m}|\alpha_{nk}|=f_{nm}(x_{nm})\leqslant\|f_{nm}\| \tag{8a}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}| \leqslant \|f_n\| \tag{8b}$$

这便证明了式（4）中的级数是收敛的，且从式（7）推出了式（4）。

（b）现证对正则性（2）至（4）是充分的。用

$$f(x)=\xi=\lim_{k\to\infty}\xi_k$$

在 c 上定义一个线性泛函 f，其中 $x=(\xi_k)\in c$。而从

$$|f(x)| = |\xi| \leqslant \sup_j |\xi_j| = \|x\|$$

可看出 f 的有界性。设$M\subset c$ 是所有这种序列的集合：从某一项以后，所有的项都是相等，例如，$x=(\xi_k)\in M$，则

$$\xi_j=\xi_{j+1}=\xi_{j+2}=\cdots=\xi$$

并且 j 依赖于x。与上面一样，则 $f(x)=\xi$，而在式（1）和式（6）中有

$$\eta_n=f_n(x)=\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_{nk}\xi_k+\xi\sum_{k=j}^{\infty}\alpha_{nk}$$

$$=\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_{nk}(\xi_k-\xi)+\xi\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}$$

因此据式（2）和式（3）对每个 $x\in M$有

$$\eta_n=f_n(x)\to 0+\xi\cdot 1=\xi=f(x) \tag{9}$$

我们还准备利用推论 4.9-7。因此需要证明集合 M 在 c 中是稠密的，这里的 M 具有式（9）中所描述的收敛性的集合。设 $x=(\xi_k)\in c$ 且 $\xi_k\to\xi$，则对每个 $\varepsilon>0$ 存在一个 N 使得对 $k\geqslant N$有

$$|\xi_k-\xi|<\varepsilon$$

显然，

$$\tilde{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{N-1},\xi,\xi,\xi,\cdots)\in M$$

并且

$$x-\tilde{x}=(0,0,\cdots,0,\xi_N-\xi,\xi_{N+1}-\xi,\cdots)$$

这就推出了 $\|x-\tilde{x}\|\leqslant\varepsilon$，由于 $x\in c$ 是任意的，从而证明了M在 c 中是稠密的。

最后，根据式（4）对每个 $x\in c$ 和一切 n 有

$$|f_n(x)| \leqslant \|x\|\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}| \leqslant \gamma\|x\|$$

因此 $\|f_n\|\leqslant\gamma$，即（$\|f_n\|$）是有界的。此外，式（9）意味着对稠集 M 中的一切 x 有 $f_n(x)\to f(x)$。根据推论 4.9-7，这就推出了 $f_n\overset{w^*}{\to}f$。因而证明了：若 $\xi=\lim\xi_k$ 存在，则 $\eta_n\to\xi$。根据定义，这就意味着正则性，从而定理得证。

习　题

1. **蔡查罗（Cesàro）可和性方法 C_1** 被定义为：

$$\eta_n=\frac{1}{n}(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n),\quad n=1,2,\cdots$$

也就是取算术平均。求相应的矩阵A。

2. 把习题1中的方法 C_1 应用到序列

$$(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0\cdots)\ 及\ \left(1,\ 0,\ -\frac{1}{4},\ -\frac{2}{8},\ -\frac{3}{16},\ -\frac{4}{32},\ \cdots\right)$$

3. 在习题1中用 (η_n) 表示 (ξ_n)。求使得 $(\eta_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ 的 (ξ_n)。

4. 利用习题3中的公式求一个不是C_1-可和的序列。

5. **赫尔德（Hölder）可和性方法 H_r** 被定义为：H_1 和习题1中的C_1是等同的。而H_2是接连两次应用H_1而得到的。即首先取算术平均，而然后对得到的序列再取一次算术平均。H_3便是连续三次应用H_1，如此等等。对序列（1，-3，5，-7，9，-11，…）施用H_1和H_2，并加以评论。

6. **（级数）** 对一个无穷级数，若它的部分和序列是A-可和的，则称该级数是A-可和的，并且把部分和序列的A-极限叫做级数的A-和。证明 $1+z+z^2+\cdots$对 $|z|=1$，$z\neq1$ 是 C_1-可和的，并且C_1-和是$1/(1-z)$。

7. **（蔡查罗的C_k-方法）** 给定(ξ_n)，令$\sigma_n^{(0)}=\xi_n$ 并且

$$\sigma_n^{(k)}=\sigma_0^{(k-1)}+\sigma_1^{(k-1)}+\cdots+\sigma_n^{(k-1)},\quad k\geqslant1,\quad n=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

若对一固定的$k\in N$有$\eta_n^{(k)}=\sigma_n^{(k)}/\binom{n+k}{k}\to\eta$，则称$(\xi_n)$是$C_k$-可和的，并称它有$C_k$-极限$\eta$。证明这个方法有个优点，就是$\sigma_n^{(k)}$能以一个很简单的方式用 ξ_j 来表达，即

$$\sigma_n^{(k)}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+k-1-\nu}{k-1}\xi_\nu$$

8. 关于级数的**欧拉方法**。针对一个给定的级数$\sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j$，把它变换成级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}$，

其中

$$\Delta^0 a_j=a_j,\quad \Delta^n a_j=\Delta^{n-1}a_j-\Delta^{n-1}a_{j+1},\quad j=1,\ 2,\ \cdots$$

并且为了方便才写出$(-1)^j$（因此 a_j 不必是正的）。能够证明这个方法是正则的，所以给定级数的收敛性蕴含着变换级数的收敛性，并且有相同的和。证明该方法能给出

$$\ln2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{1}{1\cdot2^1}+\frac{1}{2\cdot2^2}+\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{4\cdot2^4}+\cdots$$

9. 证明习题8中的欧拉方法给出了

$$\frac{\pi}{4}=\arctan1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot2}{3\cdot5}+\frac{1\cdot2\cdot3}{3\cdot5\cdot7}+\cdots\right)$$

10. 证明欧拉方法给出了下面的结果，并加以评论。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

§4.11 数值积分和弱星(W^*-)收敛

弱星收敛的概念能够有效地用到对数值积分、微分和插值的研究上去。在这一节，我们来考虑数值积分问题，也就是求给定积分

$$\int_a^b x(t)dt$$

的近似值问题。由于在应用中这是一个重要的问题，所以已经开发了各种方法，例如梯形法则，辛普生法则和比较复杂的牛顿-柯特斯公式及高斯公式(为了温习一些基本的知识，见本节末的习题集。)。

这些方法和其它方法的共同特征是，首先选定(a, b)中的点，即所谓结点，然后用x在结点的值的线性组合去逼近未知的积分值。结点和线性组合的系数与采用的方法有关，而与被积函数x无关。当然，一个方法的有效性在很大程度上是取决于它的精度，并且希望精度随着结点的增多而提高。

在本节我们将会看到，泛函分析在这方面能够提供很大的帮助。事实上，我们能对这些方法作出统一的描述，并且能够考察随着结点数目的增加而产生的收敛性问题。

我们关心的是连续函数，所以引进由$J=[a, b]$上的所有连续实值函数构成的巴拿赫空间$X=C[a,b]$，其上的范数为

$$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)|,\quad J=[a,b]$$

则上面的定积分通过

$$f(x)=\int_a^b x(t)dt \tag{1}$$

在X上定义了一个线性泛函f。为了得到数值积分的公式，我们可以象前述的方法一样来处理。因而，对每个正整数n，我们选定$n+1$个实数

$$t_0^{(n)},\ t_1^{(n)},\ \cdots,\ t_n^{(n)}\ (\text{叫做结点})$$

使得

$$a\leqslant t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_n^{(n)}\leqslant b \tag{2}$$

然后再选$n+1$个实数

$$\alpha_0^{(n)},\ \alpha_1^{(n)},\ \cdots,\ \alpha_n^{(n)}\ (\text{叫做系数})$$

并通过

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}x(t_k^{(n)}),\quad n=1,2,\cdots, \tag{3}$$

在X上定义线性泛函f_n。这就定义了一个数值积分程序，值$f_n(x)$是$f(x)$的一个逼近，其中

x 是给定的。为了求出这个程序的精度，我们来考察 f_n。

根据范数的定义，$|x(t_k^{(n)})| \leqslant \|x\|$，故每个 f_n 都是有界的。因而

$$|f_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \; |x(t_k^{(n)})| \leqslant (\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|) \|x\| \tag{4}$$

为了后面的应用，我们证明 f_n 有范数

$$\|f_n\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \tag{5}$$

事实上，式（4）已表明 $\|f_n\|$ 不能超过式（5）的右端。若我们取一个 $x_0 \in X$ 在 J 上满足 $|x_0(t)| \leqslant 1$，并且

$$x_0(t_k^{(n)}) = \operatorname{sgn} \alpha_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & \alpha_k^{(n)} \geqslant 0 \\ -1, & \alpha_k^{(n)} < 0 \end{cases}$$

则由于 $\|x_0\| = 1$，便有

$$f_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \operatorname{sgn} \alpha_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|$$

这就证明了式（5）。对于给定的 $x \in X$，式（3）为 $f(x)$ 提供了一个近似值 $f_n(x)$。当然，象前面指出的那样，我们的兴趣是精度，并希望精度随 n 的增大而提高。这就促使我们提出下面的概念。

4·11-1 定义（收敛） 由（3）定义的数值积分程序，若对 $x \in X$ 有

$$f_n(x) \to f(x) \qquad (n \to \infty) \tag{6}$$

则称它对于这个 x 是收敛的，其中 f 是由（1）定义的。

此外，由于求多项式的精确积分是容易的，自然会提出下述要求。

4·11-2 必要条件 对每一个 n，若 x 是一个次数不超过 n 的多项式，则

$$f_n(x) = f(x) \tag{7}$$

由于 f_n 是线性的，要求式（7）对 $n+1$ 个幂函数

$$x_0(t) = 1, \; x_1(t) = t, \; \cdots, \; x_n(t) = t^n$$

成立就够了。事实上，对 n 次多项式 $x(t) = \sum \beta_j t^j$ 我们能得到

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j f_n(x_j) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j f(x_j) = f(x)$$

因而可看出有 $n+1$ 个条件

$$f_n(x_j) = f(x_j) \qquad j = 0, 1, \cdots, n. \tag{8}$$

我们证明这些条件是能够得到满足的。由于有 $2n+2$ 个参数，即 $n+1$ 个结点和 $n+1$ 个系数，可以利用，因此我们能以一种任意的方式选择其中的某一些。让我们选择结点 $t_k^{(n)}$，来证明能唯一地确定这些系数。

在（8）中由于 $x_j(t_k^{(n)}) = (t_k^{(n)})^j$，所以取以下形式

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}(t_k^{(n)})^j=\int_a^b t^j dt=\frac{1}{j+1}(b^{j+1}-a^{j+1}) \tag{9}$$

其中 $j=0, 1, \cdots, n$ 。对每一个固定的 n，这是一个包含 $n+1$ 个线性方程和 $n+1$ 未知数 $\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \cdots, \alpha_n^{(n)}$ 的非齐次方程组。若其对应的齐次方程组

$$\sum_{k=0}^{n}(t_k^{(n)})^j\gamma_k=0 \qquad (j=0, 1, \cdots, n)$$

有唯一的平凡解 $\gamma_0=0, \gamma_1=0, \cdots, \gamma_n=0$，或等价地说，若方程组

$$\sum_{j=0}^{n}(t_k^{(n)})^j\gamma_j=0 \qquad (k=0, 1, \cdots, n) \tag{10}$$

有唯一的零解，这两个方程的系数矩阵互为转置，则方程组（9）存在唯一的解。由于（10）意味着多项式

$$\sum_{j=0}^{n}\gamma_j t^j$$

在 $n+1$ 个结点上的值等于零，而 $\sum_{j=0}^{n}\gamma_j t^j$ 又是 n 次的，因此它必须恒等于零。也就是所有的系数 γ_j 都等于零。从而证明了式（10）有唯一的零解，式（9）有唯一的解存在。

我们的结论是，对每个选择满足式（2）的一组结点，都唯一地存在使 4.11-2 成立的确定的一组系数。因此对所有的多项式相应的积分程序是收敛的，而我们要问，为了使这个程序对 $[a, b]$ 上的所有实值连续函数都收敛，将需要施加什么样的附加条件。波利亚（G·Pólya，1933）给出了一个针对的判据。

4·11-3波利亚收敛定理（数值积分） 满足必要条件 4.11-2 的一个数值积分程序（3），对 $[a, b]$ 上的一切实值连续函数都收敛，当且仅当存在一个实数 C，使得

$$\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|\leqslant C \qquad \text{对一切 } n \tag{11}$$

证明：根据维尔斯特拉斯逼近定理（证明在下面），在实空间 $X=C[a, b]$ 中实系数多项式的集合 W 是稠密的，并且根据 4.11-2，对每个 $x\in W$，程序（3）又都收敛。从（5）又可看出，$(\|f_n\|)$ 有界当且仅当对某一实数 C（11）是成立的。又由于对一切 $x\in X$ 收敛性 $f_n(x)\to f(x)$ 是弱星收敛性 $f_n\xrightarrow{w^*}f$，所以从推论 4.9-7便证明了这个定理。

很显然，在这个定理中我们可以用实空间 $C[a, b]$ 的其它任意的稠密集来代替多项式的集合。

此外，在绝大多数的积分方法中，系数都是非负的。取 $x=1$，则据 4.11-2 有

$$f_n(1)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|=f(1)=\int_a^b dt=b-a$$

所以（11）成立。这就证明了

4.11-4斯泰克洛夫（Steklov）定理（数值积分） 满足4.11-2并有非负系数 $\alpha_k^{(n)}$ 的数值积分程序（3），对每个连续函数都是收敛的。

在 4.11-3 的证明中，我们利用了下面定理。

4.11-5维尔斯特拉斯逼近定理（多项式） 所有实系数多项式的集合W在实空间$C[a,b]$中是稠密的。

因此，对每个$x\in C[a,b]$和给定的$\varepsilon>0$，都存在一个多项式p使得对一切$t\in[a,b]$有$|x(t)-p(t)|<\varepsilon$。

证明：由于$J=[a,b]$是紧的，所以每个$x\in C[a,b]$在J上都是一致连续的。因此，对任一$\varepsilon>0$都存在一个y，其图是一个折线弧，使得

$$\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{12}$$

首先假定$x(a)=x(b)$，$y(a)=y(b)$。由于y是分段线性和连续的，故其傅立叶系数有如下形式的界：$|a_0|<k$，$|a_m|<k/m^2$，$|b_m|<k/m^2$。关于a_m和b_m的公式（见3.5-1，其中$[a,b]=[0,2\pi]$）使用分部积分法就能看出这点。（也可参考本节末习题10)。因此，对于y的傅立叶级数（它表示y的周期延拓，周期为$b-a$），为简单起见，记$k=\dfrac{2\pi}{b-a}$，则有

$$\left|a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos kmt+b_m\sin kmt)\right|\leqslant 2k\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right)=2k\left(1+\frac{1}{6}\pi^2\right) \tag{13}$$

这就证明了该级数在J上一致收敛。与y的连续性合在一起，便推出这个级数有和y〔例如，参考W.洛果辛斯基（1959，P.15)〕。所以，取其第n个部分和s_n，只要n足够大，便有

$$\max_{t\in J}|y(t)-s_n(t)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{14}$$

由于s_n中的正弦和余弦函数的泰勒级数在J上也是一致收敛的，所以存在多项式p（例如取这些级数的适当的部分和便可得到）使得

$$\max|s_n(t)-p(t)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

由此及式（12），式（14）和

$$|x(t)-p(t)|\leqslant|x(t)-y(t)|+|y(t)-s_n(t)|+|s_n(t)-p(t)|$$

便得到

$$\max_{t\in J}|x(t)-p(t)|<\varepsilon \tag{15}$$

这是对满足$x(a)=x(b)$的$x\in C[a,b]$来证明的。如果$x(a)\neq x(b)$，取$u(t)=x(t)-\gamma(t-a)$，适当地选取γ可使$u(a)=u(b)$。则对于u在J上存在着满足$|u(t)-q(t)|<\varepsilon$的多项式q。因此，取$p(t)=q(t)+\gamma(t-a)$便有$x-p=u-q$，从而得到满足(15)的多项式p。由于$\varepsilon>0$是任意的，所以证明了W在$C[a,b]$中是稠密的。

这个定理的第一个证明是K·维尔斯特拉斯（1885）给出的。它还有很多另外的证明，例如S·N·伯恩斯坦（*Bernstein*)(1912）曾给出一个，它提供了一个一致收敛的多项式序列（“伯恩斯坦多项式”）。伯恩斯坦的证明可在吉田耕作（*K*·*Yosida*，1971），*pp*. 8～9中找到。

习 题

1.**矩形法则**是（图45）

$$\int_a^b x(t)dt \approx h[x(t_1^*)+\cdots+x(t_n^*)],\quad h=\frac{b-a}{n}$$

其中$t_k^*=a+(k-\frac{1}{2})h$。这个公式是如何得到的？它的结点和系数是什么？如何得到这个公式所给出的近似值的误差界？

2.**梯形法则**是（图46）

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)\,dt \approx \frac{h}{2}(x_0+x_1),\qquad h=\frac{b-a}{n}$$

或

$$\int_a^b x(t)\,dt \approx h(\frac{1}{2}x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{1}{2}x_n)$$

其中$x_k=x(t_k)$，$t_k=a+kh$ 。若我们用分段线性函数去逼近x，阐明这个公式是如何得到的。

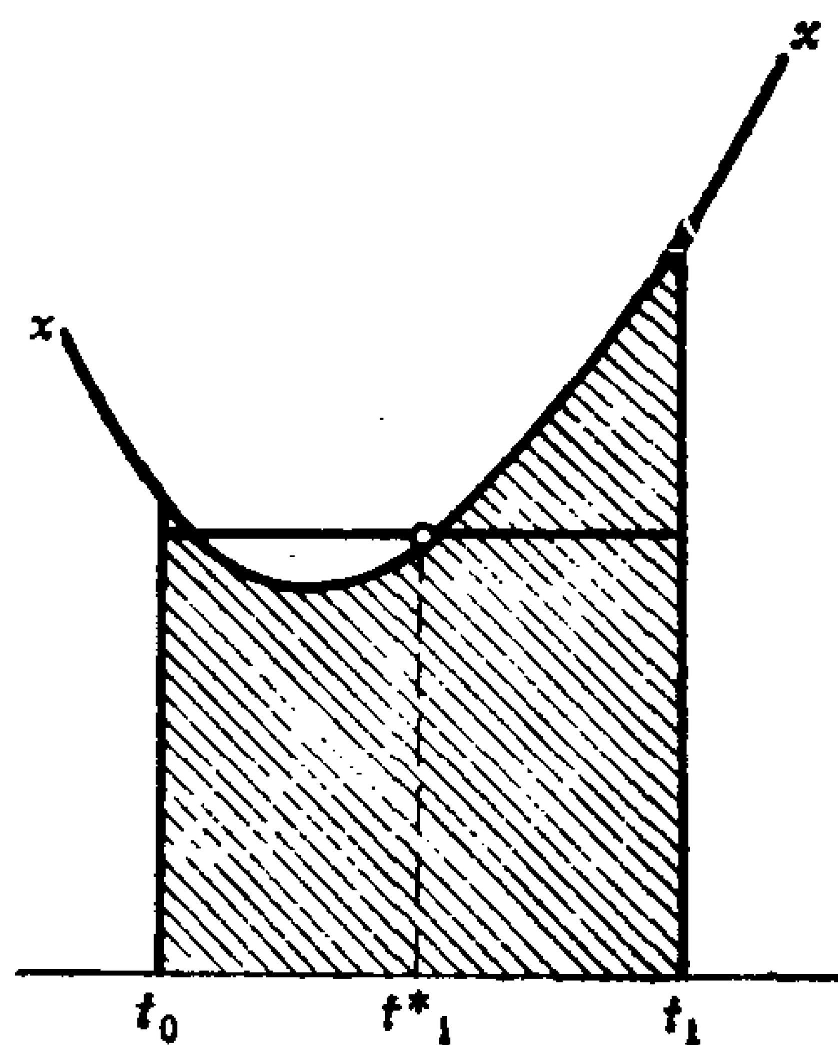


图 45 矩形法则

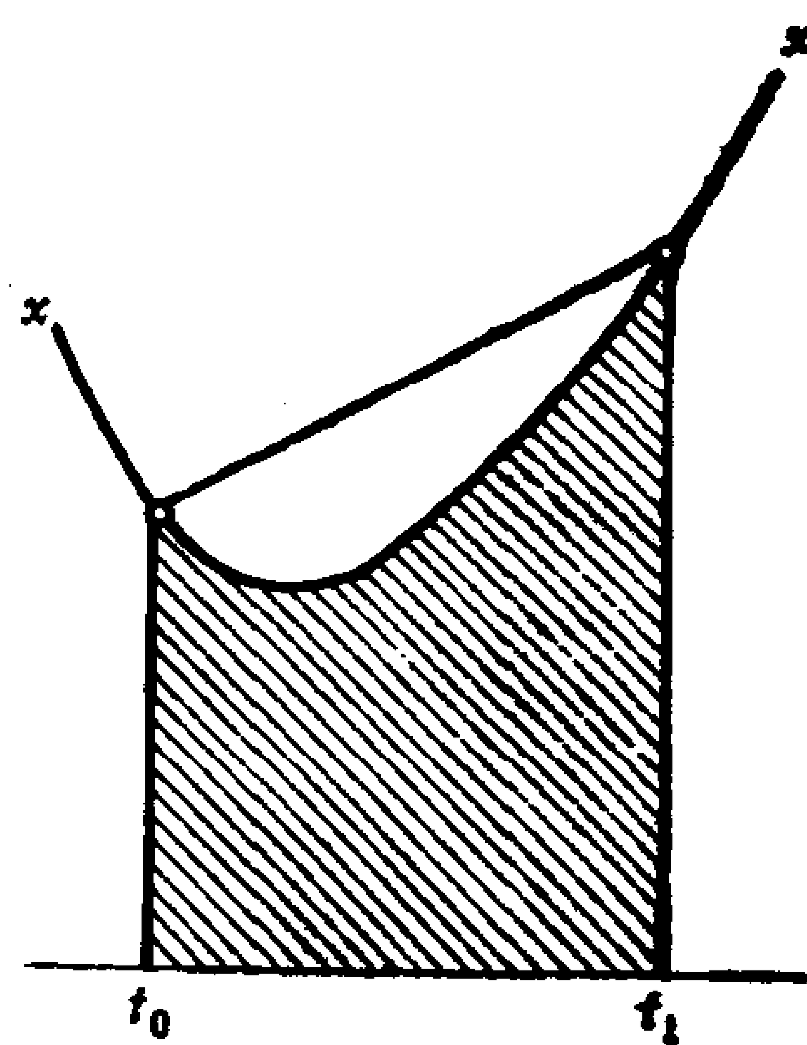


图 46 梯形法则

3.**辛普生法则是**（图47）

$$\int_{t_0}^{t_2} x(t)\ \approx \frac{h}{3}(x_0+4x_1+x_2),\quad h=\frac{b-a}{n}$$

或

$$\int_a^b x(t)\,dt \approx \frac{h}{3}(x_0+4x_1+2x_2+\cdots+4x_{n-1}+x_n)$$

其中n是偶数，$x_k=x(t_k)$，$t_k=a+kh$。若用一个在t_0，t_1，t_2点和x有相同值的二次多项式在$[t_0,\ t_2]$上去逼近x，在$[t_2,\ t_4]$，$[t_4,\ t_6]$，…上作类似的处理，证明可以得到上面的公式。

4.设$f(x)=f_n(x)-\varepsilon_n(x)$，其中$f_n$是用梯形法则所得到的一个逼近。证明：对任一

两次连续可微的函数 x，有误差界

$$k_n m_2^* \leqslant \varepsilon_n(x) \leqslant k_n m_2, \quad k_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

其中 m_2 和 m_2^* 分别是 x'' 在 $[a, b]$ 上的最大和最小值。

5. 辛普生法则在实际中有广泛的应用。为了对精度有一个感性认识，我们对积分

$$I = \int_0^1 e^{-t^2} dt$$

采用梯形法则和辛普生法则进行计算并与实际值比较之。取 $n=10$，其精确值为 0.746824（精确到 6 位有效数字），两种方法所得到的值为

$$0.746211 \text{ 和 } 0.746825$$

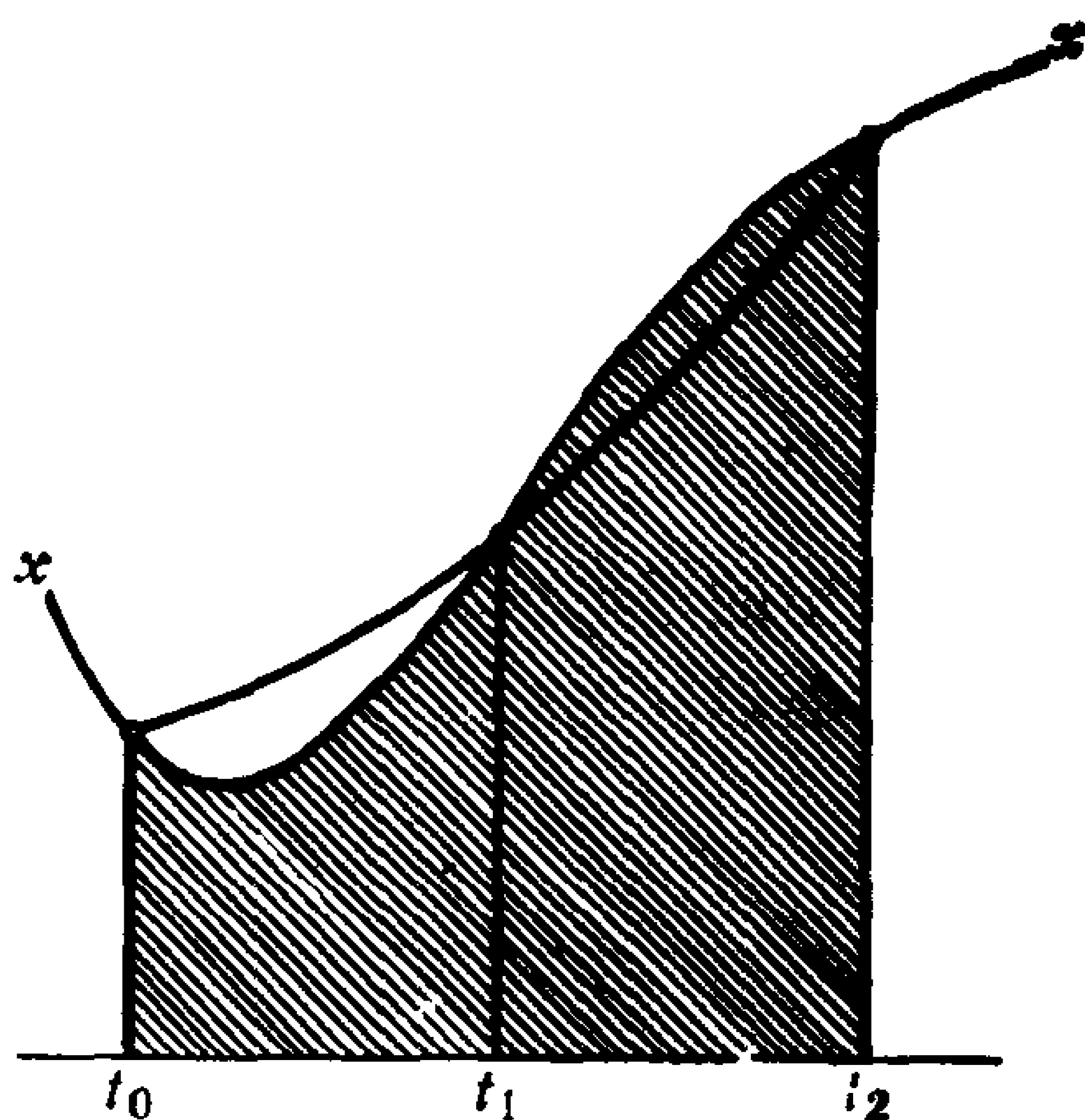


图47 辛普生法则

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
e^{-t^2}	1.000000	0.990050	0.960789	0.913931	0.852144	0.778801	0.697676	0.612626	0.527292	0.444858	0.367879

6. 利用习题 4 证明：习题 5 中关于 0.746211 的误差界是 -0.001667 和 0.000614，故

$$0.745597 \leqslant I \leqslant 0.747878$$

7. **三-八法则**是

$$\int_{t_0}^{t_3} x(t)dt \approx \frac{3h}{8}(x_0 + 3x_1 + 3x_2 + x_3)$$

其中 $x_k = x(t_k)$，$t_k = a + kh$。若我们用在结点 t_0，t_1，t_2，t_3 有和 x 相同值的三次多项式在 $[t_0, t_3]$ 上去逼近 x，便能得到这个公式，试证明之。（习题 2，3，7 中的法则是牛顿-考特斯公式序列的前几项。）

8. 考虑积分公式

$$\int_{-h}^{h} x(t)dt = 2hx(0) + r(x)$$

其中 r 是误差。假设 $x \in C^1[-h, h]$，即 x 在 $J = [-h, h]$ 上连续可微。证明误差可作如下的估计：

$$|r(x)| \leqslant h^2 p(x)|$$

其中

$$p(x) = \max_{t \in J} |x'(t)|$$

并证明 p 是这个函数空间上的一个半范数（见 §2.3 习题 12）。

9. 若 x 是实解析函数，证明

$$\int_{-h}^{h} x(t)dt = 2h(x(0) + x''(0)\frac{h^2}{3!} + x^{\mathrm{IV}}(0)\frac{h^4}{5!} + \cdots) \tag{16}$$

假定这个积分有一个有形如 $2h(\alpha_{-1}x(-h)+\alpha_0 x(0)+\alpha_1 x(h))$ 的近似表达式，试确定作为 h，h^2，…的幂函数的 α_{-1}，α_0，α_1 尽可能与（16）保持一致。证明这样做的结果给出了辛普生法则

$$\int_{-h}^{h} x(t)\,dt \approx \frac{h}{3}(x(-h)+4x(0)+x(h))$$

为什么这个推导证明了这个法则对三次多项式是精确的?

10. 在维尔斯特拉斯逼近定理的证明中，我们利用了连续且分段线性函数的傅立叶系数的界。试问如何得到这些界?

§4.12 开映射定理

我们已经讨论了汉恩-巴拿赫定理和一致有界性定理，而现在研究本章中的第三个大定理，即所谓开映射定理。它论述的是开映射，这些映射使得每个开集的象都是开集（定义在后面）。联想到我们对开集的重要性的讨论（见§1.3）可知，开映射具有普遍意义。具体地讲，开映射定理是讲：在怎样的条件下一个有界线性算子是一个开映射。同一致有界性定理一样，我们仍然需要完备性，这个定理又一次展示了：为什么巴拿赫空间比不完备的赋范空间更完满。这个定理也给出了，在怎样的条件下一个有界线性算子的逆也是有界的。开映射定理的证明也是基于§4.7中所阐明的贝尔范畴定理。

我们从介绍开映射的概念开始。

4.12-1定义（开映射） 设X和Y是度量空间，T：$\mathscr{D}(T)\to Y$ 且域 $\mathscr{D}(T)\subset X$。若$\mathscr{D}(T)$中的每一个开集在T之下的象都是Y中的开集，则称T是一个开映射。

要注意，若映射不是满射，我们必须留心下面两种说法的区别：

(a)作为从其定义域到Y的映射是开的，

(b)作为从其定义域到其值域的映射是开的。(b)比(a)弱一些。例如，若$X\subset Y$，用$x\mapsto x$定义的从X到Y的映射是开的，当且仅当X是Y的开子集。而由$x\mapsto x$定义的从X到其值域上（X上）的映射在任何情况下都是开的。

此外，为了防止混淆还要记住，根据定理1.3-4，连续映射T：$X\to Y$ 有这样的性质，Y中的每个开集的逆象都是X中的开集。这并不意味着T映X中的开集到Y中的开集上。例如，由$t\mapsto \sin t$所定义的映射T：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，但它映$(0,\ 2\pi)$到$[-1,1]$上。

4.12-2开映射定理，有界逆定理 从巴拿赫空间X到巴拿赫空间Y上的有界线性算子T是一个开映射。因此，若T是对射，T^{-1}是连续的，因而也是有界的。

很容易从下面的引理推出这个定理。

4.12-3引理（开单位球） 从巴拿赫空间X到巴拿赫空间Y上的有界线性算子T有这样一个性质：开单位球$B_0=B(0;1)\subset X$的象$T(B_0)$含有Y的一个以0为中心的开球。

证明：证明过程分以下几步：

(a)证明开球$B_1 = B(0; \frac{1}{2})$象的闭包$\overline{T(B_1)}$含有一个开球B^*。

(b)证明$\overline{T(B_n)}$含有一个开球V_n，V_n是以$0\in Y$为中心的，$B_n = B(0; 2^{-n})\subset X$。

(c)证明$T(B_0)$含有一个以$0\in Y$为中心的开球。其详细证明如下：

(a)与子集$A\subset X$有关的集合αA（α是一个标量）和$A+w(w\in X)$分别定义为

$$\alpha A = \{x\in X \mid x = \alpha a,\ a\in A\} \quad \text{(图48)} \quad (1)$$

$$A + w = \{x\in X \mid x = a + w,\ a\in A\} \quad \text{(图49)} \quad (2)$$

而对于Y中的子集，有类似的定义。

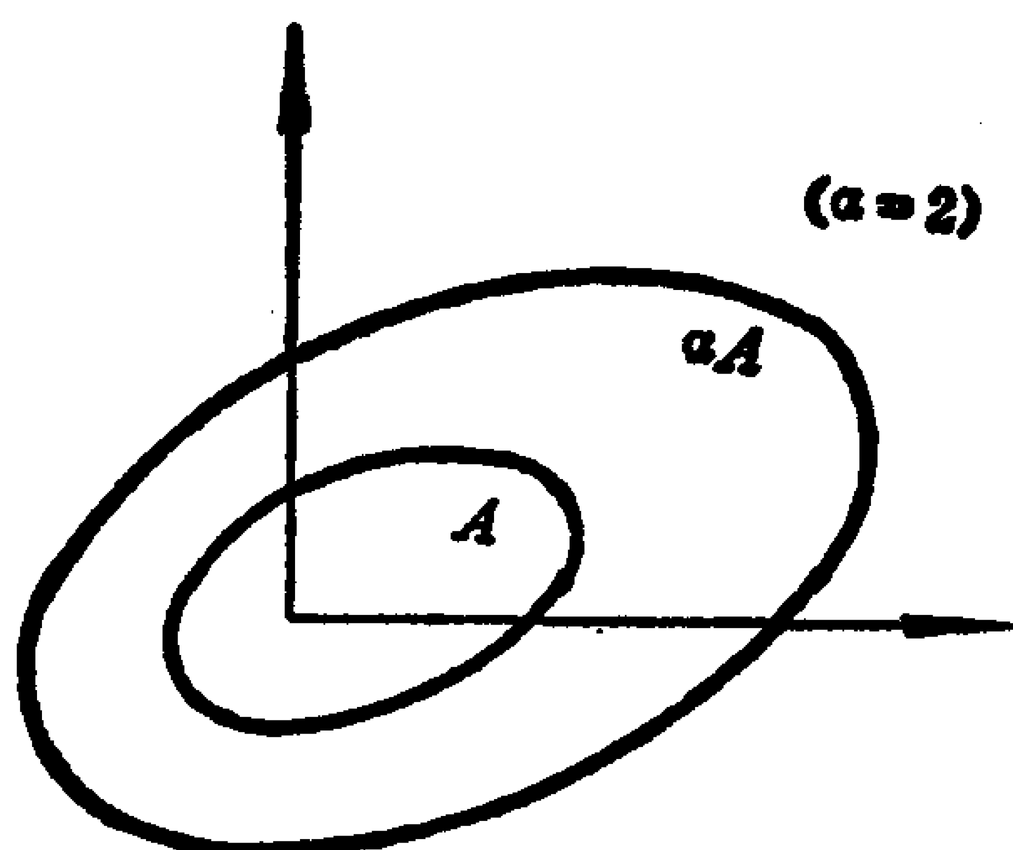


图48 公式（1）的说明

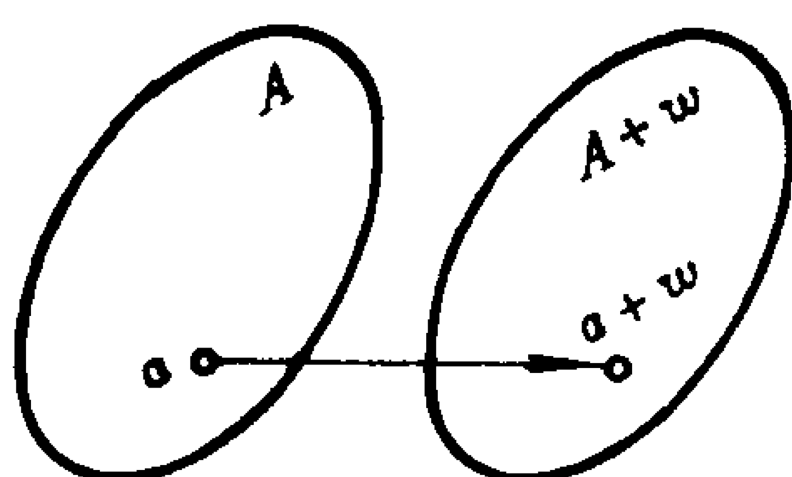


图49 公式（2）的说明

我们来考虑开球$B_1 = B(0; \frac{1}{2})\subset X$。任一固定的$x\in X$，只要实数$k$取得足够大（$k>2\|x\|$），便有$x\in kB_1$。因此，

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1$$

由于T是满射且是线性的，故

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(B_1)} \quad (3)$$

要注意，由于并集已经是整个空间Y，所以即使取闭包也并没有增加什么点，故有式(3)中的关系。因为Y是完备的，据贝尔范畴定理4.7-2它在自己内是非贫乏的。注意(3)和4.7-2中的(1)是类似的，因此可得出结论：$\overline{kT(B_1)}$一定含有某一开球。这就推出$\overline{T(B_1)}$也含有一个开球，比如说，$B^* = B(y_0; \varepsilon)\subset\overline{T(B_1)}$。从而推出

$$B^* - y_0 = B(0; \varepsilon)\subset\overline{T(B_1)} - y_0 \quad (4)$$

(b)现在来证明，$B^* - y_0\subset\overline{T(B_0)}$其中$B_0$就是引理中所给出的。如果能证明

$$\overline{T(B_1)} - y_0\subset\overline{T(B_0)} \quad (5)$$

也就够了（见式(4)）。

设$y\in\overline{T(B_1)} - y_0$，则$y + y_0\in\overline{T(B_1)}$，而要记住也有$y_0\in\overline{T(B_1)}$。根据1.4-6($a$)，有

$$u_n = Tw_n\in T(B_1)\text{使得}u_n\longrightarrow y + y_0$$
$$u_n = Tz_n\in T(B_1)\text{使得}v_n\longrightarrow y_0$$

由于w_n，$z_n\in B_1$，并且B_1的半径为$\frac{1}{2}$，故有

$$\|w_n - z_n\| \leqslant \|w_n\| + \|z_n\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

所以$w_n - z_n \in B_0$。而从

$$T(w_n - z_n) = Tw_n - Tz_n = u_n - v_n \longrightarrow y$$

可以看出$y \in \overline{T(B_0)}$。由于$y \in \overline{T(B_1)} - y_0$是任意的，这就证明了式(5)。因而从(4)可得出

$$B^* - y_0 = B(0;\ \varepsilon) \subset \overline{T(B_0)} \tag{6}$$

设$B_n = B(0;\ 2^{-n}) \subset X$。由于$T$是线性的，故有$\overline{T(B_n)} = 2^{-n}\overline{T(B_0)}$，从而由式(6)可得

$$V_n = B(0;\ 2^{-n}\varepsilon) \subset \overline{T(B_n)} \tag{7}$$

(C)最后证明

$$V_1 = B(0; \frac{1}{2}\varepsilon) \subset T(B_0)$$

这只要证明每个$y \in V_1$都落在$T(B_0)$中就够了。所以任取$y \in V_1$。在式(7)中令$n=1$，便有$V_1 \subset \overline{T(B_1)}$。因此$y \in \overline{T(B_1)}$。据1.4-6($a$)一定存在某一$v \in T(B_1)$接近$y$，满足$\|v - y\| < \varepsilon/4$。而$v \in T(B_1)$意味着存在某一$x_1 \in B_1$使得$Tx_1 = v$。因此

$$\|y - Tx_1\| < \varepsilon/4$$

由此并在(7)中取$n=2$，便看出$y - Tx_1 \in V_2 \subset \overline{T(B_2)}$。和前面一样可推出：存在$x_2 \in B_2$使得

$$\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{\varepsilon}{8}$$

因此$y - Tx_1 - Tx_2 \in V_3 \subset \overline{T(B_3)}$，依此类推。到第$n$步便能选一个$x_n \in B_n$满足

$$\|y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{8}$$

令$z_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$。由于$x_k \in B_k$，故有$\|x_k\| < 1/2^k$。对于$n > m$，这便给出

$$\|z_n - z_m\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0 \qquad (m \longrightarrow \infty)$$

因此(z_n)是一个柯西序列。因为X是完备的，故(z_n)是收敛的，不妨设$z_n \to x$。而由于B_0的半径为1，并且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \tag{9}$$

故$x \in B_0$。又由于T是连续的，故$Tz_n \to Tx$，而(8)又表明$Tx = y$，故$y \in T(B_0)$。

定理4.12-2的证明 我们来证明X中的每个开集A的象$T(A)$，在Y中是开集。为此，只要证明对每个$y = Tx \in T(A)$，集合$T(A)$都含有一个以$y = Tx$为中心的开球就行了。

设$y = Tx \in T(A)$。由于A是开的，故它含有一个以x为中心的开球。因此$A - x$含有一个以$0 \in X$为中心的开球。设这个开球的半径为r，并令$k = 1/r$，故$r = 1/k$。则$k(A - x)$含有开单位球$B(0;\ 1)$。而据引理4.12-3，$T(k(A - x)) = k[T(A) - Tx]$含有一个以0为中心的开球，所以$T(A) - Tx$也含有一个以0为中心的开球。因此$T(A)$含有一个以$Tx = y$为中心的开球。由于$y \in T(A)$是任意的，故$T(A)$是开的。

最后，若T^{-1}：$Y\to X$存在，因为T是开映射，所以据定理1.3-4知T^{-1}是连续的。据定理2.6-10知T^{-1}是线性的，所以据定理2.7-9得出T^{-1}是有界的。

习　题

1. 证明：由$(\xi_1, \xi_2)\mapsto(\xi_1)$所定义的映射$T$：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$是开的，由$(\xi_1, \xi_2)\mapsto(\xi_1, 0)$所定义的映射$T$：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$是开映射吗？

2. 证明：开映射不必映闭集到闭集上。

3. 推广式（1）和式（2），我们能够定义

$$A+B=\{x\in X \mid x=a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$$

其中$A, B\subset X$。为了熟悉这种记法，求αA，$A+w$，$A+A$，其中$A=\{1, 2, 3, 4\}$。解释图50。

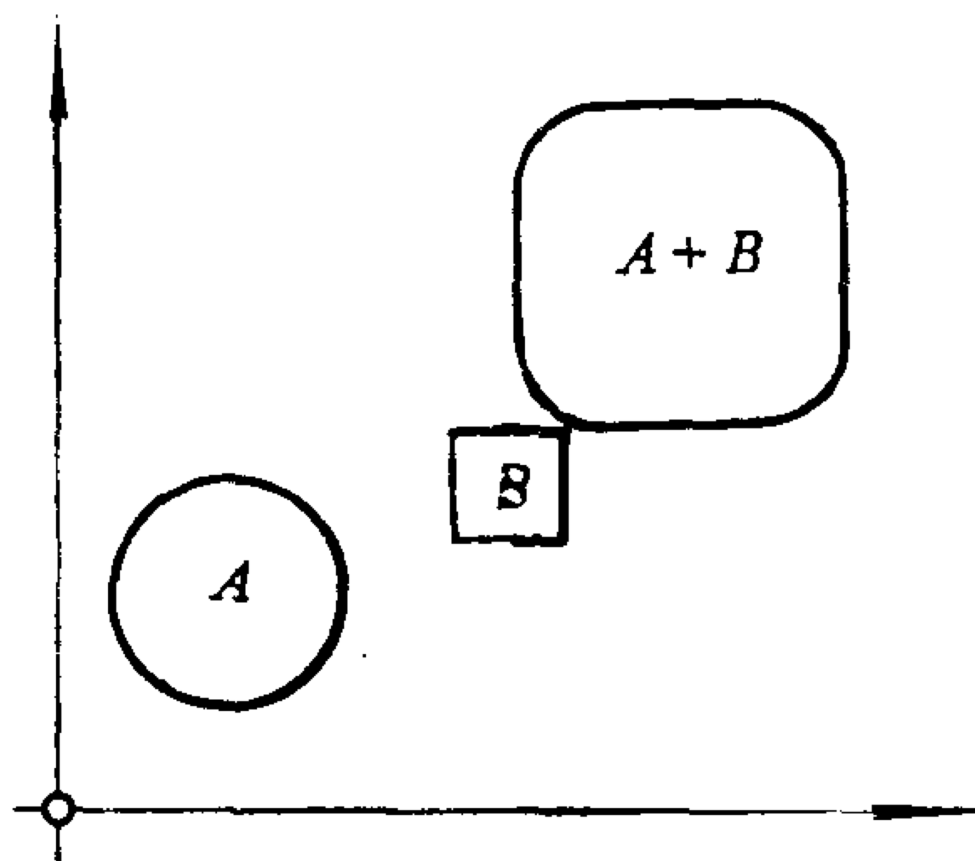


图50　平面中的集合A,B和A+B

4. 证明式（9）中的不等式是严格的。

5. 设X是这样的一个赋范空间，其中的点是只有有限多个非零项的复数序列$x=(\xi_j)$，其范数定义为$\|x\|=\sup_j|\xi_j|$。设T：$X\to X$被定义为

$$y=Tx=\left(\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_3, \cdots\right)$$

证明T是线性有界的，但T^{-1}是无界的。这和4.12-2矛盾吗？

6. 设X和Y是巴拿赫空间而T：$X\to Y$是一个有界线性内射算子。证明T^{-1}：$\mathscr{R}(T)\to X$当且仅当$\mathscr{R}(T)$在Y中是闭的它才是有界的。

7. 设X和Y是巴拿赫空间，$T: X\to Y$是一个有界线性算子。若T是对射，证明存在正实数a和b使得$a\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant b\|x\|$对一切$x\in X$成立。

8. **（等价范数）** 设$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是矢量空间X上的两种范数，且使得$X_1=(X, \|\cdot\|_1)$和$X_2=(X, \|\cdot\|_2)$都是完备的。若$\|x_n\|_1\to 0$总是蕴含着$\|x_n\|_2\to 0$，证明X_1中的收敛蕴含着X_2中的收敛，反之亦然。并且存在正数a和b使得对一切$x\in X$有

$$a\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant b\|x\|_1$$

（注意这些范数是等价的；见定义2.4-4.）

9. 设$X_1=(X, \|\cdot\|_1)$和$X_2=(X, \|\cdot\|_2)$是巴拿赫空间。若存在常数c使得对一切$x\in X$有$\|x\|_1\leqslant c\|x\|_2$，证明存在常数$k$使得对一切$x\in X$有$\|x\|_2\leqslant k\|x\|_1$（所以这两个范数是等价的；见定义2.4-4）。

10. 从§1.3我们知道，度量空间X的所有开子集构成的集合$\mathscr{T}$叫做X的一个拓扑。因此，矢量空间X上的每一个范数定义了X的一个拓扑。若X上有两个范数使得$X_1=(X, \|\cdot\|_1)$和$X_2=(X, \|\cdot\|_2)$都是巴拿赫空间，并且由$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$定义的拓扑$\mathscr{T}_1$和$\mathscr{T}_2$满足$\mathscr{T}_1\supset\mathscr{T}_2$，证明$\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_2$。

§4.13　闭线性算子，闭图定理

不是所有的实际上重要的线性算子都是有界的。例如，2.7-5中的微分算子是无界的，

并且在量子力学和其它的应用中要经常用到无界算子。然而，实际上分析者喜欢使用的所有线性算子都是所谓的闭线性算子。所以值得介绍一下这些算子。在这一节我们定义赋范空间上的闭线性算子并考察它们的某些性质，特别是关于重要的闭图定理。闭图定理给出了巴拿赫空间上的闭线性算子是有界的充分条件。

对希尔伯特空间中的闭线性算子和其它的无界算子的较为详细的研究，将在第十章给出。而其在量子力学中的应用在第十一章给出。

让我们从定义开始。

4.13-1定义（闭线性算子） 设 X 和 Y 是赋范空间，而 $T:\mathscr{D}(T)\to Y$ 是一个线性算子，并且$\mathscr{D}(T)\subset X$。若T的图

$$\mathscr{G}(T)=\{(x,\ y)\mid x\in\mathscr{D}(T),\ y=Tx\}$$

在赋范空间$X\times Y$中是闭的，则称T是闭线性算子。在$X\times Y$中的两个（矢量空间的）代数运算象通常那样定义为

$$(x_1,\ y_1)+(x_2+y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$
$$\alpha(x,\ y)=(\alpha x,\ \alpha y)$$

（α 是一个标量），并且$X\times Y$上的范数被定义为①

$$\|(x,\ y)\|=\|x\|+\|y\| \qquad (1)$$

在什么条件下闭线性算子将是有界的？重要的闭图定理给出了一个回答。

4.13-2 闭图定理 设X和Y是巴拿赫空间，$T:\mathscr{D}(T)\to Y$是一个闭线性算子，其中$\mathscr{D}(T)\subset X$。若$\mathscr{D}(T)$在X中是闭的，则算子T是有界的。

证明：我们首先证明由范数（1）定义的赋范空间$X\times Y$是完备的。设(z_n)是$X\times Y$中的柯西序列，其中$z_n=(x_n,\ y_n)$。则对每个$\varepsilon>0$存在一个N，使得对一切$m,\ n>N$有

$$\|z_n-z_m\|=\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|<\varepsilon \qquad (m,\ n>N) \qquad (2)$$

因此(x_n)和(y_n)分别是X和Y中的柯西序列。而由于X和Y是完备的，故它们是收敛的，不妨设$x_n\to x$，$y_n\to y$。在（2）中令$m\to\infty$，对于$n>N$便有$\|z_n-z\|\leqslant\varepsilon$，这就证明了$z_n\to z=(x,\ y)$。由于柯西序列$(z_n)$是任意的，故$X\times Y$是完备的。

根据假设，$\mathscr{G}(T)$ 在$X\times Y$中是闭的，$\mathscr{D}(T)$ 在 X 中是闭的。据1.4-7，故$\mathscr{G}(T)$和$\mathscr{D}(T)$都是完备的。现考虑映射

$$P:\mathscr{G}(T)\to\mathscr{D}(T)$$
$$(x,\ Tx)\mapsto x$$

P是线性的。又因为

$$\|P(x,\ Tx)\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x,\ Tx)\|$$

所以P是有界的。由于有逆映射

$$P^{-1}:\mathscr{D}(T)\to\mathscr{G}(T)$$
$$x\mapsto(x,\ Tx)$$

①其他的范数定义见习题2.

故P是对射。由于$\mathscr{G}(T)$和$\mathscr{D}(T)$是完备的,所以能够应用有界逆定理4.12-2,并且看出P^{-1}是有界的，不妨设$\|(x, Tx)\|\leqslant b\|x\|$对某一个$b$和一切$x\in\mathscr{D}(T)$都成立。则因为

$$\|Tx\|\leqslant\|Tx\|+\|x\|=\|(x, Tx)\|\leqslant b\|x\|$$

对一切$x\in\mathscr{D}(T)$成立，故T是有界的。

根据定义，$\mathscr{G}(T)$是闭的，当且仅当$z=(x, y)\in\overline{\mathscr{G}(T)}$蕴含着$z\in\mathscr{G}(T)$。从定理1.4-6(a)又可看出，$z\in\overline{\mathscr{G}(T)}$当且仅当存在$z_n=(x_n, Tx_n)\in\mathscr{G}(T)$使得$z_n\to z$，因此有

$$x_n\to x, \quad Tx_n\to y \tag{3}$$

并且$z=(x, y)\in\mathscr{G}(T)$当且仅当$x\in\mathscr{D}(T)$和$y=Tx$。这就证明了下述有用的判据，这个判据描述了常用作定义线性算子的闭性的一个性质。

4.13-3定理（闭线性算子） 设$T:\mathscr{D}(T)\to Y$是一个线性算子，其中$\mathscr{D}(T)\subset X$，并且X和Y都是赋范空间。则T是闭的当且仅当它有下述性质：若$x_n\to x$且$Tx_n\to y$，其中$x_n\in\mathscr{D}(T)$,则$x\in\mathscr{D}(T)$且$Tx=y$。

要特别注意，这个性质与有界线性算子的下述性质是不同的。若线性算子T是有界的，因而是连续的，又若(x_n)是$\mathscr{D}(T)$中的序列且在$\mathscr{D}(T)$中收敛，则(Tx_n)也收敛；见1.4-8。这对闭线性算子来说不一定成立。然而，若T是闭的且$\mathscr{D}(T)$中的两个序列(x_n)和$(\tilde{x}_n)$收敛到相同的极限，又若对应的序列(Tx_n)和$(T\tilde{x}_n)$也都收敛，则它们也有相同的极限（见习题6）。

4.13-4例子（微分算子） 设$X=C[0, 1]$和

$$T:\mathscr{D}(T)\to X$$

$$x\mapsto x'$$

其中“$'$”表示微分，$\mathscr{D}(T)$表示由有连续导数的函数$x\in X$构成的子空间。则T不是有界的，但是闭的。

证明：从2.7-5可看出T不是有界的。我们应用定理4.13-3来证明T是闭的。设(x_n)是$\mathscr{D}(T)$中的序列且使得(x_n)和(Tx_n)都收敛，不妨设

$$x_n\to x \quad 和 \quad Tx_n=x_n'\to y$$

由于按$C[0, 1]$的范数收敛是在$[0, 1]$上的一致收敛，从$x_n'\to y$可得

$$\int_0^t y(\tau)d\tau=\int_0^t \lim_{n\to\infty}x_n'(\tau)d\tau=\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(\tau)d\tau=x(t)-x(0)$$

即

$$x(t)=x(0)+\int_0^t y(\tau)d\tau$$

这就证明了$x\in\mathscr{D}(T)$且$x'=y$。从而据定理4.13-3推出了T是闭的。

值得注意的是，在这个例子中$\mathscr{D}(T)$在X中不是闭的，否则根据闭图定理T将是有界的。

线性算子的闭性并不蕴含着它的有界性。反之，线性算子的有界性也不蕴含着闭性。

证明：4.13-4已经说明了第一个断语，而用下面的例子可说明第二个断语。设T：$\mathscr{D}(T)\to\mathscr{D}(T)\subset X$是$\mathscr{D}(T)$上的恒等算子，且$\mathscr{D}(T)$是赋范空间$X$的一个真稠密子空间。显然$T$是线性和有界的。然而，$T$不是闭的。这个结论直接从定理4.13-3可以推出：若取$x\in X-\mathscr{D}(T)$及$\mathscr{D}(T)$中收敛到x的序列(x_n)，便可看出。

我们的讨论似乎表明，关于无界算子其定义域的规定和延拓问题可能起着基本的作用。事实的确如此，在第十章将会较为详细地看到这点。刚才我们证明的论断是相当含糊的，更肯定些有

4.13-5引理（闭算子） 设T：$\mathscr{D}(T)\to Y$是一个有界线性算子，其定义域$\mathscr{D}(T)\subset X$，而X和Y是赋范空间。则

(*a*)若$\mathscr{D}(T)$是X的闭子集，则T是闭的。

(*b*)若T是闭的且Y是完备的，则$\mathscr{D}(T)$是X的闭子集。

证明：(*a*) 若(x_n)是$\mathscr{D}(T)$中的收敛到x的序列且使得(Tx_n)也收敛。则由于$\mathscr{D}(T)$是闭的，故有$x\in\overline{\mathscr{D}(T)}=\mathscr{D}(T)$，又由于$T$是连续的，故$Tx_n\to Tx$。因此据定理4.13-3知$T$是闭的。

(*b*)对于$x\in\overline{\mathscr{D}(T)}$，在$\mathscr{D}(T)$中存在序列$(x_n)$使得$x_n\to x$；见1.4-6。由于$T$是有界的，故

$$\|Tx_n-Tx_m\|=\|T(x_n-x_m)\|\leqslant\|T\|\,\|x_n-x_m\|.$$

这表明(Tx_n)是一个柯西序列。由于Y是完备的，故它是收敛的，不妨设$Tx_n\to y\in Y$。由于T是闭，据4.13-3有$x\in\mathscr{D}(T)$（且$Tx=y$）。因为$x\in\overline{\mathscr{D}(T)}$是任取的，所以$\mathscr{D}(T)$是闭的。

习　题

1.证明（1）在$X\times Y$上定义了一个范数。

2.在赋范空间X和Y的积空间$X\times Y$上的其它常用范数还有

$$\|(x,\ y)\|=\max\{\|x\|,\ \|y\|\}$$

及

$$\|(x,\ y)\|_0=(\|x\|^2+\|y\|^2)^{1/2}$$

验证它们是满足范数公理的。

3.证明：线性算子T：$X\to Y$的图$\mathscr{G}(T)$是$X\times Y$的一个矢量子空间。

4.若定义4.13-1中的X和Y是巴拿赫空间，证明在$V=X\times Y$上用（1）定义范数后是一个巴拿赫空间。

5.（逆）若闭线性算子T的逆T^{-1}存在，证明T^{-1}也是一个闭线性算子。

6.设T是一个闭线性算子。若$\mathscr{D}(T)$中的序列(x_n)和$(\tilde{x}_n)$收敛到同一个极限x，又若(Tx_n)和$(T\tilde{x}_n)$也收敛，证明(Tx_n)和$(T\tilde{x}_n)$有相同的极限。

7.从闭图定理推出定理4.12-2的第二个论断。

8.设X和Y是赋范空间，T：$X\to Y$是一个闭线性算子。(*a*) 证明紧子集$C\subset X$的象A在Y中是闭的。(*b*) 证明紧子集$K\subset Y$的逆象B在X中是闭的。（见定义2.5-1。）

9.若T：$X\to Y$是闭线性算子，其中X和Y是赋范空间且Y是紧的，证明T是有界的。

10.设X和Y是赋范空间且X是紧的。若T：$X\rightarrow Y$是闭的线性对射算子，证明T^{-1}是有界的。

11.（零空间）证明：闭线性算子T：$X\rightarrow Y$的零空间$\mathscr{N}(T)$是X的闭子空间。

12.设X和Y是赋范空间。若T_1：$X\rightarrow Y$是一个闭线性算子且$T_2\in B(X, Y)$，证明T_1+T_2是一个闭线性算子。

13.设T是一个闭线性算子，其定义域$\mathscr{D}(T)$在巴拿赫空间X中，而其值域$\mathscr{R}(T)$在赋范空间Y中。若T^{-1}存在且有界，证明$\mathscr{R}(T)$是闭的。

14.假设级数Σu_i的一般项是区间$J=[0, 1]$上的连续可微函数，且该级数在J上一致收敛并有和x。此外，还假定Σu_i在J上也是一致收敛。证明x在$(0,1)$上是连续可微的，且$x'=\Sigma u_i'$。

15.（闭延拓）设T：$\mathscr{D}(T)\rightarrow Y$是一个线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$，且$X$和$Y$是巴拿赫空间，$\mathscr{G}(T)$为$T$的图。证明：当且仅当$\overline{\mathscr{G}(T)}$不含有形如$(0, y)$的元素，其中$y\neq 0$，$T$有一个延拓$\tilde{T}$，且$\tilde{T}$是一个闭线性算子并且有图$\overline{\mathscr{G}(T)}$。

第五章　巴拿赫不动点定理的应用

本章是选学内容，所包含的材料其余各章并不利用。

学习本章只要求具备第一章的知识（不要求二至四章）。所以，如有必要，可紧接着第一章进行学习。

巴拿赫不动点定理，作为出现在分析的各个不同分支中的存在和唯一性定理的共同源泉，无疑是非常重要的。就这种意义来看，这个定理也深刻地说明了：泛函分析方法有统一各个数学分支的威力。当然，也说明不动点定理在分析中的有效利用。

本章内容概要

巴拿赫不动点定理或压缩映象原理5.1-2，是研究完备度量空间中的某种自映射（压缩映射，见5.1-1）。它给出了映射不动点（自映射点）的存在与唯一的充分条件。同时也提供了一个逼近不动点的迭代程序和误差界限（见5.1-3）。我们还要研究这个定理在三个重要领域中的应用，即

线性代数方程（§5.2），

常微分方程（§5.3），

积分方程（§5.4）。

还有其它方面的应用（例如，偏微分方程），要讨论它们则需要较多的预备知识，

§5.1　巴拿赫不动点定理

T是映集合X到X的一个映射，如果有$x\in X$使得

$$Tx=x$$

（在T之下保持不变）也就是x的象Tx与x重合，则称x为映射T的一个**不动点**。

例如，平移没有不动点；平面绕定点的旋转有一个不动点（旋转中心）。**R** 到 **R** 的映射，$x\mapsto x^2$，有两个不动点（0和1），而从$\mathbf{R}^2$到ξ_1轴上的投影$(\xi_1,\ \xi_2)\mapsto\xi_1$，则有无穷多个不动点（$\xi_1$轴上的所有点）。

巴拿赫不动点定理是关于某种映射的不动点的存在与唯一性定理，它也给出了一个逐步逼近不动点（往往是实际问题的解）的构造性过程。这个过程叫做**迭代**过程。据定义，它是这样的一个方法，在给定的集合X中任选一点x_0，然后按关系式

$$x_{n+1}=Tx_n \qquad n=0,\ 1,\ 2\cdots$$

依次计算出序列x_0，x_1，$x_2\cdots$。也就是选定任一x_0之后，逐次确定

$$x_1=Tx_0, \qquad x_2=Tx_1,\ \cdots。$$

几乎在每个应用数学分支中，都应用迭代程序。收敛性的证明和误差的估计也常常能从巴拿赫不动点定理得到（或者用更难些的不动点定理）。巴拿赫定理给出了一类所谓压缩映射的不动点的存在（和唯一）的充分条件。关于压缩的定义如下。

5.1-1定义（压缩） 设$X=(X, d)$是一个度量空间。映射T：$X\longrightarrow X$被称为在X上是压缩的，若存在一个正实数$\alpha<1$，使得对所有的$x, y\in X$都有

$$d(Tx, Ty)\leqslant \alpha d(x, y) \quad (\alpha<1) \tag{1}$$

从几何上来看，也就是说对任何两点x, y，它们象之间的距离比它们之间的距离要近些。更确切地讲，就是比值$d(Tx, Ty)/d(x, y)$不得超过一个严格小于1的正数α。

5.1-2巴拿赫不动点定理（压缩定理） 假定$X=(X, d)$是一个非空的完备度量空间，$T: X\rightarrow X$是在X上压缩的映射。则T恰好有一个不动点。

证明：我们先构造一个序列(x_n)，并证明它是一个柯西序列，从而在完备的空间X中是收敛的。然后证明它的极限点x就是T的一个不动点。最后证明这个不动点是唯一的。这就是整个证明的思路。

我们任选$x_0\in X$，定义"迭代序列"(x_n)如下：

$$x_0, \ x_1=Tx_0, \ x_2=Tx_1, \ \cdots, \ x_n=T^n x_0, \ \cdots \tag{2}$$

显然，它是x_0反复在T作用下的象的序列。由(1)和(2)可以推出(x_n)是柯西序列，

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leqslant \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leqslant \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\cdots\leqslant \alpha^m d(x_1, x_0) \end{aligned} \tag{3}$$

因此，利用三角不等式及几何级数求和公式，对于$n>m$便可得到

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x_{m+1})+d(x_{m+1}, x_{m+2})+\cdots+d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqslant (\alpha^m+\alpha^{m+1}+\cdots+\alpha^{n-1})d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m\frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha}d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

由于$0<\alpha<1$，分子中的$1-\alpha^{n-m}<1$，故有

$$d(x_m, x_n)\leqslant\frac{\alpha^m}{1-\alpha}d(x_0, x_1) \qquad (n>m) \tag{4}$$

在不等式右端，$0<\alpha<1$及$d(x_0, x_1)$是固定的数，所以只要取m充分大（且$n>m$），则$d(x_m, x_n)$便可任意的小。这就证明了(x_m)是一个柯西序列。由于X是完备的，所以它是收敛的，不妨设$x_m\rightarrow x$。我们将证明这个极限x就是映射T的不动点。

由三角不等式和(1)式，可推得

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leqslant d(x, x_m)+d(x_m, Tx) \\ &\leqslant d(x, x_m)+\alpha d(x_{m-1}, x) \end{aligned}$$

由于$x_m\rightarrow x$，所以当m充分大时，$d(x, x_m)+\alpha d(x_{m-1}, x)$可以任意的小（小于任意预先指定的$\varepsilon>0$）。从而推出$d(x, Tx)=0$。根据§1.1（M2）有$x=Tx$。这便证明了$x$是$T$的一个不动点。

因为若有$Tx=x$及$T\tilde{x}=\tilde{x}$，则由(1)可得到

$$d(x, \tilde{x})=d(Tx, T\tilde{x})\leqslant\alpha d(x, \tilde{x})$$

由于$\alpha<1$，这就意味着$d(x, \tilde{x})=0$。因此根据（M2）有$x=\tilde{x}$，说明T的不动点是唯一的。从而证明了定理。

5.1-3推论（迭代，误差界） 在定理5.1-2的条件下，迭代序列(2)对任意的$x_0\in X$都收敛到T的唯一不动点x，且有一个**先验的误差估计**

$$d(x_m, x)\leqslant\frac{\alpha^m}{1-\alpha}d(x_0, x_1) \tag{5}$$

及一个**后验的误差估计**

$$d(x_m, x)\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}d(x_{m-1}, x_m) \tag{6}$$

证明：从定理的证明很容易看出第一个论断是正确的。对不等式(4)两端关于$n\to\infty$求极限便得到(5)。至于(6)，先在(5)中取$m=1$，$x_0=y_0$，$x_1=y_1$，便得到

$$d(y_1, x)\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}d(y_0, y_1)$$

再取$y_0=x_{m-1}$，因而$y_1=Ty_0=Tx_{m-1}=x_m$，代入上式便得到(6)。

先验误差界(5)可在计算之初根据给定的精度要求用来估计需要计算的步数。式(6)可用于中间步骤或计算结束的估计，它至少有如式(5)一样的精度，还可能更好些；见习题8。

从应用数学的观点来看，定理所要求的条件有时不能完全满足，经常会出现这样的情况：映射T不是在整个X上都是压缩的，而只是在X的子集Y上是压缩的。然而，若Y是闭的，根据定理1.4-7 Y也是完备的。所以T在Y上有一个不动点x。象前边一样造迭代序列$x_m\to x$，不过这里要对初始点x_0的选取施加适当的限制，以保证x_m都落在Y中。一个典型而具有实用价值的结论是下面的定理。

5.1-4定理（球上的压缩） 设T是从完备度量空间$X=(X, d)$到它自己的一个映射，并且T在闭球$Y=\{x \mid d(x, x_0)\leqslant r\}$上是压缩的，即对所有的$x, y\in Y$满足(1)。此外，还假定

$$d(x_0, Tx_0)<(1-\alpha)r \tag{7}$$

则迭代序列(2)收敛到$x\in Y$，这个x是T的一个不动点，且是T在Y中的唯一不动点。

证明：我们只需证明迭代序列(x_m)及x都落在Y中就够了。在(4)中令$m=0$并把n改为m，则有

$$d(x_0, x_m)\leqslant\frac{1}{1-\alpha}d(x_0, x_1)$$

再利用（7）便得到

$$d(x_0, x_m)<r$$

因此所有的x_m都落在Y中。由于$x_m\to x$，并且Y是闭的，故$x\in Y$。其它断言可从定理5.1-2的证明中得到。

为了后面的应用，读者可以对下述事实给出一个简单的证明。

5.1-5引理（连续性） 度量空间X上的压缩映射T是一个连续映射。

习　　题

1.在初等几何里找出一些映射例子，分别满足(*a*) 有唯一的不动点，(*b*) 有无穷个不动点。

2.设$X=\{x\in \mathbf{R} \mid x\geqslant 1\}\subset \mathbf{R}$，并用$Tx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}$定义映射$T$：$X\to X$。证明$T$是一个压缩映射，并求出最小的$\alpha$。

3.举例说明定理5.1-2中空间的完备性条件是根本的，并且是不可缺少的。

4.重要的是，当$x\neq y$时定理5.1-2中的条件(1)不能换成$d(Tx, Ty)<d(x, y)$。要看出为什么，只要考虑$X=\{x \mid 1\leqslant x<+\infty\}$，取实直线上通常意义的度量，再用$Tx=x+\frac{1}{x}$定义$T$：$X\to X$，证明当$x\neq y$时有

$$|Tx-Ty|<|x-y|$$

但映射T没有不动点。

5.当$x\neq y$时若T：$X\to X$满足$d(Tx, Ty)<d(x, y)$并且T有一个不动点，证明这个不动点是唯一的。这里只要求(X, d)是一个度量空间。

6.若T是压缩的，证明T^n $(n\in N)$ 也是压缩的，若T^n对$n>1$是压缩的，证明T未必是压缩的。

7.证明引理5.1-5。

8.证明式(5) 给出的误差界形成一个真正单调递减的序列。证明式(6) 至少有与式(5)一样的好。

9.证明：在定理5.1-4的条件下，有先验误差估计$d(x_m, x)<\alpha^m r$及后验误差估计(6)。

10.在分析中，迭代序列$x_n=g(x_{n-1})$收敛的一个常用的充分条件是，g是连续可微的，并且

$$|g'(x)|\leqslant\alpha<1$$

用巴拿赫不动点定理来验证它。

11.为了求已知方程$f(x)=0$的一个近似数值解，将方程化成$x=g(x)$的形式，然后选初始值x_0并计算

$$x_n=g(x_{n-1}), \qquad n=1, 2, \cdots$$

假定g在某一区间$J=[x_0-r, x_0+r]$上是连续可微的，并且在J上满足$|g'(x)|\leqslant\alpha<1$以及

$$|g(x_0)-x_0|<(1-\alpha)r$$

证明$x=g(x)$在J上有唯一的解x，迭代序列(x_m)收敛到这个解x，并且有误差估计

$$|x-x_m|<\alpha^m r, \quad |x-x_m|\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}|x_m-x_{m-1}|$$

12.若f在区间$J=[a, b]$上是连续可微的，并且$f(a)<0$，$f(b)>0$，$0<k_1\leqslant f'(x)\leqslant k_2$ $(x\in J)$；利用巴拿赫定理5.1-2，构造一个求解方程$f(x)=0$的迭代程序。采用$g(x)=x-\lambda f(x)$，λ是适当选定的。

13. 考察解$f(x)=x^3+x-1=0$的一个迭代程序；(*a*) 证明一种可能性是

$$x_n=g(x_{n-1})=(1+x_{n-1}^2)^{-1}$$

选取$x_0=1$并执行三步。$|g'(x)|<1$？（见习题10）证明这个迭代过程可用图51说明。(*b*) 用(5)估计误差。(*c*) 我们可把$f(x)=0$写成$x=1-x^3$。这种形式适合迭代吗？用$x_0=1$，$x_0=0.5$，$x_0=2$试验一下，看看会出现什么问题。

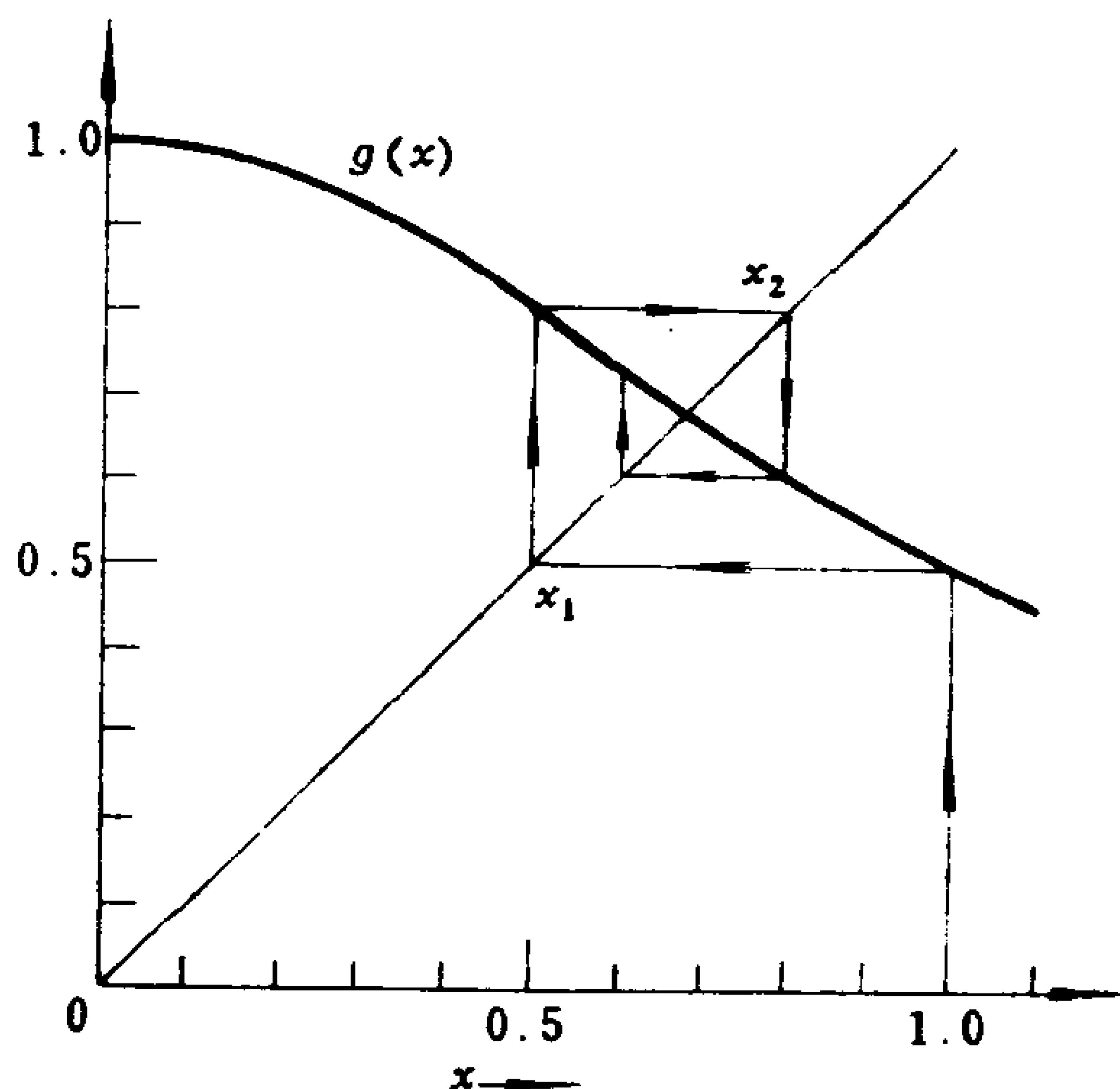


图51 习题13 (a) 中的迭代

14. 证明求解习题13中的方程的另一个迭代程序是

$$x_n=x_{n-1}^{1/2}(1+x_{n-1}^2)^{-1/2}$$

选取$x_0=1$并定出x_1，x_2，x_3。收敛加快的原因是什么？（实根是0.682328，6位有效数字）

15. **（牛顿法）** 设f是区间$[a,b]$上的一个实值且两次连续可微的函数，$\hat{x}$是f在(a,b)内的一个单根（零点）。证明下述牛顿法

$$x_{n+1}=g(x_n)\ ,\quad g(x_n)=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

是$\hat{x}$的某一邻域内的压缩映射（所以对充分靠近$\hat{x}$的任一x_0，这一迭代序列都是收敛到$\hat{x}$的。）

16. **（方根）** 证明计算给定正数c的方根的一个迭代程序是

$$x_{n+1}=g(x_n)=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right)$$

其中$n=0,1,\cdots$。从习题10能得到什么条件？从$x_0=1$出发，计算出$\sqrt{2}$的近似值x_1，x_2，x_3，x_4。

17. 设$T:X\to X$是完备度量空间上的一个压缩，所以(1)是成立的。由于舍入误差和其它方面的原因，我们常常必须用映射$S:X\to X$代替T，这个映射S使得对一切$x\in X$都有

$$d(Tx,\ Sx)\leqslant\eta,\quad(\eta>0，适当的)$$

用归纳法证明，对任一$x\in X$有

$$d(T^mx,\ S^mx)\leqslant\eta\frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}\qquad(m=1,2,\cdots)$$

18. 习题17中的映射S可能没有不动点；但在实际上对某一个n，S^n常常有一不动点y。用习题17证明：从y到T的不动点x的距离满足

$$d(x,\ y)\leqslant\frac{\eta}{1-\alpha}$$

19. 在习题17中，设$x=Tx$和$y_m=S^my$。用(5)和习题17证明：

$$d(x, y_m) \leqslant \frac{1}{1-\alpha}[\eta + \alpha^m d(y_0, Sy_0)]$$

这个公式在应用中有什么重要意义？

20.（李卜希兹条件） 对于映射T：$[a, b] \to [a, b]$，若存在常数k，使得对一切x，$y \in [a, b]$有

$$|Tx - Ty| \leqslant k|x-y|$$

则称T在$[a, b]$上是满足李卜希兹条件的，k叫做一个李卜希兹常数。(a) T是一个压缩映射吗？(b) 若T是连续可微的，证明T满足一个李卜希兹条件。(c) 试问(b)的逆成立吗？

§5.2 巴拿赫定理在线性方程方面的应用

巴拿赫不动点定理在用迭代法求解线性代数方程组方面有重要的应用，并且也为收敛性和误差界提供了充分条件。

为了更好地理解，首先回顾一下：解这种方程组有各种直接法（若计算机的字长没有限制的话，用这种方法经过有限多次算术运算是能够得到精确解的。）；大家最熟悉的一种方法是高斯消去法（消去法的大致过程在中学就曾教过）。然而，迭代法或间接法，对特殊的方程组可能更为有效，例如，方程组是稀疏的情况，也就是说，方程个数很多，但只有很少的非零系数。（振动问题，网络问题，偏微分方程的差分逼近等都常常归结为稀疏的方程组。）再者，常用的直接法要求大约$n^3/3$次算术运算（n是方程的个数，也是未知数的个数）而对于大的n，舍入误差可能变得很大，而在迭代方法中，由舍入（或者因疏忽）而造成的误差可以加以遏制。实际上，经常用迭代法去改进由直接法求得的解。

为了应用巴拿赫定理，我们需要一个完备的度量空间和在其上的一个压缩映射。所以我们取所有n元实序组

$$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n), \quad y=(\eta_1, \cdots, \eta_n), \quad g=(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$$

等的集合X，在其上定义度量d为

$$d(x, z) = \max_j |\xi_j - \zeta_j| \tag{1}$$

则$X=(X, d)$是完备的；其简单的证明与例1.5-1是类似的。

在X上用

$$y = Tx = Cx + b \tag{2}$$

定义T：$X \to X$，其中$C=(c_{jk})$是一个固定的$n \times n$的实方阵，$b \in X$是一个固定的矢量。在本节中，所涉及到的矢量一律视为列矢量，因为要符合矩阵乘法的通常约定。

在什么条件下，T是一个压缩映射？把(2)按分量写出，便有

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\xi_k + \beta_j, \qquad j=1, 2, \cdots, n,$$

其中$b=(\beta_j)$。令$w=(\omega_j)=Tz$，因而从(1)和(2)可得到

$$d(y, w)=d(Tx, Tz)=\max_j |\eta_j-\omega_j|$$

$$=\max_j \left|\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(\xi_k-\zeta_k)\right|$$

$$\leqslant \max_j |\xi_j-\zeta_j| \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|$$

$$=d(x, z)\max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|$$

可以看出，它也能被写成$d(y, w)\leqslant \alpha d(x, z)$，其中

$$\alpha=\max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| \tag{3}$$

因而巴拿赫定理5.1-2给出了如下定理。

5.2-1定理（线性方程） 若含有n个方程和n个未知数$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$（$x$的分量）的线性方程组

$$x=Cx+b, \quad (C=(c_{jk}),\ b\text{给定}) \tag{4}$$

满足

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|<1, \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{5}$$

则它恰好有一个解x。这个解可以通过求迭代序列（$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots$）的极限而得到，其中$x^{(0)}$是任意取的，并且

$$x^{(m+1)}=Cx^{(m)}+b, \quad m=0, 1, \cdots \tag{6}$$

误差界是（见(3)）

$$d(x^{(m)}, x)\leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}d(x^{(m-1)}, x^{(m)})\leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha}d(x^{(0)}, x^{(1)}) \tag{7}$$

条件(5)对收敛性是充分的。由于它是对C的各行元素的绝对值求和，所以又把条件(5)叫做**行和判据**。若在X上取另外的度量代替式(1)，则将得到另外的条件。在习题7和8中包括了两个实用上很重要的情况。

相对于实际上采用的方法，定理5.2-1又是如何呢？通常把含有n个方程和n个未知数的线性方程组写成为

$$Ax=c \tag{8}$$

其中A是n阶的方阵。在$\det A\neq 0$时，关于(8)的很多迭代法都是把A写成$A=B-G$，其中B是一个适当的非奇异矩阵。则(8)变成

$$Bx=Gx+c$$

或

$$x=B^{-1}(Gx+c)$$

这就给出了迭代格式(6)，其中取

$$C=B^{-1}G, \qquad b=B^{-1}c \tag{9}$$

下面用两个标准的方法来说明它，一种方法是雅可比迭代，它有很大的理论意义，而另

一种方法是高斯-赛德尔迭代，在应用数学中得到广泛的应用。

5.2-2雅可比迭代 这种迭代方法是用

$$\xi_j^{(m+1)}=\frac{1}{a_{jj}}(\gamma_j-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}a_{jk}\xi_k^{(m)} \qquad j=1,\ 2,\ \cdots n \tag{10}$$

来定义的，其中$c=(\gamma_j)$就是(8)中的矢量c，并且还假定对$j=1, 2, \cdots, n$都有$a_{jj}\neq 0$。这个迭代是根据关于ξ_j解(8)中的第j个方程而提出的。要验证(10)能够被写成(6)的形式是不难的，只要令

$$C=-D^{-1}(A-D), \qquad b=D^{-1}c \tag{11}$$

其中$D=\mathrm{diag}\ (a_{jj})$是对角矩阵，$D$的非零元就是$A$的主对角元。

应用到式(11)中的C所得到的条件(5)，对于雅可比迭代的收敛是充分的。由于式(11)中的C相对来说比较简单，能够直接用A的元素来表示条件(5)。关于雅可比迭代的行和判据是

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left|\frac{a_{jk}}{a_{jj}}\right|<1, \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n, \tag{12}$$

或

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|a_{jk}|<|a_{jj}|, \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n, \tag{12*}$$

粗略地讲，这就表明：若A的主对角元足够大，则便能保证迭代的收敛。

值得注意的是，在雅可比迭代中，$x^{(m+1)}$的某些分量已经可以立即有效地使用但却没有使用，而仍按程序继续计算其余的分量，也就是说，待一个迭代循环的结束，才把新的近似解的所有分量一同引进下一个循环。我们把这一事实说成是：雅可比迭代是一个同时校正的方法。

5.2-3高斯-赛德尔迭代 这是一个逐次校正的方法，在这种迭代过程的每一时刻，把当时计算出的已知新分量都被用到紧接着的计算中去。这种方法是用

$$\xi_j^{(m+1)}=\frac{1}{a_{jj}}\left(\gamma_j-\sum_{k=1}^{j-1}a_{jk}\xi_k^{(m+1)}-\sum_{k=j+1}^{n}a_{jk}\xi_k^{(m)}\right) \tag{13}$$

来定义的，其中$j=1, 2, \cdots, n$，并且仍假定对所有的j，$a_{jj}\neq 0$。

把矩阵A分解成（图52）下式能得到式(13)的矩阵形式，

$$A=-L+D-U$$

其中D就是雅可比迭代中的D，而L和U分别是下三角阵和上三角阵，并且它们的主对角元都是零，而负号是为了方便才写出的。可以想象出，式(13)中的每个方程分别用a_{jj}去乘，则可写成

$$Dx^{(m+1)}=c+Lx^{(m+1)}+Ux^{(m)}$$

或

$$(D-L)\ x^{(m+1)}=c+Ux^{(m)}$$

再用 $(D-L)^{-1}$乘上式两端便得到(6)，其中

$$C=(D-L)^{-1}U, \qquad b=(D-L)^{-1}c \tag{14}$$

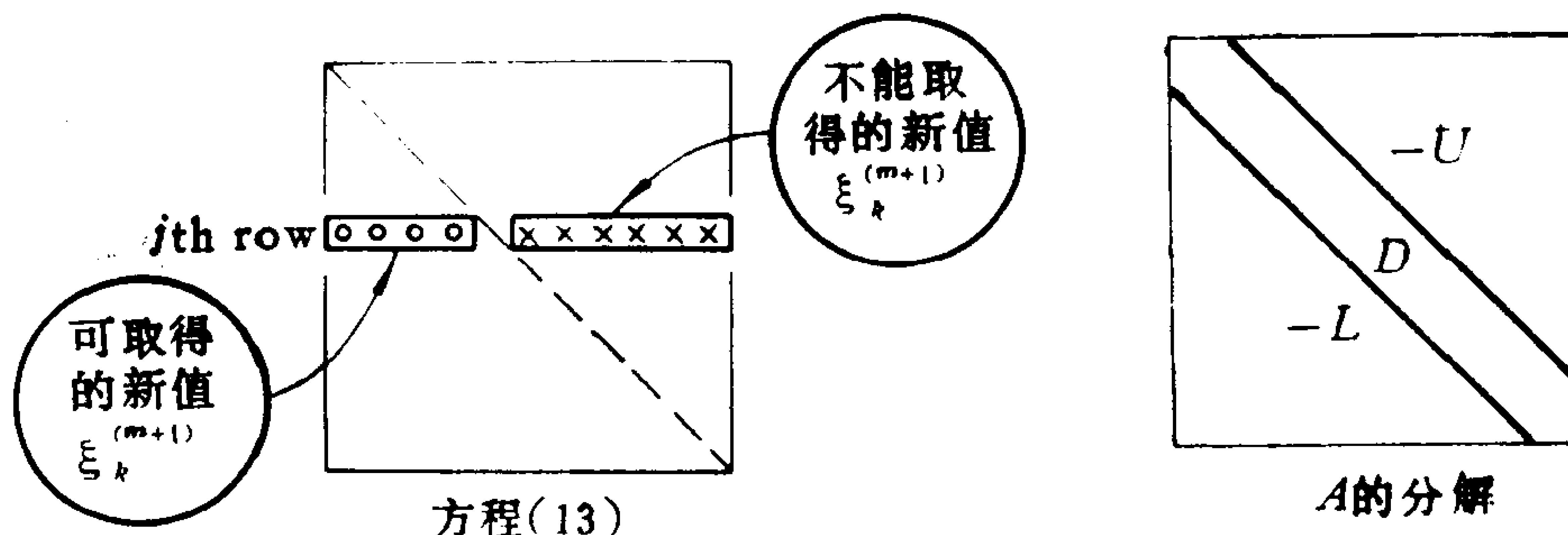


图52 高斯-赛德尔公式(13)和(14)的解释

相对式(14)中C的条件(5)，对于高斯-赛德尔迭代的收敛是充分的。由于C比较复杂，留下的实际问题是要求得一个较简单的条件，它能保证式(5)的有效性就够了。我们不加证明地指出，式(12)是充分的，但还有更好的条件。有兴趣的读者能够在托德（*J·Todd* 1962），*p*. 494，495，500中找到。

习　题

1.验证(11)和(14)。

2.考虑方程组

$$5\xi_1-\xi_2=7$$
$$-3\xi_1+10\xi_2=24$$

(*a*) 求出精确解。(*b*) 应用雅可比迭代。C满足(5)吗？从$x^{(0)}=(1,\ 1)^T$出发，计算$x^{(1)}$，$x^{(2)}$及关于$x^{(2)}$的误差界(7)，并与$x^{(2)}$的实际误差进行比较。(*c*)再应用高斯-赛德尔迭代法执行(*b*)中的计算。

3.考虑方程组

$$\begin{aligned}
\xi_1-0.25\xi_2-0.25\xi_3\qquad\qquad &=0.50\\
-0.25\xi_1+\xi_2\qquad\qquad-0.25\xi_4&=0.50\\
-0.25\xi_1\qquad\qquad+\xi_3-0.25\xi_4&=0.25\\
-0.25\xi_2-0.25\xi_3+\xi_4&=0.25
\end{aligned}$$

（这种形式的方程出现在偏微分方程的数值解中。）(*a*)从$x^{(0)}=(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$出发，应用雅可比迭代并执行三步，把近似解与精确解$\xi_1=\xi_2=0.875$，$\xi_3=\xi_4=0.625$加以比较。(*b*)再应用高斯-赛德尔迭代，按(*a*)中要求进行计算和比较。

4.**盖尔斯果林（Gersgorin）定理**：若λ是方阵$C=(c_{jk})$的一个特征值，则对某个j $(1\leqslant j\leqslant n)$有

$$\left|c_{jj}-\lambda\right|\leqslant\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|c_{jk}|$$

(C的特征值是对某个$x\neq 0$满足$Cx=\lambda x$的数λ。)(a) 证明可把(4) 写成 $Kx=b$，其中$K=I-C$，并且盖氏定理与(5)合在一起蕴含着K没有零特征值(故K是非奇异的，即$\det K\neq 0$，$Kx=b$有唯一的解。) (b) 证明(5) 和盖氏定理合在一起蕴含着(6) 中的C的谱半径小于1(可以证明它是迭代收敛的充分必要条件，C的谱半径定义为$\max_i |\lambda_i|$，λ_1，λ_2，…，λ_n为C的特征值。)

5. 下面的方程组

$$\begin{aligned} 2\xi_1+\ \xi_2+\ \xi_3&=4\\ \xi_1+2\xi_2+\ \xi_3&=4\\ \xi_1+\ \xi_2+2\xi_3&=4 \end{aligned}$$

是这样的一个例子：对它用雅可比迭代则发散，而用高斯-赛德尔迭代则收敛。从$x^{(0)}=0$出发，验证雅可比迭代的发散性，并执行高斯-赛德尔迭代的前几步，可得到这种迭代似乎收敛到精确解$\xi_1=\xi_2=\xi_3=1$的印象。

6. 总认为高斯-赛德尔迭代比雅可比迭代要好些，似乎是有道理的。其实，这两种方法是不好比较的。这有点使人感到意外。例如，对于方程组

$$\begin{aligned} \xi_1\qquad\quad+\xi_3&=2\\ -\xi_1+\ \xi_2\qquad\quad&=0\\ \xi_1+2\xi_2-3\xi_3&=0 \end{aligned}$$

应用雅可比迭代是收敛的，而用高斯-赛德尔迭代则发散。从习题4(b) 中所说的充要条件来推导这两个事实。

7. (**列和判据**) 对于式(1) 中的度量有条件(5)。若在X上定义度量d_1为

$$d_1(x,z)=\sum_{j=1}^{n}|\xi_j-\zeta_j|$$

证明代替(5) 而得到条件

$$\sum_{j=1}^{n}|c_{jk}|<1,\qquad k=1,\ 2,\ \cdots,n \tag{15}$$

8. (**平方和判据**) 对于式(1) 中的度量有条件(5)。若在X上定义欧几里德度量d_2为

$$d_2(x,z)=\left[\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\zeta_j)^2\right]^{1/2}$$

证明代替(5) 而得到条件

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{jk}^2<1 \tag{16}$$

9. (**雅可比迭代**) 证明：对于雅可比迭代收敛的充分条件(5)，(15)和(16)分别取

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|}<1,\qquad \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|}<1,\qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\j\neq k}}^{n}\frac{a_{jk}^2}{a_{jj}^2}<1。$$

10. 找一个矩阵C满足(5)，但既不满足(15)也不满足(16)。

§5.3 巴拿赫定理在微分方程方面的应用

巴拿赫不动点定理的最有意义的应用还是关于函数空间的。我们将会看到，这个定理给出了微分方程和积分方程的存在和唯一性定理。

事实上，在这一节我们研究显式的一阶常微分方程

$$x' = f(t, x) \qquad \left(' = \frac{d}{dt}\right) \tag{1a}$$

这个方程再加上初始条件

$$x(t_0) = x_0 \tag{1b}$$

便构成一个**初值问题**，其中t_0和x_0是给定的实数。

我们将利用巴拿赫定理来证明著名的皮卡（Picard）定理，这个定理虽说在同类定理中不是最强的，但在常微分方程的理论中却起着不可忽视的作用。处理问题的思路是很简单的：先将方程(1)改写成一个积分方程，从而定义了一个映射T。并且在定理的条件下推出T是一个压缩映射，其不动点就成为原问题的解。

5.3-1皮卡的存在与唯一性定理（常微分方程） 设f在矩形域（图53）

$$R = \{(t,x) \mid |t-t_0| \leqslant a,\ |x-x_0| \leqslant b\}$$

上是连续的，因而在R上也是有界的，不妨设对一切$(t, x) \in R$有（见图54）

$$|f(t, x)| \leqslant c \qquad \text{对一切 } (t, x) \in R \tag{2}$$

还假定f相对于其第二个变量在R上满足一个**李卜希兹条件**，即存在一个常数k（李卜希兹常数）使得对(t, x)，$(t, v) \in R$有

$$|f(t, x) - f(t, v)| \leqslant k|x - v| \tag{3}$$

则初始问题(1)有唯一的解，这个解在区间$[t_0-\beta, t_0+\beta]$上存在，其中①

$$\beta < \min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\} \tag{4}$$

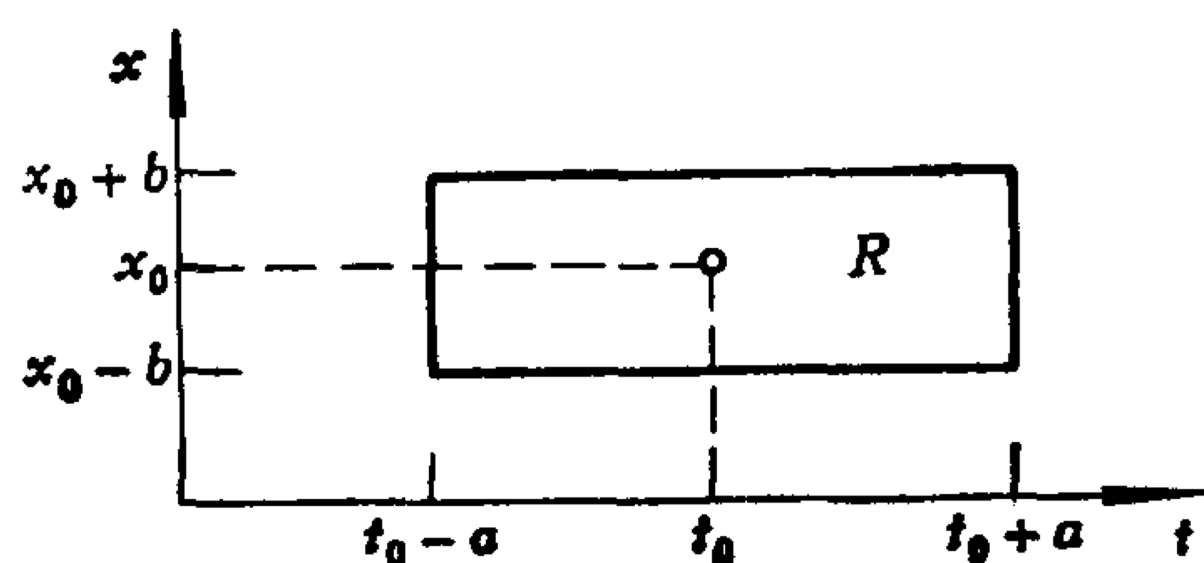


图53 矩形域R

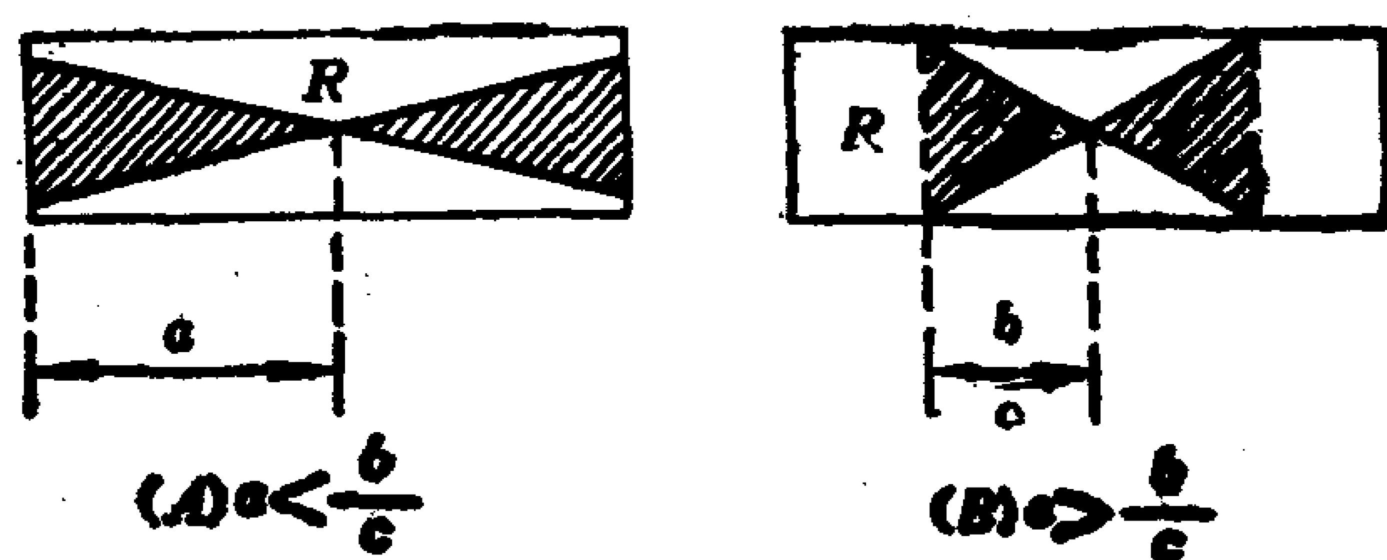


图54 不等式(2)的几何解释，其中(A)比较小的c，(B)比较大的c。解曲线一定落在阴影区域内，而该区域是由直线b=±ca所界定的。

---

①在经典的证明中，$\beta<\min\{a, b/c\}$，这个结果更好些。只要对我们的证明稍作改动，便可得到这一结果，不过要利用较为复杂的度量。可参阅附录3中的参考文献A·比莱基(A·Bielecki 1956)

证明：设$C(J)$是这样的一个度量空间：其元素为区间$J=[t_0-\beta, t_0+\beta]$上的所有实值连续函数，其上的度量d为

$$d(x, y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|$$

由1.5-5知道$C(J)$是完备的。所有满足

$$|x(t)-x_0|\leqslant c\beta \tag{5}$$

的函数$x\in C(J)$构成$C(J)$的一个子空间，记之为$\tilde{C}$。不难证明$\tilde{C}$在$C(J)$中是闭的（见习题6），所以根据1.4-7知$\tilde{C}$是完备的。

通过积分，式(1) 能够被写为$x=Tx$，其中$T:\tilde{C}\to\tilde{C}$是用

$$Tx(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau, x(\tau))d\tau \tag{6}$$

来定义的。实际上，由式(4) 知$c\beta<b$，所以T对一切$x\in\tilde{C}$都有定义，故若$\tau\in\tilde{C}$，便有$\tau\in J$及$(\tau, x(\tau))\in R$，而由于f在R上连续，所以积分(6) 存在。欲证T是$\tilde{C}$到$\tilde{C}$的映射，利用式(6) 和式(2) 可得到

$$|Tx(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(\tau, x(\tau))\,d\tau\right|\leqslant c|t-t_0|\leqslant c\beta$$

现在来证明T在$\tilde{C}$是一个压缩映射。根据李卜希兹条件(3)

$$\begin{aligned}|Tx(t)-Tv(t)|&=\left|\int_{t_0}^{t}[f(\tau,x(\tau))-f(\tau,v(\tau))]d\tau\right|\\&\leqslant|t-t_0|\max_{\tau\in J}k|x(\tau)-v(\tau)|\\&\leqslant k\beta d(x, v)\end{aligned}$$

由于最后一个表示式与t无关，所以关于左端取最大值有

$$d(Tx, Tv)\leqslant\alpha d(x, v), \qquad \alpha=k\beta$$

而由式(4) 看出$\alpha=k\beta<1$，所以T确实是$\tilde{C}$上的一个压缩映射。因而从定理5.1-2推出T有唯一的不动点$x\in\tilde{C}$，即有满足$x=Tx$且在J上连续的函数x。把$x=Tx$根据式(6) 写出，便有

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau, x(\tau))\,d\tau \tag{7}$$

由于$(\tau, x(\tau))\in R$，f在其上连续，故式(7) 是可微的。因此x也是可微的且满足式(1)。反之，式(1) 的每个解一定满足式(7)。这就完成了证明。

巴拿赫定理也蕴含着，式(1) 的解x是皮卡迭代序列$(x_0, x_1, x_2\cdots)$的极限，迭代格式是

$$x_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x_n(\tau))\,d\tau \tag{8}$$

其中$n=0, 1, \cdots$。然而，用这种方法求式(1) 的近似解及相应的误差界的实用性是相当有限的，因为迭代过程包含了积分运算。

最后我们指出，可以证明f的连续性对于问题(1)的解的存在性是一个充分条件（但不必要），但对唯一性不是充分的。李卜希兹条件是充分的（如皮卡定理证明的那样），但不是必要的。欲详细了解，可看E·英斯（$E \cdot L \cdot Ince$，1956）的书，它包含了关于皮卡定理的历史注释（在63页上）及经典的证明，读者可以把我们的证明与经典的证明加以比较。

习　　题

1.若f的偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$在矩形域$R$(见皮卡定理)上存在且连续，证明$f$关于第二个变量在$R$中满足一个李卜希兹条件。

2.证明函数$f(t, x)=|\sin x|+t$在整个tx平面上关于x满足李卜希兹条件，但当$x=0$时它的偏导数$\partial f/\partial x$不存在。这说明什么样的事实？

3.由$f(t, x)=|x|^{1/2}$所定义的f满足李卜希兹条件吗？

4.找出初值问题$tx'=2x$，$x(t_0)=x_0$的全部初始条件，使得(a)没有解，(b)有一个以上的解，(c)有唯一的精确解。

5.解释为什么要提出(4)中的限制：

$$\beta<b/c, \qquad \beta<1/k$$

6.证明：皮卡定理证明中的$\tilde{C}$在$C(J)$中是闭的。

7.证明：在皮卡定理中，代替常数x_0我们能够取满足$y_0(t_0)=x_0$的任一其它函数$y_0\in\tilde{C}$作为迭代的初始函数。

8.把皮卡迭代(8)应用到$x'=1+x^2$，$x(0)=0$。验证x_3所包含的t，t^2，…，t^5的项是和精确解所包含的这些项一样。

9.证明：$x'=3x^{2/3}$，$x(0)=0$有无穷多解x：

$$x(t)=\begin{cases} 0, & t<c \\ (t-c)^3, & t\geqslant c \end{cases}$$

其中$c>0$是任一常数。方程右端的$3x^{2/3}$满足李卜希兹条件吗？

10.证明：初值问题

$$x'=|x|^{1/2}, \qquad x(0)=0$$

的解为$x_1=0$及$x_2=\frac{t|t|}{4}$。这与皮卡定理矛盾吗？求其它的解。

§5.4　巴拿赫定理在积分方程方面的应用

最后，作为积分方程的存在与唯一性定理的一个来源，再一次考虑巴拿赫不动点定理。形如

$$x(t)-\mu\int_a^b K(t, \tau)x(\tau)d\tau=v(t) \tag{1}$$

的积分方程叫做第二类的**弗雷德霍姆方程**①。其中〔a，b〕是给定的区间，x是定义在〔a,b〕上的未知函数，μ是一个参数。方程的**核**K是定义在正方形区域$G=〔a,b〕\times〔a,b〕$（图55所示）上的已知函数，而v是〔a，b〕上的给定函数。

积分方程能够放在各种函数空间上来研究。在这一节，我们把（1）放在$C〔a,b〕$上，而$C〔a,b〕$是定义在区间$J=〔a,b〕$上的所有连续函数空间，其上的度量d为

$$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)| \tag{2}$$

见1.5-5。为了计划用巴拿赫定理，$C〔a,b〕$是完备的这一点很重要。我们假定$v\in C〔a,b〕$并且K在G上是连续的，则K在G上是一个有界函数，不妨设对一切$(t,\tau)\in G$有

$$|K(t,\tau)|\leqslant C \quad 对一切\ (t,\tau)\in G \tag{3}$$

显然，可把(1) 写成$x=Tx$，其中

$$Tx(t)=v(t)+\mu\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau \tag{4}$$

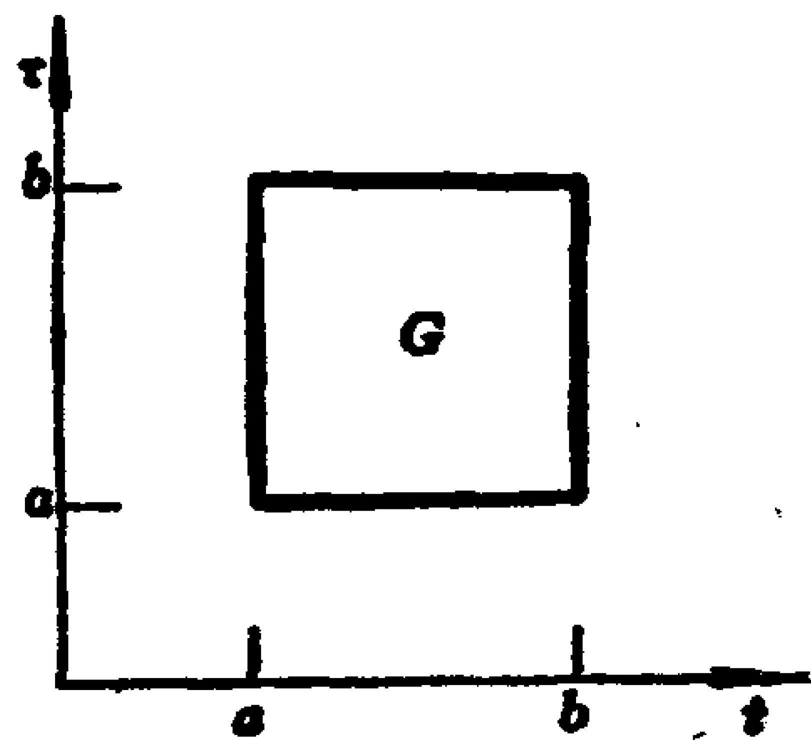


图55　积分方程(1)的核k的定义域G这里假定a和b都是正的

由于v和k都是连续的，所以公式(4) 定义了一个算子$T:C〔a,b〕\to C〔a,b〕$。现在我们对μ施加一个限制，使得T成为一个压缩映射。从(2) 到(4) 可以推出

$$\begin{aligned}d(Tx,Ty)&=\max_{t\in J}|Tx(t)-Ty(t)|\\&=|\mu|\max_{t\in J}\left|\int_a^b K(t,\tau)[x(\tau)-y(\tau)]d\tau\right|\\&\leqslant|\mu|\max_{t\in J}\int_a^b|K(t,\tau)|\ |x(\tau)-y(\tau)|d\tau\\&\leqslant|\mu|c\max_{\sigma\in J}|x(\sigma)-y(\sigma)|\int_a^b d\tau\\&=|\mu|c(b-a)d(x,y)\end{aligned}$$

这就能够写成$d(Tx,Ty)\leqslant\alpha d(x,y)$，其中

$$\alpha=|\mu|c\ (b-a)$$

可以看出，若

$$|\mu|<\frac{1}{c(b-a)} \tag{5}$$

---

①象定理5.4-1证明的那样，由于方程中有x(t)一项存在，我们便能够应用迭代法求方程的近似解。没有这一项的方程

$$\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau=v(t)$$

叫做第一类的弗雷德霍姆(Fredholm)方程。

则T成为一个压缩算子（$\alpha<1$）。从而由巴拿赫不动点定理可以得到：

5.4-1定理（弗雷德霍姆积分方程） 假若式(1)中的K和v分别在$J\times J$和$J=[a,b]$上是连续的，且μ满足(5)，其中c是(3)中定义的。则方程(1)在J上有唯一的解x。并且函数x是迭代序列（$x_0,x_1,\cdots$）的极限，其中x_0是J上的任一连续函数，而对于$n=0,1,2,\cdots$，

$$x_{n+1}(t)=v(t)+\mu\int_a^b K(t,\tau)x_n(\tau)d\tau \tag{6}$$

关于$Fredholm$的著名的积分方程理论将在第8章讨论。

现在我们来考虑**沃尔泰拉积分方程**

$$x(t)-\mu\int_a^t K(t,\tau)x(\tau)dt=u(t) \tag{7}$$

式(1)和式(7)之间的差别是，在式(1)中的积分上限b是常数，而式(7)中的积分上限是变量。这是很本质的。事实上，对μ不加任何限制，便能得到下面的存在与唯一性定理。

5.4-2定理（沃尔泰拉积分方程） 假若式(7)中的v在$[a,b]$上是连续的，而核K在$t\tau$平面中的三角形区域R上是连续的，其中R由$a\leqslant\tau\leqslant t$，$a\leqslant t\leqslant b$给定，见图56。则(7)在$[a,b]$上对每个$\mu$都有唯一的解$x$。

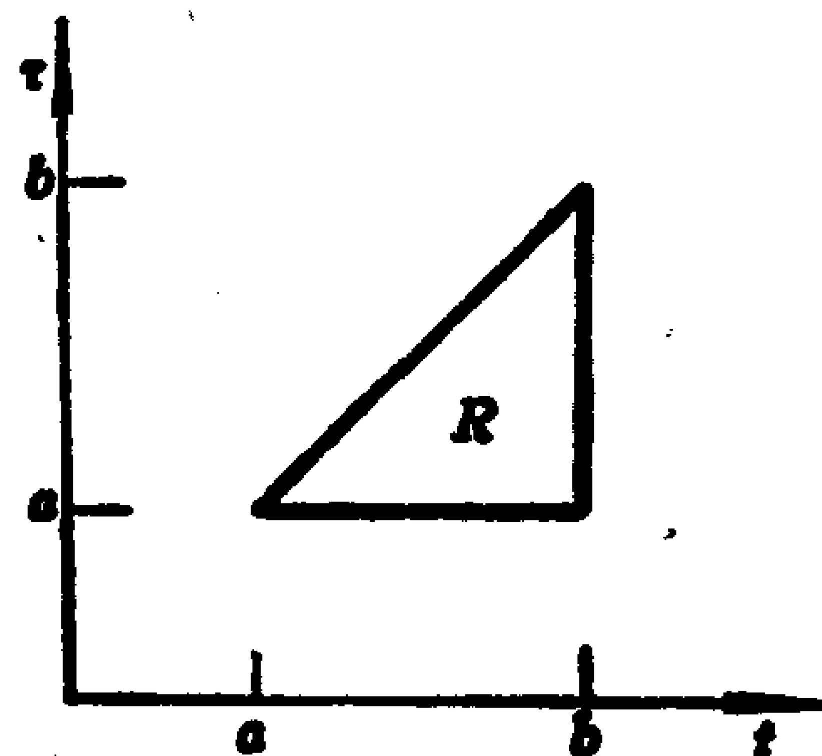


图56 定理5.4-2中的三角形区域R，这里取a，b都是正的

证明：方程(7)能够写成$x=Tx$，其中的算子T：$C[a,b]\to C[a,b]$被定义为

$$Tx(t)=v(t)+\mu\int_a^t K(t,\tau)x(\tau)d\tau \tag{8}$$

由于K在R上是连续的，而R是闭的和有界的，故K在R上是有界的，不妨设对一切$(t,\tau)\in R$有

$$|K(t,\tau)|\leqslant c$$

因而利用式(2)对一切$x,y\in C[a,b]$可得到

$$\begin{aligned}\Big|Tx(t)-Ty(t)\Big|&=|\mu|\left|\int_a^t K(t,\tau)[x(\tau)-y(\tau)]d\tau\right|\\&\leqslant|\mu|\ cd(x,y)\int_a^t d\tau\\&=|\mu|c(t-a)d(x,y)\end{aligned} \tag{9}$$

利用归纳法可以证明

$$\Big|T^m x(t)-T^m y(t)\Big|\leqslant|\mu|^m c^m\frac{(t-a)^m}{m!}d(x,y) \tag{10}$$

对于$m=1$，它就是式(9)。假定式(10)对任一m皆成立，则从式(8)可得到

$$\begin{aligned}\Big|T^{m+1}x(t)-T^{m+1}y(t)\Big|&=|\mu|\left|\int_a^t K(t,\tau)[T^m x(\tau)-T^m y(\tau)]d\tau\right|\\&\leqslant|\mu|c\int_a^t|\mu|^m c^m\frac{(\tau-a)^m}{m!}d\tau\ d(x,y)\end{aligned}$$

$$= |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x, y)$$

这就完成了对式（10）的归纳证明。

对式（10）的右端利用$t-a \leqslant b-a$加以放大，再对左端关于$t \in J$取最大值，便得到

$$d(T^m x, T^m y) \leqslant \alpha_m d(x, y)$$

其中

$$\alpha_m = |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!}$$

对任一固定的μ，只要m足够大，便有$\alpha_m < 1$。因此相应的T^m在$C[a, b]$上是压缩的。定理5.4-2中的断言便能从下述引理推出。

5.4-3引理（不动点） 设$T: X \to X$是完备度量空间$X = (X, d)$上的一个映射（见1.3-3），并假定对某一个正整数m，T^m是一个压缩的映射。则T有唯一的不动点。

证明：据假设，$B = T^m$是X上的一个压缩，又据巴拿赫不动点定理5.1-2，B有唯一的不动点$\hat{x}$，即$B\hat{x} = \hat{x}$。因此$B^n \hat{x} = \hat{x}$。巴拿赫定理也意味着对每个$x \in X$都有

$$B^n x \to \hat{x}, \quad n \to \infty$$

特别取$x = T\hat{x}$，由于$B^n = T^{nm}$，因而有

$$\hat{x} = \lim_{n\to\infty} B^n T \hat{x} = \lim_{n\to\infty} T B^n \hat{x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} T \hat{x}$$

$$= T\hat{x}$$

这说明$\hat{x}$也是T的一个不动点。由于T的每个不动点也是B的不动点，所以T不能有一个以上的不动点。这就完成了证明。

最后还要注意，沃尔泰拉方程也能看作为一个特殊的弗雷德霍姆方程，只要把积分核在正方形区域$G = [a, b] \times [a, b]$的$\tau > t$部分（见图55和56）定义为零就行了，不过在对角线（$\tau = t$）上的点可能不连续。

习　　题

1. 选取$x_0 = v$，用迭代法解积分方程

$$x(t) - \mu \int_0^1 e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = v(t), \quad |\mu| < 1$$

2. **（非线性积分方程）** 若v和k分别在$[a, b]$上和$G = [a, b] \times [a, b] \times \mathbf{R}$上是连续的，并且$k$在$G$上满足李卜希兹条件

$$|k(t, \tau, u_1) - k(t, \tau, u_2)| \leqslant l |u_1 - u_2|$$

证明非线性积分方程

$$x(t)-\mu\int_a^b k(t,\tau,x(\tau))d\tau=v(t)$$

对任一满足$|\mu|<1/l(b-a)$的μ有唯一的解x。

3. 理解积分方程也出现在微分方程的问题中是重要的。(a) 例如，可把初值问题

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\qquad x(t_0)=x_0$$

写成一个积分方程，请指出它是哪一类的积分方程。(b) 证明包含二阶微分方程的初值问题

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(t,x),\qquad x(t_0)=x_0,\qquad x'(t_0)=x_1$$

能够变换成一个$Volterra$积分方程。

4.（诺依曼级数） 用

$$Sx(t)=\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

定义算子S，并令$z_n=x_n-x_{n-1}$，证明(6) 蕴含着

$$z_{n+1}=\mu Sz_n$$

选取$x_0=v$，证明(6) 给出了诺依曼级数

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=v+\mu Sv+\mu^2S^2v+\mu^3S^3v+\cdots$$

5. (a) 用诺依曼级数及(b) 用直接方法求解积分方程

$$x(t)-\mu\int_0^1 x(\tau)d\tau=1$$

6. 求解方程

$$x(t)-\mu\int_a^b cx(\tau)d\tau=v(t)$$

其中c是一个常数，请指出如何利用相应的诺依曼级数得到关于(1) 的诺依曼级数的收敛性条件(5)。

7.（迭代核，预解核） 证明按习题 4 中的诺依曼级数，我们可记

$$(S^nv)(t)=\int_a^b k_{(n)}(t,\tau)v(\tau)d\tau\qquad n=2,\ 3,\ \cdots$$

其中迭代核$k_{(n)}$为

$$k_{(n)}(t,\tau)=\int_a^b\cdots\int_a^b k(\tau,t_1)k(t_1,t_2)\cdots k(t_{n-1},\tau)dt_1\cdots dt_{n-1}$$

故诺依曼级数可写成

$$x(t)=v(t)+\mu\int_a^b k(t,\tau)v(\tau)d\tau+\mu^2\int_a^b k_{(2)}(t,\tau)v(\tau)d\tau+\cdots$$

或者用下面的预解核$\tilde{k}$

$$\tilde{k}(t,\tau,\mu)=\sum_{j=0}^{\infty}\mu^jk_{(j+1)}(t,\tau)\qquad (k_{(1)}=k)$$

把它写成

$$x(t)=v(t)+\mu\int_a^b \tilde{k}(t,\tau,\mu)v(\tau)d\tau$$

8. 有趣的是习题 4 中的诺依曼级数，通过把μ的幂级数

$$x(t)=v_0(t)+\mu v_1(t)+\mu^2 v_2(t)+\cdots$$

代入到(1) 也能够得到，只要逐项积分并比较系数就行了。证明它给出了：

$$v_0(t)=v(t),\quad v_n(t)=\int_a^b k(t,\tau)v_{n-1}(\tau)d\tau,\quad n=1,\ 2,\cdots$$

假定 $|v(t)|\leqslant c_0$ 及 $|k(t,\tau)|\leqslant c$，证明

$$|v_n(t)|\leqslant c_0\,[c(b-a)]^n$$

故(5) 蕴含着收敛性。

9. 利用习题 7 求解(1)，其中$a=0$，$b=2\pi$及

$$k(t,\tau)=\sum_{n=1}^{N} a_n \sin nt\cos n\tau$$

10. 在(1) 中设$a=0$，$b=\pi$，并且

$$k(t,\tau)=a_1\sin t\sin 2\tau+a_2\sin 2t\sin 3\tau$$

用预解核（见习题 7）写出方程的解。

第六章　在逼近论中的应用

本章也属选学内容；其余各章用不到本章所包含的材料。

逼近论是一个广泛而有各种应用的领域。在这一章我们只介绍赋范空间和希尔伯特空间中的逼近论的基本概念和概貌。

本章内容概要

在§6.1中先定义最佳逼近的概念，并讨论最佳逼近的存在性，而唯一性放在§6.2中讨论。若赋范空间是严格凸的(见6.2-2)，则能保证最佳逼近的唯一性，希尔伯特空间正是这样的空间（见6.2-4和§6.5）。对于一般赋范空间，要想保证最佳逼近的唯一性，则需要附加一定的条件，例如$C[a, b]$中的哈尔（*Haar*）条件；见6.3-2和6.3-4。选取不同的范数，会得到不同类型的逼近。其标准的类型包括

(i) $C[a, b]$中的一致逼近（§6.3）；

(ii) 希尔伯特空间中的逼近（§6.5）。

实用的一致逼近引出了有名的契比雪夫多项式（§6.4）。作为一个特殊情况，希尔伯特空间的逼近也包括了$L^2[a, b]$中的最小二乘逼近。对于三次样条函数也将给出一个简短的讨论（§6.6）。

§6.1　赋范空间中的逼近

逼近论是研究用一种较为简单的函数去逼近另一类函数的问题，例如用多项式去逼近定义在某区间上的连续函数。在微积分中已经出现过这种情况：若函数有一个泰勒级数，我们可以考虑用该级数的部分和去逼近这个函数。要想知道逼近的程度，就必须对相应的余项作出估计。

一般来讲，我们希望建立一个切实可用的判定逼近好坏的准则。给定两个函数集合X与Y，并考虑用Y中的函数去逼近X中的函数。我们要研究的是最佳逼近的存在性与唯一性问题，以及按照拟定的判定准则去构造最佳逼近元的问题。逼近问题的自然背景如下所述。

设$X=(X, \|\cdot\|)$是一个赋范空间，Y是X的一个固定子空间。任意给定$x\in X$，求一个$y\in Y$，它是Y中最接近x的元。令δ表示x到Y的距离，据定义

$$\delta=\delta(x, Y)=\inf_{y\in Y}\|x-y\| \tag{1}$$

（见§3.3）。显然，δ依赖于x和Y，而这两者都保持不变，所以可用简单的记号δ。

若存在一个$y_0\in Y$满足

$$\|x-y_0\|=\delta \tag{2}$$

则称y_0为x在Y中的一个**最佳逼近**。

我们看到，最佳逼近y_0是Y中到x有最短距离的元素。这样的$y_0 \in Y$可能存在，也可能不存在，这就出现了存在性问题。对于给定的x和Y，我们将会看到，x在Y中的最佳逼近可能不止一个。因此，唯一性问题也是有实际意义的。

在很多应用中，Y都是取有限维的，这时我们有下面的定理。

6.1-1 存在性定理（最佳逼近） 若Y是赋范空间$X=(X, \|\cdot\|)$的有限维子空间，则对每个$x \in X$，它在Y中都有最佳逼近存在。

证明：设$x \in X$已给定，考虑闭球

$$\tilde{B} = \{ y \in Y \mid \|y\| \leqslant 2\|x\| \}$$

则$0 \in \tilde{B}$，所以关于x到$\tilde{B}$的距离有估计式

$$\delta(x, \tilde{B}) = \inf_{\tilde{y} \in \tilde{B}} \|x - \tilde{y}\| \leqslant \|x - 0\| = \|x\|$$

而若$y \notin \tilde{B}$，则$\|y\| > 2\|x\|$，并且

$$\|x - y\| \geqslant \|y\| - \|x\| > \|x\| \geqslant \delta(x, \tilde{B}) \tag{3}$$

这就表明了$\delta(x, \tilde{B}) = \delta(x, Y) = \delta$，因为任一$y \in Y - \tilde{B}$到$x$的距离都大于$\delta(x, \tilde{B})$。因此，若$x$的最佳逼近存在，则必须落在$\tilde{B}$中。这就看出了我们利用$\tilde{B}$的道理。由于$\tilde{B}$是有限维空间$Y$中的有界闭集，故从2.5-3可推出$\tilde{B}$是紧的，从而考虑用紧子集$\tilde{B}$代替整个子空间$Y$。根据§2.2式(2)知范数是连续的，因而从推论2.5-7便得出：存在$y_0 \in \tilde{B}$使得$\|x - y\|$在$y = y_0$达到其最小值。根据定义，y_0就是x在Y中的一个最佳逼近。

例子

6.1-2 空间$C[a,b]$ 空间$C[a,b]$的一个有限维子空间为

$$Y = \operatorname{span}\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \quad x_j(t) = t^j, \quad (n\text{固定})$$

这是所有次数不超过n的多项式集合，也包括$x=0$（因为通常的讨论都不规定它的次数）。定理6.1-1便意味着，对于给定的在$C[a,b]$上连续的函数x，存在着一个次数不超过n的多项式p_n，使得对每个$y \in Y$都有

$$\max_{t \in J} |x(t) - p_n(t)| \leqslant \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$$

其中$J=[a,b]$。$C[a,b]$中的逼近叫做一致逼近，在下一节将详细地研究。

6.1-3 多项式 在定理6.1-1中，Y的有限维性质是不可缺少的。事实上，设Y是$[0, \frac{1}{2}]$上的所有任意次的多项式集合，它是$C[0, \frac{1}{2}]$的一个子空间。则$\dim Y = \infty$。令$x(t) = (1-t)^{-1}$，若令

$$y_n(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n$$

则对每个$\varepsilon > 0$，都存在一个N，使得对一切的$n > N$有$\|x - y_n\| < \varepsilon$。因此$\delta(x, Y) = 0$。然而，由于$x$不是一个多项式，所以看出不存在$y_0 \in Y$它满足$\delta = \delta(x, y) = \|x - y_0\| = 0$。

习题放在下一节之末。

§6.2 唯一性，严格凸性

本节，我们考虑最佳逼近的唯一性问题。为了让大家理解下面将要研究什么，首先从两个简单例子下手。

若$X=\mathbf{R}^3$，Y是$\xi_1\xi_2$一平面（$\xi_3=0$），则我们知道，给定一点$x_0=(\xi_{10},\xi_{20},\xi_{30})$它在$Y$中的最佳逼近是$y_0=(\xi_{10},\xi_{20},0)$点，从$x_0$到$Y$的距离是$\delta=|\xi_{30}|$，并且最佳逼近$y_0$是唯一的。这个简单的事实从初等几何已经知道。

在其它的空间中，最佳逼近的唯一性可能不再成立，甚至对那些相对来说比较简单的空间，也可能是不成立的。

例如，设$X=(X,\|\cdot\|_1)$是实数序偶$x=(\xi_1,\xi_2)$，… 构成的矢量空间，其上的范数定义为

$$\|x\|_1=|\xi_1|+|\xi_2| \tag{1}$$

让我们取一点$x=(1,-1)$，而子空间Y如图57所示，也就是$Y=\{y=(\eta,\eta)\mid\eta$是实数$\}$。则对于一切$y\in Y$，显然有

$$\|x-y\|_1=|1-\eta|+|-1-\eta|\geqslant 2$$

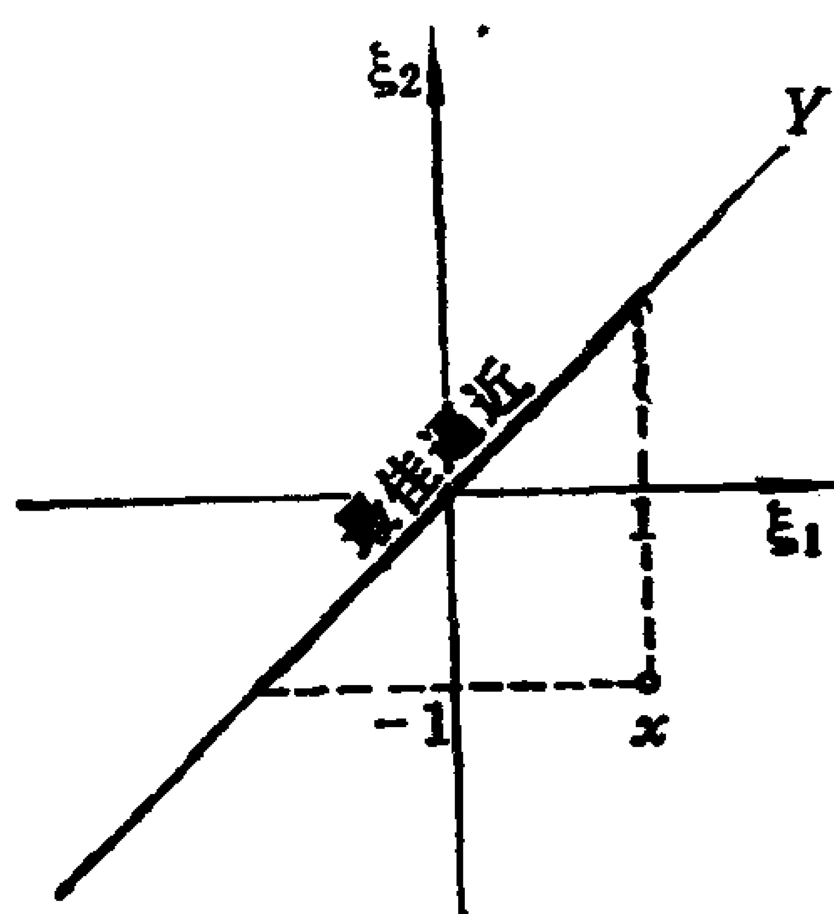


图57 按范数$\|\cdot\|_1$，x在Y中的最佳逼近

从x到Y的距离是$\delta(x,Y)=2$，而在$|\eta|\leqslant 1$的情况下，所有$y=(\eta,\eta)$都是x在Y中的最佳逼近。这说明了甚至在如此简单的空间中，对于给定的x和Y，不仅最佳逼近不唯一，甚至有无穷多。同时还看到，在我们给出的例子中，最佳逼近的集合是一个凸集。并且我们会推断到这一事实具有典型意义。我们也可断言，凸性的概念对研究唯一性问题是很有帮助的。所以，首先让我们陈述凸性的定义，然后再寻求用这个概念解决问题的途径。

对于矢量空间X的子集M，若$y,z\in M$蕴含着集合

$$W=\{v=\alpha y+(1-\alpha)z\mid 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$$

为M的一个子集，则称M是凸的。而集合W叫做一个闭线段（为什么？），y和z叫做线段W的边界点，而W的其余点又叫做W的内点。见图58。

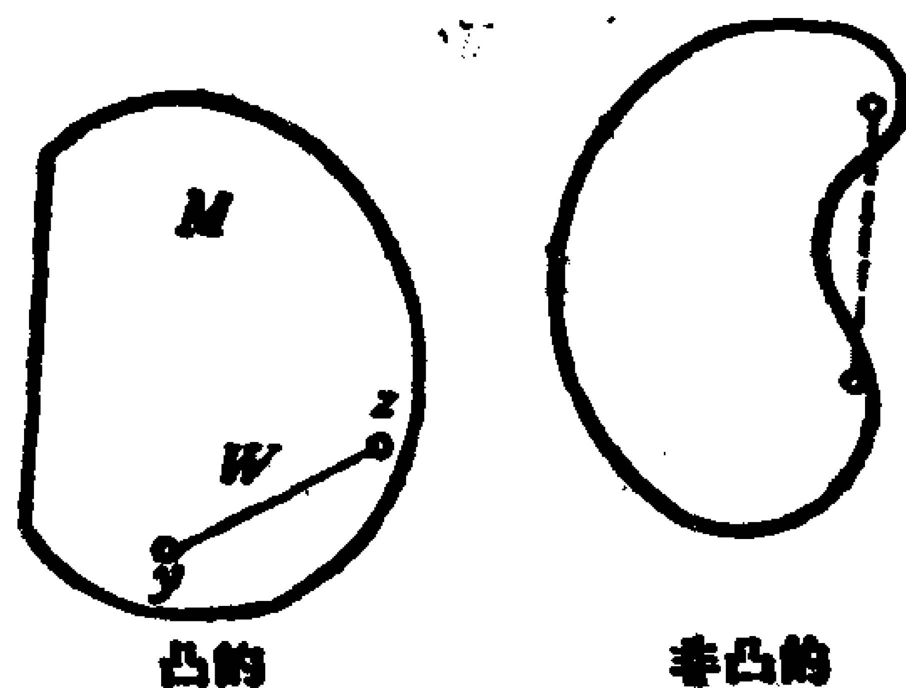


图58 凸集和非凸集

6.2-1 引理（凸性） 赋范空间$X=(X,\|\cdot\|)$中，给定点$x\in X$在子空间$Y\subset X$中的最佳逼近的集合M，是一个凸集。

证明：象以前一样，仍用δ记x到Y的距离，若M是空集或单点集，则论断是成立的。假定M有一个以上的点。则对于$y,z\in M$，按定义有

$$\|x-y\| = \|x-z\| = \delta$$

我们来证明这将意味着

$$w = \alpha y + (1-\alpha)z \in M, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{2}$$

实际上，由于$w \in Y$，故$\|x-w\| \geqslant \delta$，而又由于

$$\begin{aligned}\|x-w\| &= \|\alpha(x-y)+(1-\alpha)(x-z)\| \\ &\leqslant \alpha\|x-y\| + (1-\alpha)\|x-z\| \\ &= \alpha\delta + (1-\alpha)\delta \\ &= \delta\end{aligned}$$

其中用到$\alpha \geqslant 0$及$1-\alpha \geqslant 0$。合在一起便有$\|x-w\| = \delta$。因此$w \in M$。由于$y, z \in M$是任取的，从而证明了M是凸的。

因而，若x在Y中有若干最佳逼近，则据定义，这些最佳逼近到x的距离都等于δ。所以从引理可以推出：Y和闭球

$$\tilde{B}(x;\delta) = \{v \mid \|v-x\| \leqslant \delta\}$$

必有公共线段W。显然，线段W落在闭球$\tilde{B}$的边界球面$S(x;\delta)$上。每个$w \in W$到x的距离都为$\|w-x\| = \delta$。此外，每个$w \in W$都有唯一的$v = \delta^{-1}(w-x)$与之对应，且范数$\|v\| = \delta^{-1}\|w-x\| = 1$。这就意味着由(2)所给出的每个最佳逼近$w \in W$都和单位球面$\{x \mid \|x\| = 1\}$上的唯一的$v$相对应。

由此可见，要想保证最佳逼近的唯一性，我们必须排除这样的范数，它允许单位球面能够含有直线段。这就促使我们提出如下定义。

6.2-2定义（严格凸性） 严格凸范数是指这样的一种范数：对一切范数等于1的x, y，都满足

$$\|x+y\| < 2 \qquad (x \neq y)$$

一个赋范空间的范数若是严格凸的，则又称之为严格凸赋范空间。

要注意，对于$\|x\| = \|y\| = 1$，三角不等式给出了

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| = 2$$

而严格凸性排除了等号成立的可能，除非是$x = y$。现在可以把我们的结论总结如下。

6.2-3唯一性定理（最佳逼近） 在严格凸赋范空间X中，$x \in X$在给定的子空间$Y \subset X$中至多有一个最佳逼近。

这个定理对解决实际问题有无帮助，取决于我们所采用的是什么空间。我们给出两种非常重要的情况。

6.2-4引理（严格凸性） 我们有

(*a*) 希尔伯特空间是严格凸的。

(*b*) 空间$C[a,b]$不是严格凸的。

证明(a)对于一切范数等于1的x和$y \neq x$，不妨设$\|x-y\| = \alpha$，$\alpha > 0$，则平行四边形

公式（§3.1）给出：

$$\|x+y\|^2=-\|x-y\|^2+2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$
$$=-a^2+2(1+1)<4$$

因此有 $\|x+y\|<2$。

(b)我们考虑用下面两式

$$x_1(t)=1,\quad x_2(t)=\frac{t-a}{b-a}$$

所定义的x_1和x_2，其中$t\in[a,b]$。显然$x_1,x_2\in C[a,b]$，并且$x_1\neq x_2$。还可看出 $\|x_1\|=\|x_2\|=1$，和

$$\|x_1+x_2\|=\max_{t\in J}\left|1+\frac{t-a}{b-a}\right|=2$$

其中$J=[a,b]$。这就证明了$C[a,b]$不是严格凸的。

引理中的论断(a)是预料之中的，因为定理3.3-1和引理3.3-2合在一起给出了如下定理。

6.2-5定理（希尔伯特空间） H是一个希尔伯特空间，对每个给定$x\in H$和每个闭子空间$Y\subset H$，则x在Y中有唯一的最佳逼近（即$y=Px$，其中P是H到Y上的投影。）。

从引理6.2-4中的论断(b)可以看出，在一致逼近中要保证最佳逼近的唯一性，必须附加一定的条件。

习　　题

1.设§6.1中式（1）和式（2）中的Y是有限维的，试问在什么条件下式（2）中的 $\|x-y_0\|=0$？

2.我们以后的讨论仅限于赋范空间，但顺便指出，某些讨论可以推广到一般的度量空间。例如，若(X,d)是一度量空间，Y是X的一个紧子集，试证：每个$x\in X$在Y中有一个最佳逼近y。

3.若Y是赋范空间X的一个有限维子空间，并求$x\in X$在Y中的一个最佳逼近，自然要选择Y的一个基$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，并用线性组合$\sum\alpha_je_j$去逼近x。证明：用

$$f(\alpha)=\|x-\sum_{j=1}^{n}\alpha_je_j\|,\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

定义的函数f是连续地依赖于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的。

4.（**凸函数**）证明习题3中的f具有一个有趣的性质，即它是凸的。函数$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$的定义域$\mathscr{D}(f)$若是凸集。且对每两个$u,v\in\mathscr{D}(f)$都有

$$f(\lambda u+(1-\lambda)v)\leqslant\lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)$$

其中$0\leqslant\lambda\leqslant1$，则称$f$是凸的。（在图59中给出$n=1$时的一个例子。在各种极小化问题中凸函数是很有用的。）

5.由式(1)定义的范数不是严格凸的。不利用6.2-3，直接证明这个结论。

6.考虑(1)，试确定$x=(2,0)$在单位闭球$\tilde{B}$中的所有最佳逼近点y。并求出最小值$\delta=\delta(x,\tilde{B})$。

7. 证明：实数序偶构成的矢量空间在赋予范数

$$\|(\xi_1,\xi_2)\| = \max(|\xi_1|,|\xi_2|)$$

后所得到的赋范空间不是严格凸的。画出它的单位球面。

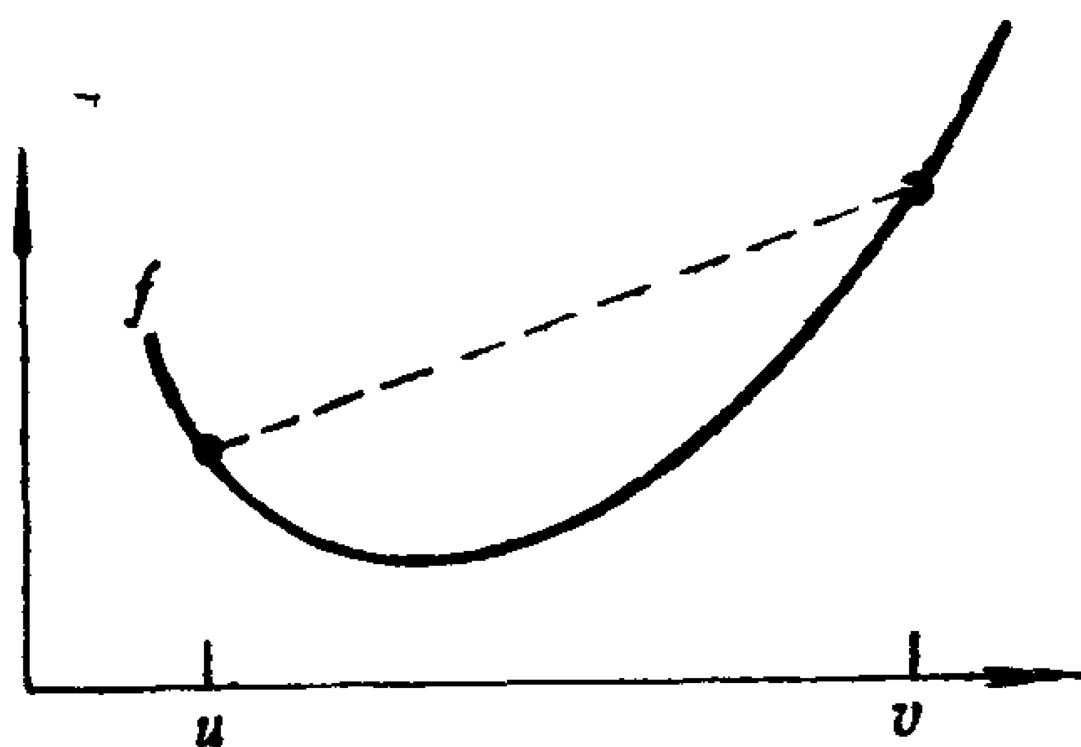


图59 单变量t的凸函数f.
其中虚线段表示$\lambda f(u)+(1-\lambda)f(u)$，
$0\leqslant\lambda\leqslant1$.

8. 考虑所有形如$x=(\xi_1,\xi_2)$的实数序偶。分别按(a)欧几里德距离，(b)习题7中的范数所诱导的距离，求出到(0,0)及到(2,0)的距离为$\sqrt{2}$的所有点。

9. 考虑所有实数序偶构成的矢量空间。令$x_1=(-1,0)$，$x_2=(1,0)$。分别按(a)欧几里德范数，(b)习题7中定义的范数，(c)由(1)定义的范数，确定球面$\|x-x_1\|=1$和球面$\|x-x_2\|=1$的交。

10. 可以证明$l^p(p>1)$是严格凸的，而l^1不是严格凸的。给出l^1不是严格凸的证明。

11. 在赋范空间中，若x在子空间Y中的最佳逼近不是唯一的，证明x有无穷多这样的最佳逼近。

12. 证明：若范数是严格凸的，则$\|x\|=\|y\|=1$与$x\neq y$合在一起蕴含着对所有满足$0<\alpha<1$的α都有

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|<1$$

并证明这个条件对严格凸性也是充分的。

13. 证明：若赋范空间X是严格凸的，则

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\| \qquad (x\neq0,\ y\neq0)$$

蕴含着对某一个正数c有$x=cy$。

14. 证明：习题13中的条件对严格凸性不仅是必要的，而且也是充分的。也就是说，若这个条件对X中的所有非零元x和y都成立，则X是严格凸的。

15. 所谓矢量空间X的凸集M的极点$x\in M$，是指x不能作为线段$W\subset M$的一个内点。证明：若X是严格凸的赋范空间，则X的单位球面的每一个点都是X的闭单位球的极点。

§6.3 一致逼近

选取不同的范数，便可得到不同类型的逼近。而如何选取范数，当然要根据我们的目的而定。两个通用的类型是

(A) 用$C[a,b]$上的范数

$$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)|,\quad J=[a,b]$$

作一致逼近。

(B) 用$L^2[a,b]$上的范数（见3.1-5）

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2} = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

作最小二乘逼近。

本节专门讨论一致逼近（也叫做契比雪夫逼近）。我们考虑实空间$X = C[a,b]$和n维子空间$Y \subset C[a,b]$。当然出现的函数都是$[a,b]$上的实值连续函数。对每个函数$x \in X$，定理6.1-1保证了x在Y中的最佳逼近的存在性。然而，由于$C[a,b]$不是严格凸的（见6.2-4），故唯一性的问题需要特别的审查。为此，下面的概念将是重要的，并且是有意思的。

6.3-1定义（极值点） $x \in C[a,b]$的极值点是指满足$|x(t_0)| = \|x\|$的点$t_0 \in [a,b]$。

因此在x的极值点t_0上，要么$x(t_0) = +\|x\|$，要么$x(t_0) = -\|x\|$。而$C[a,b]$上的范数的定义表明，$|x(t)|$在极值点t_0达到其最大值。

我们目前讨论的中心概念是A·哈尔（*Haar* 1918）给出的下述条件，它是关于$C[a,b]$中最佳逼近的唯一性的充分必要条件。

6.3-2定义（哈尔条件） 实空间$C[a,b]$的有限n维子空间Y，若每个$0 \neq y \in Y$至多在$[a,b]$中有$n-1$个零点，则称Y是满足哈尔条件的。

例如，$Y = \text{span}\{1, t, \cdots, t^{n-1}\} \subset C[a,b]$是$n$维的子空间，每个$0 \neq y \in Y$至多有$n-1$个零点，所以$Y$是满足哈尔条件的。实际上，就是根据这个具体模型提出定义6.3-2的。在证明了哈尔条件是保证$C[a,b]$中最佳逼近唯一性的充分必要条件之后。再回到这一情况上来。

为适应下面研究的需要，首先让我们证明与哈尔条件等价的一种说法。

哈尔条件等价于：对于Y的每一个基$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$和区间$J = [a,b]$中的每$n$个互不相同的点$t_1, t_2, \cdots, x_n$，都有

$$\begin{vmatrix} y_1(t_1) & y_1(t_2) \cdots y_1(t_n) \\ y_2(t_1) & y_2(t_2) \cdots y_2(t_n) \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ y_n(t_1) & y_n(t_2) \cdots y_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1)$$

证明：每个$y \in Y$都有表示$y = \sum \alpha_k y_k$。子空间Y满足哈尔条件当且仅当在$J = [a,b]$中有n个或多于n个零点$t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$的每个$y = \sum \alpha_k y_k \in Y$都恒等于零。这意味着方程组（$n$个条件）

$$y(t_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k(t_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n \qquad (2)$$

有唯一的解$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$。根据方程组的理论，当且仅当方程组(2)的系数行列式(1)不等于零。

哈尔条件对于最佳逼近的唯一性是充分的，可通过下面的引理来证明。

6.3-3引理（极值点） 假定实空间$C[a,b]$的子空间Y满足哈尔条件。若对给定的$x \in X$和$y \in Y$，函数$x - y$的极值点少于$n+1$个，则y不是x在Y中的最佳逼近。这里仍假定$n = \dim Y$

证明：根据假设函数$v = x - y$有m（$\leqslant n$）个极值点$t_1, t_2, \cdots, t_m$。若$m < n$，我们可在$J = [a.b]$中适当选取点$t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n$，使$t_1, t_2, \cdots, t_m, \cdots, t_n$成为$n$个不相同的点。利用这些点和$Y$的一个基$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，构造一个线性非齐次方程组：

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k(t_j) = v(t_j), \quad j=1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

由于Y满足哈尔条件，故(1)成立。因此(3)有唯一的解。利用(3)的解定义函数

$$y_0 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots \beta_n y_n$$

及

$$\tilde{y} = y + \varepsilon y_0 \qquad (\varepsilon>0)$$

我们将证明，对于充分小的ε，函数$\tilde{v} = x - \tilde{y}$满足

$$\|\tilde{v}\| \leqslant \|v\| \tag{4}$$

从而说明y不能够是x在Y中的最佳逼近。

为了得到（4），我们来估计$\tilde{v}$。把$J=[a,b]$分成两个集合N和$K=J-N$。其中N是含有v的极值点$t_1,t_2,\cdots,t_m$。

在极值点上，$|v(t_i)| = \|v\|$，由$v=x-y\neq 0$知$\|v\|>0$。而由(3)和y_0的定义还知$y_0(t_i) = v(t_i)$。因此，据连续性的定义，对每个t_i都有一个开邻域N_i，使得在并集$N=N_1\cup N^2 \cup\cdots\cup N_m$之内有

$$\mu = \inf_{t\in N} |v(t)| > 0, \qquad \inf_{t\in N} |y_0(t)| \geqslant \frac{1}{2}\|v\| \tag{5}$$

由于$y_0(t_i)=v(t_i)\neq 0$，据(5)对一切$t\in N$有$y_0(t)/v(t)>0$，并且(5)还给出了

$$\frac{y_0(t)}{v(t)} = \frac{|y_0(t)|}{|v(t)|} \geqslant \frac{\inf|y_0(t)|}{\|v\|} \geqslant \frac{1}{2}$$

令$M_0 = \sup_{t\in N}|y_0(t)|$，则对每个正数$\varepsilon<\mu/M_0$和每个$t\in N$，我们得到

$$\frac{\varepsilon y_0(t)}{v(t)} = \frac{\varepsilon|y_0(t)|}{|v(t)|} \leqslant \frac{\varepsilon M_0}{\mu} < 1$$

由于$\tilde{v} = x-\tilde{y} = x-y-\varepsilon y_0 = v-\varepsilon y_0$，利用上面的不等式可以看出，对一切$t\in N$及$0<\varepsilon<\mu/M_0$有

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(t)| &= |v(t)-\varepsilon y_0(t)| \\ &= |v(t)|\left(1-\frac{\varepsilon y_0(t)}{v(t)}\right) \\ &\leqslant \|v\|\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &< \|v\| \end{aligned} \tag{6}$$

再转到N的余集$K=J-N$上，由于K是闭集，故可定义

$$M_1 = \sup_{t\in K}|y_0(t)|, \qquad M_2 = \sup_{t\in K}|v(t)|$$

由于N包含了v的所有极值点，所以有$M_2<\|v\|$并且可以写成

$$\|v\| = M_2+\eta, \qquad \eta>0$$

选择正数$\varepsilon<\eta/M_1$，则有$\varepsilon M_1<\eta$，并且对一切$t\in K$可得到

$$\begin{aligned}|\tilde{v}(t)| &\leqslant |v(t)| + \varepsilon\,|y_0(t)|\\ &\leqslant M_2 + \varepsilon M_1\\ &< \|v\|\end{aligned}$$

这就可以看出，$|\tilde{v}(t)|$有一个与$t\in K$无关的上界$M_2+\varepsilon M_1$，并且这个上界是严格小于$\|v\|$的。和(6)中类似，在那里$t\in N$并且$\varepsilon>0$是充分地小。现在选取$\varepsilon<\min\{\mu/M_0,\ \eta/M_1\}$，并取上确界便得到$\|\tilde{v}\|<\|v\|$。这就是所要证明的(4)，从而完成了整个的证明。

利用这个引理，便可得到如下的基本定理。

6.3-4哈尔唯一性定理（最佳逼近） 设Y是实空间$C[a,b]$的有限维子空间。则每个$x\in C[a,b]$在Y中有唯一的最佳逼近当且仅当Y满足哈尔条件。

证明：(a)充分性。假定Y满足哈尔条件，而$y_1,y_2\in Y$二者都是给定的某一$x\in C[a,b]$的最佳逼近。则令

$$v_1=x-y_1,\qquad v_2=x-y_2$$

便有$\|v_1\|=\|v_2\|=\delta=\delta(x,Y)$。引理6.2-1意味着$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$也是$x$的最佳逼近。根据引理6.3-3，函数

$$v=x-y=x-\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(v_1+v_2)\tag{7}$$

至少有$n+1$个极值点：$t_1,t_2,\cdots,t_{n+1}$，在这些点上有$|v(t_j)|=\|v\|=\delta$。由此和式(7)便得到

$$2v(t_j)=v_1(t_j)+v_2(t_j)=2\delta\text{或}-2\delta$$

又$|v_i(t_j)|\leqslant\|v_i\|=\delta$，$i=1,2$，（见前面）。因此，欲要$2v(t_j)=v_1(t_j)+v_2(t_j)=2\delta$（或$-2\delta$）成立，只有一种可能，那就是$v_1(t_j)$与$v_2(t_j)$同号且有最大可能的绝对值，即

$$v_1(t_j)=v_2(t_j)=\delta\text{或}-\delta,\qquad j=1,2,\cdots,n+1$$

但这就意味着$y_1-y_2=v_2-v_1$在$[a,b]$中有$n+1$个零点。因此根据哈尔条件有$y_1-y_2=0$，即$y_1=y_2$。从而唯一性得证。

(b)必要性。我们假定Y不满足哈尔条件，然后去证明对所有的$x\in C[a,b]$，不保证其在Y中的最佳逼近是唯一的。如同6.3-2中证明，在目前的假定下，有Y的一组基$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$和$[a,b]$中的n个不同的点$t_1,t_2,\cdots,t_n$，使得6.3-2中的行列式(1)为零。因此，齐次方程组

$$\gamma_1y_k(t_1)+\gamma_2y_k(t_2)+\cdots+\gamma_ny_k(t_n)=0,\quad k=1,2,\cdots,n$$

有非零解$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$。利用这组解和任意的$y=\sum\alpha_ky_k\in Y$，都有

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_jy(t_j)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left[\sum_{j=1}^{n}\gamma_jy_k(t_j)\right]=0,\qquad j=1,2,\cdots,n\tag{8}$$

此外，被转置的方程组

$$\beta_1y_1(t_j)+\beta_2y_2(t_j)+\cdots+\beta_ny_n(t_j)=0,\qquad j=1,2,\cdots,n$$

也有非零解$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$。用这组解我们定义一个函数$y_0=\sum\beta_ky_k$，则$y_0\neq0$并且$y_0$在$t_1,t_2,\cdots,t_n$的值等于零。设$\lambda$满足$\|\lambda y_0\|\leqslant1$，又设$z\in C[a,b]$满足$\|z\|=$和

$$z(t_j)=\operatorname{sgn}\gamma_j=\begin{cases}-1, & \gamma_j<0\\ 1, & \gamma_j\geqslant 0\end{cases}$$

用下式

$$x(t)=z(t)\ (1-|\lambda y_0(t)|)$$

定义$x\in C[a,b]$，由于$y_0(t_j)=0$，故$x(t_j)=z(t_j)=\operatorname{sgn}\gamma_j$，并且$\|x\|=1$。我们来证明函数$x$在$Y$中有无穷多个最佳逼近。

利用$|z(t)|\leqslant\|z\|=1$和$|\lambda y_0(t)|\leqslant\|\lambda y_0(t)\|\leqslant 1$，对每个$\varepsilon\in[-1,1]$都可得到

$$\begin{aligned}|x(t)-\varepsilon\lambda y_0(t)|&\leqslant|x(t)|+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\&=|z(t)|(1-|\lambda y_0(t)|)+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\&\leqslant 1-|\lambda y_0(t)|+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\&\leqslant 1\end{aligned}$$

因此，如果能证明对任意的$y\in Y$都有

$$\|x-y\|\geqslant 1\qquad(\text{对于一切}y\in Y)\tag{9}$$

则便说明了：对于$\varepsilon\in[-1,1]$，每个$\varepsilon\lambda y_0(t)$都是$x(t)$的一个最佳逼近。

现在对任意的$y=\Sigma\alpha_k y_k\in Y$来证明它满足(9)。证明方法是间接的。假定对某一$\tilde{y}\in Y$有$\|x-\tilde{y}\|<1$，则由条件

$$x(t_j)=\operatorname{sgn}\gamma_j=\pm 1\text{和}|x(t_j)-\tilde{y}(t_j)|\leqslant\|x-\tilde{y}\|<1$$

可推得，对所有的$\gamma_j\neq 0$，有

$$\operatorname{sgn}\tilde{y}(t_j)=\operatorname{sgn}x(t_j)=\operatorname{sgn}\gamma_j$$

但是将(8)中的y换成$\tilde{y}$，由于对某一个j有$\gamma_j\neq 0$，致使

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\tilde{y}(t_j)=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\operatorname{sgn}\gamma_j=\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j|\neq 0$$

这便与(8)矛盾。所以反设$\|x-\tilde{y}\|<1$不真。从而(9)必定成立。这就完成了证明。

要注意，若$Y=\operatorname{span}\{1,t,t^2,\cdots,t^n\}$，则有$\dim Y=n+1$，并且$Y$满足哈尔条件（为什么？），因此得到如下定理。

6.3-5定理（多项式） 实空间$C[a,b]$中的任一x在$Y_n=\operatorname{span}\{1,t,\cdots,t^n\}$中有唯一的最佳逼近。

在这个定理中，改变子空间Y_n的维数，将x在不同的Y_n中的最佳逼近加以比较，特别是当$n\to\infty$时，看看会出现什么情况，这是很值得一做的事情。设$\delta_n=\|x-p_n\|$，其中p_n是已给定的x在Y_n中的最佳逼近。由于$Y_0\subset Y_1\subset\cdots$，我们便得到一个单调递减的序列

$$\delta_0\geqslant\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\cdots\tag{10}$$

而维尔斯特拉斯逼近定理4.11-5又意味着

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0\tag{11}$$

几乎不要解释就可以看出，定理6.3-5就是表征哈尔研究的一个原型问题。事实上，我们都会惊奇：为什么在一般情况下不能期望最佳逼近是唯一的？而用多项式去逼近却仍能保证唯一？因此，不禁会问：究竟多项式具备了怎样一种不同寻常的良好特性，才使得它能保证最佳逼近的唯一性？回答就是它满足6.3-2所定义的哈尔条件。

习 题

1. 若$Y\subset C[a,b]$是一个n维的子空间并且满足哈尔条件，证明：把Y的元素限制在由$[a,b]$的任意n个点组成的一个子集上，仍构成一个n维的矢量空间（在这一限制之下，维数通常将减少）。

2. 设$x_1(t)=1$，$x_2(t)=t^2$。若把$Y=\operatorname{span}\{x_1, x_2\}$视为$(a)\,C[0,1]$的，$(b)\,C[-1,1]$的子空间，试问$Y$满足哈尔条件吗？（为了理解我们提出这个问题的用意，在上面两种情况下，求$x=x(t)=t^3$的最佳逼近。）

3. 证明：$Y=\operatorname{span}\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}\subset C[a,b]$满足哈尔条件，当且仅当对$[a,b]$中的每$n$个不同的点：$\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$，$n$个矢量，$v_j=(y_1(t_j), y_2(t_j), \cdots, y_n(t_j))$，$j=1,2,\cdots,n$，构成一个线性无关组。

4. （范德蒙行列式）写出关于

$$y_1(t)=1,\ y_2(t)=t,\ y_3(t)=t^2,\ \cdots,\ y_n(t)=t^{n-1}$$

的行列式(1)，它叫做范德蒙行列式（或柯西行列式）。可以证明这个行列式等于

$$\prod_{0<j<k\leq n}(t_k-t_j)$$

求证：这意味着存在唯一的一个次数不超过$n-1$的多项式。它在n个不同的点上取给定的值。

5. （戴拉瓦尔-波辛定理）设$Y\subset C[a,b]$满足哈尔条件，并考虑任一$x\in C[a,b]$。若$y\in Y$使得$x-y$在$[a,b]$中的$n+1$个顺序排列的点上，交错地取正值和负值，这里的$n=\dim Y$。证明x到它在Y中的最佳逼近的距离δ至少等于$x-y$的这些$n+1$个值的最小绝对值。

6. 在$C[0,1]$中，求$x=e^t$在$Y=\operatorname{span}\{y_1, y_2\}$中的最佳逼近，其中$y_1(t)=1$，$y_2(t)=t$。并把它与线性泰勒多项式$1+t$加以比较。

7. 在习题6中，把$x=e^t$换成$x=\sin\frac{\pi t}{2}$再做一遍。

8. 习题6和习题7中所研究的被逼近的函数x，是定义在$[a,b]$上且其二阶导数在$[a,b]$上不变号。证明：在这种情况下，其最佳逼近的线性函数y是$y(t)=\alpha_1+\alpha_2 t$，其中

$$\alpha_1=\frac{x(a)+x(c)}{2}-\alpha_2\frac{a+c}{2}$$

$$\alpha_2=\frac{x(b)-x(a)}{b-a}$$

并且c是方程$x'(t)-y'(t)=0$的解。解释这个公式的几何意义。

9. （不相容的线性方程）若含有n个未知数r个线性方程的方程组

$$\gamma_{j1}\omega_1+\gamma_{j2}\omega_2+\cdots+\gamma_{jn}\omega_n=\beta_j \qquad j=1,2,\cdots r$$

是不相容的，其中$r>n$，则它是没有任何解$w=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$的。但我们能够寻求一个近似解$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$，它使得

$$\max\left|\beta_j-\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}\zeta_k\right|$$

尽可能地小。这个问题如何顺应我们目前的讨论？在这种情况下，哈尔条件取什么形式？

10.为了更好地体会习题9的用意，读者可以考虑能够画出$\beta_j-\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}\zeta_k$的曲线，并且易于求近似解的简单方程组，例如

$$\omega=1$$

$$4\omega=2$$

画出$f(\zeta)=\max_j|\beta_j-\gamma_j\zeta|$的曲线。注意，$f$是凸的（见§6.2习题4）。按习题9中的定义求近似解ζ。

§6.4 契比雪夫多项式

上一节专门讨论了一致逼近的理论性问题。留下的实际问题是如何求便于计算和分析的最佳逼近的显式解。这是很不容易解决的问题。一般而言，这种显式解也只能关于$C[a,b]$中的少数几个函数x才能求出。在这方面，交错集是一个有用的工具。

6.4-1定义（交错集） 设$x\in C[a,b]$，$y\in Y$，其中Y为实空间$C[a,b]$的一个子空间。$[a,b]$中的点集$\{t_0,t_1,\cdots,t_k\}$且满足$t_0<t_1<\cdots<t_k$，若使得函数$x-y$在这些点的值$x(t_j)-y(t_j)$依次交错地等于$+\|x-y\|$和$-\|x-y\|$，则称$\{t_0,t_1,\cdots,t_k\}$是$x-y$的一个交错集。

我们看到，交错集中的$k+1$个点都是$x-y$的极值点，如6.3-1所定义的，并且$x-y$在这些点的值交错地取正和负。

交错集的重要性在某种程度上为下述引理所表明。这个引理是说，$x-y$的足够大的交错集的存在，意味着y是x的最佳逼近。确切地说，这个条件也是y作为x的最佳逼近的必要条件。由于以后我们不需要这一事实，所以这里不再证明它。〔它的证明比我们下面的证明困难些，参见切尼（$E\cdot W\cdot Cheney$，1966），$p.75$〕

6.4-2引理（最佳逼近） 设Y是实空间$C[a,b]$的满足哈尔条件6.3-2的一个子空间。给定$x\in C[a,b]$，设$y\in Y$使得$x-y$有一个包含$n+1$个点的交错集，这里的$n=\dim Y$。则y是x在Y中的最佳一致逼近。

证明：根据6.1-1和6.3-4，x在Y中有唯一的最佳逼近。假若这个最佳逼近不是y而是另外一个$y_0\in Y$，则有$\|x-y\|>\|x-y_0\|$。这个不等式意味着，在这$n+1$个极值点上，函数

$$y_0-y=(x-y)-(x-y_0)$$

和$x-y$有相同的符号，这是因为在极值点上，$x-y$等于$\pm\|x-y\|$，而等式右端另一项$x-y_0$的绝对值决不会超过$\|x-y_0\|$，并且是严格小于$\|x-y\|$。这就表明y_0-y在$x-y$的交错集上的取值（$n+1$个点上的值）也依次交错地为正和负。所以$y-y_0$在$[a,b]$上至少有n个零点。但由于$y-y_0\in Y$，而Y又满足哈尔条件，所以除非$y-y_0=0$，它是不可能有n个零点的。因此$y_0=y$，从而证明了y一定是x在Y中的最佳逼近。

一个极为重要的典型问题，同时也是上面引理的一个应用，就是$C[-1,1]$中的函数x

$$x(t)=t^n, \qquad n\in N \text{是固定的} \tag{1}$$

在子空间$Y=\text{span}\{y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}\}$中的最佳逼近，其中

$$y_j(t)=t^j, \qquad j=0,1,\cdots,n-1 \tag{2}$$

很明显，我们打算用一个次数小于n的实多项式在$[-1,1]$上去逼近$x=t^n$。这样的多项式具有如下的形式

$$y(t)=\alpha_{n-1}t^{n-1}+\alpha_{n-2}t^{n-2}+\cdots+\alpha_0$$

因此，若令$z=x-y$，则有

$$z(t)=t^n-(\alpha_{n-1}t^{n-1}+\alpha_{n-2}t^{n-2}+\cdots+\alpha_0)$$

并且我们希望找到使$\|z\|$尽可能小的y。要注意，$\|z\|=\|x-y\|$就是x到y的距离。从最后的式子可以看出，$z(t)$是一个首项系数等于1的n次多项式，而我们原来的问题等价于下面的提法：

在所有的首项系数等于1的n次多项式中找一个z，按我们的考虑，它在$[-1,1]$上有（相对于零的）最小的最大偏差。

如果令

$$t=\cos\theta \tag{3}$$

并让θ从0变到π，则t在区间$[-1,1]$上变化。在$[0,\pi]$上，函数$\cos n\theta$有$n+1$个极值点，并且在极值点的取值依次交错取$+1$和-1（见图60）。

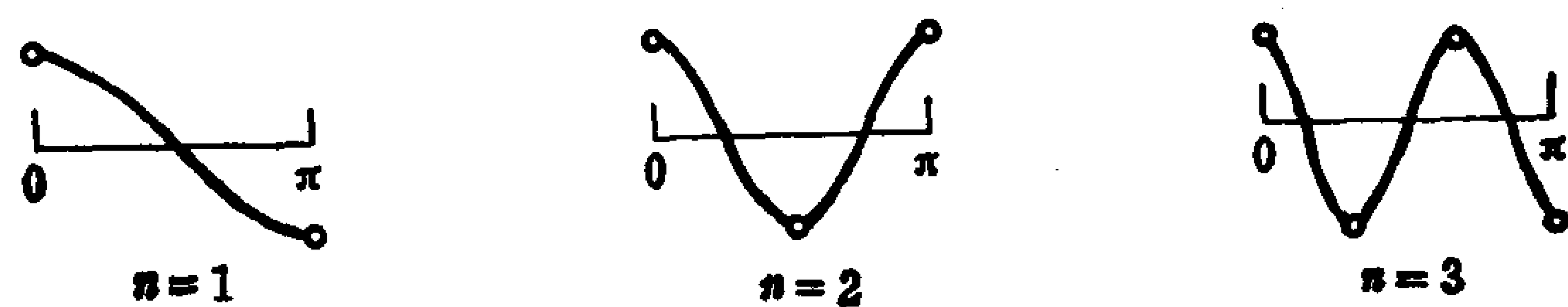


图60　$\cos n\theta$在$[0,\pi]$上的$n+1$个极值点

根据引理6.4-2，我们可望$\cos n\theta$能帮助我们解决问题，因为它使我们能把$\cos n\theta$写成$t=\cos\theta$的多项式。事实上，用归纳法可证明存在形如

$$\cos n\theta=2^{n-1}\cos^n\theta+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{nj}\cos^j\theta, \qquad n=1,2,\cdots \tag{4}$$

的表达式，其中β_{nj}是常数。

证明：式(4)对于$n=1$（取$\beta_{10}=0$）是成立的。假设对任意的n，式(4)是成立的，现证对$n+1$，式(4)也是成立的。由余弦的加法公式可得

$$\cos(n+1)\theta=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta$$

$$\cos(n-1)\theta=\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta$$

两端相加得到

$$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta \tag{5}$$

因此，由归纳假设有

$$\cos(n+1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta-\cos(n-1)\theta$$

$$=2\cos\theta\left(2^{n-1}\cos^n\theta+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{nj}\cos^j\theta\right)$$

$$-2^{n-2}\cos^{n-1}\theta-\sum_{j=0}^{n-2}\beta_{n-1\,j}\cos^j\theta$$

显然，这个式子可按所希望的那样写成

$$\cos(n+1)\theta=2^n\cos^{n+1}\theta+\sum_{j=0}^{n}\beta_{n+1\,j}\cos^j\theta$$

这就完成了证明。

到此我们的问题实际上已得到了解决，但在总结归纳这些结果之前，先让我们引入一个标准的记法和术语。

用

$$T_n(t)=\cos n\theta,\quad \theta=\arccos t,\quad n=0,1,\cdots \tag{6}$$

所定义的函数叫做第一类的n阶**契比雪夫**多项式。这里之所以用T，是因为有的作者把Чебышев译为*Tchebichef*。而第二类的契比雪夫多项式定义为

$$U_n(t)=[\sin(n+1)\theta]/\sin\theta,\quad n=1,2,\cdots$$

契比雪夫多项式有各种有趣的性质，其中的一些在本节末的习题集中指出。要想更详细的了解，可参考*G*・赛果(*G*・*Szegö*, 1967)。

式(4)中的首项系数不是我们希望的1，而是2^{n-1}。记住这一点，便得下面的公式，它描述了有名的契比雪夫多项式的极小值性质。

6.4-3定理（契比雪夫多项式） 多项式

$$\tilde{T}_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos t)\quad(n\geqslant 1) \tag{7}$$

是所有首项系数等于1的n次实多项式中，在$[-1,1]$上相对于0有最小的最大偏差。

回想起本节所提出的逼近问题，可将结论系统地表述如下：

函数$x(t)=t^n\in C[-1,1]$在$Y=\mathrm{span}\{1,t,\cdots,t^{n-1}\}$中的最佳一致逼近是（即由次数小于$n$的实多项式逼近）

$$y(t)=x(t)-\frac{1}{2^{n-1}}T_n(t),\quad (n\geqslant 1) \tag{8}$$

要注意，式(8)中的最高次项t^n消掉了。所以$y(t)$的次数如要求的那样是不超过$n-1$的。

定理6.4-3对一般情况也是适用的。若给定n次实多项式$\tilde{x}$，其首项为$\beta_n t^n$，我们来看在$[-1,1]$上的$\tilde{x}$在$Y=\text{span}\{1,t,\cdots,t^{n-1}\}$中的最佳逼近$\tilde{y}$，当然$\tilde{y}$的次数最高为$n-1$，仍在实空间$C[-1,1]$中考虑问题。则我们可记

$$\tilde{x}=\beta_n x$$

可见x的首项为t^n。由定理6.4-3可推得$\tilde{y}$必须满足

$$\frac{1}{\beta_n}(\tilde{x}-\tilde{y})=\tilde{T}_n$$

其解是

$$\tilde{y}(t)=\tilde{x}(t)-\frac{\beta_n}{2^{n-1}}T_n(t)\qquad (n\geqslant 1) \tag{9}$$

这就推广了式(8)。

前几个低阶的契比雪夫多项式的显式可以很容易地得到。我们看出$T_0(t)=\cos 0=1$，此外，$T_1(t)=\cos\theta=t$。公式(6)表明式(5)可以写成

$$T_{n+1}(t)+T_{n-1}(t)=2tT_n(t)$$

这个递推公式

$$T_{n+1}(t)=2tT_n(t)-T_{n-1}(t),\qquad n=1,2,\cdots \tag{10}$$

逐次给出了（图61）

$$\begin{aligned}
&T_0(t)=1\\
&T_1(t)=t\\
&T_2(t)=2t^2-1\\
&T_3(t)=4t^3-3t\\
&T_4(t)=8t^4-8t^2+1\\
&T_5(t)=16t^5-20t^3+5t
\end{aligned} \tag{11*}$$

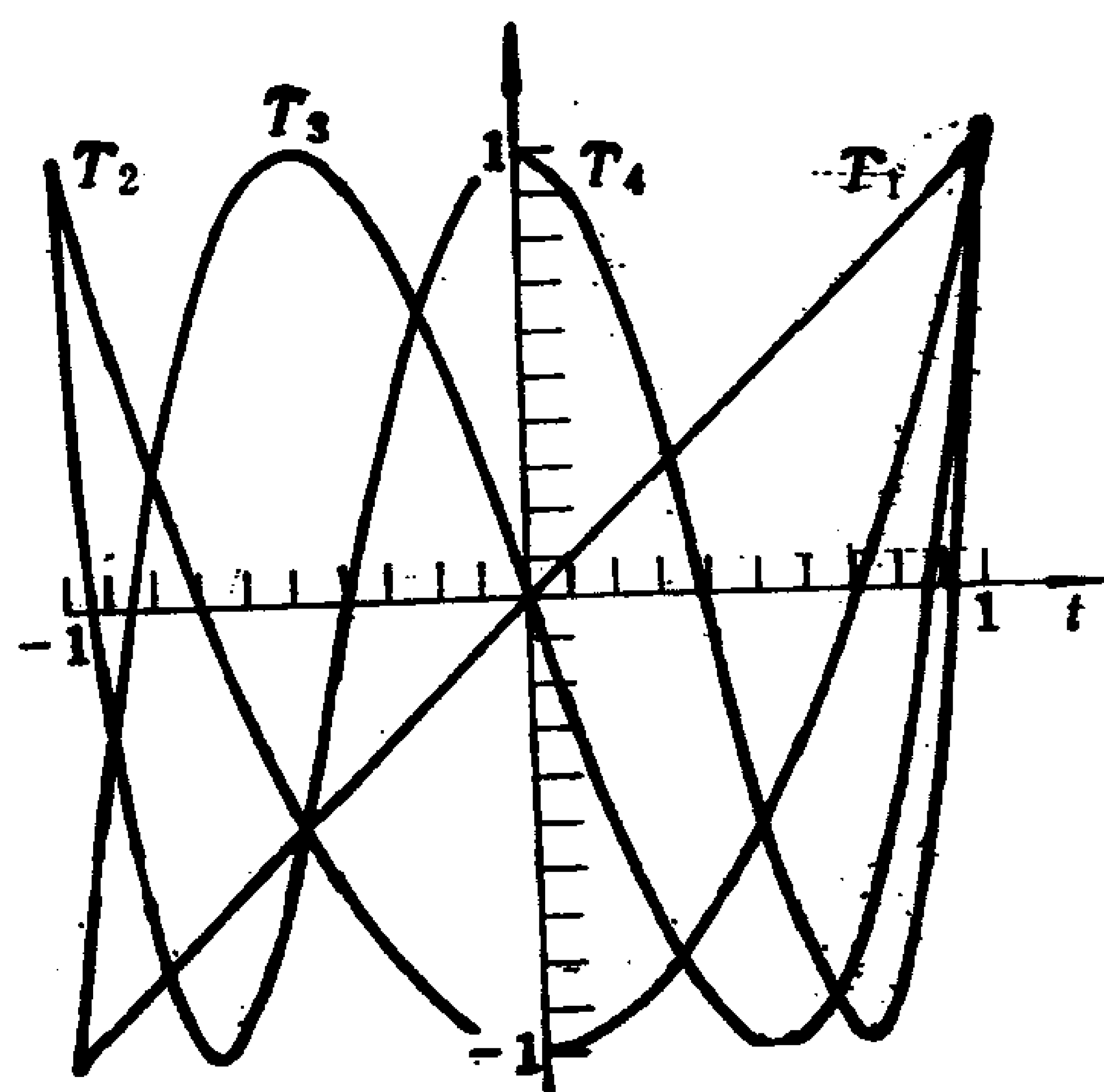


图61 契比雪夫多项式T_1，T_2，T_3，T_4

一般的公式是

$$T_n(t)=\frac{n}{2}\sum_{j=0}^{[n/2]}(-1)^j\frac{(n-j-1)!}{j!(n-2j)!}(2t)^{n-2j}$$

$$(n=1,2,\cdots) \tag{11}$$

其中$[n/2]$在n为偶数时取$n/2$，在n为奇数时取$(n-1)/2$。

习　　题

1. 分别利用公式(11)和(10)来验证(11*)。并求T_6。

2. 求$x(t)=t^3+t^2$的最佳的二次多项式逼近y，$t\in[-1,1]$。画出所得结果的曲线，最大偏差是什么?

3. 在某些应用中，契比雪夫多项式的零点是很有意义的。证明：T_n的所有零点都是实的，单重的并且都落在区间$[-1,1]$内。

4. 在T_n的任何两个相邻零点之间恰好有T_{n-1}的一个零点。证明这个性质。（这叫做零点的交叉，在其它的函数中例如贝塞尔函数，也会出现这种情况。）

5. 证明T_n和T_{n-1}没有公共的零点。

6. 证明：每个首项为$\beta_n t^n$的n次实多项式$x\in C[a,b]$都满足

$$\|x\|\geqslant|\beta_n|\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}\qquad n\geqslant 1$$

7. 证明T_n是微分方程

$$(1-t^2)T_n''-tT_n'+n^2T_n=0$$

的一个解。

8. 超越几何微分方程是

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2w}{d\tau^2}+[c-(a+b+1)\tau]\frac{dw}{d\tau}-abw=0$$

其中a,b,c是常数。用$Frobenius$方法（推广了的幂级数法）证明

$$w(\tau)=F(a,b,c;\tau)$$
$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+m-1)b(b+1)\cdots(b+m-1)}{m!c(c+1)\cdots(c+m-1)}\tau^m$$

是方程的一个解，其中$c\neq 0,-1,-2,\cdots$。右端的级数又叫做超越几何级数。在什么条书下，这个级数简化为一个有限和? $F(a,b,c;\tau)$叫做超越几何函数。它已被详细地研究过。很多函数都能用这种函数来表示，其中包括契比雪夫多项式。事实上，有

$$T_n(t)=F\left(-n,n,\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right)$$

试证明之。

9. **(正交性)** 证明：在空间$L^2[-1,1]$中(见2.2-7，3.1-5)，函数族$(1-t^2)^{-1/4}T_n(t)$是正交的，即

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-1/2}T_m(t)T_n(t)dt=0\qquad(m\neq n)$$

若$m=n=0$，积分值等于π，若$m=n=1,2,\cdots$，积分值等于$\pi/2$。

10. 我们想谈谈(3)所暗示的傅立叶展开与契比雪夫多项式展开之间的关系。作为一个例子，用傅立叶余弦级数表示出$\tilde{x}(\theta)=|\theta|$，$-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$，再用契比雪夫多项式写出这个结果。画出这个函数和前几个部分和的曲线。

§6.5 希尔伯特空间中的逼近

对于希尔伯特空间H中任意给定的x和一个闭子空间$Y\subset H$，x在Y中存在着唯一的最佳逼近。见6.2-5。

事实上，定理3.3-4给出了

$$H=Y\oplus Z \qquad (Z=Y^{\perp}) \tag{1a}$$

所以对每个$x\in H$

$$x=y+z \tag{1b}$$

其中$z=x-y\perp y$，因此$\langle x-y, y\rangle=0$。

若Y是有限维的，不妨设$\dim Y=n$，我们能够用Y的基$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$来确定$y$。首先$y$有唯一的表示

$$y=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\cdots+\alpha_n y_n \tag{2}$$

而由$x-y\perp Y$便得到n个条件

$$\langle y_j, x-y\rangle = \langle y_j, x-\Sigma\alpha_k y_k\rangle = 0$$

即

$$\langle y_j, x\rangle - \bar{\alpha}_1 \langle y_j, y_1\rangle - \cdots - \bar{\alpha}_n \langle y_j, y_n\rangle = 0 \tag{3}$$

其中$j=1,2,\cdots,n$。这是含有n个未知数$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots, \bar{\alpha}_n$和$n$个线性方程的非齐次方程组。其系数行列式是。

$$G(y_1, y_2\cdots, y_n)=\begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_1, y_2\rangle & \cdots & \langle y_1, y_n\rangle \\ \langle y_2, y_1\rangle & \langle y_2, y_2\rangle & \cdots & \langle y_2, y_n\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y_n, y_1\rangle & \langle y_n, y_2\rangle & \cdots & \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix} \tag{4}$$

由于y存在且唯一，所以方程组有唯一的解。因此，$G(y_1, y_2, \cdots, y_n)\neq 0$。这个行列式叫做$y_1, y_2, \cdots, y_n$的**格拉姆行列式**，它是$J$·格拉姆(1883)引入的。当涉及的函数不言自明时，我们也把$G(y_1, y_2, \cdots, y_n)$简写成G。

克莱姆($Cramer$)法则告诉我们$\alpha_j=\bar{G}_j/\bar{G}$，其中"—"表示取复共轭，$G$由式(4)给出，$G_j$表示$G$的第$j$列用$\langle y_1, x\rangle$，$\langle y_2, x\rangle$，$\cdots$，$\langle y_n, x\rangle$代替后所得的行列式。

我们还要注意关于G的一个有用的判据：

6.5-1定理（线性无关） 希尔伯特空间H中的一组元素$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$是线性无关的，当且仅当

$$G(y_1, y_2, \cdots, y_n)\neq 0$$

证明：前面的讨论说明，在$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$线性无关时，$G\neq 0$。另一方面，若$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$是线性相关的，则其中至少有一个$y_j$，是其余元素的线性组合。从而$G$的第$j$列也是其余各列的线性组合，故$G=0$。

有趣的是，x和它的最佳逼近y之间的距离$\|z\|=\|x-y\|$也能够用格拉姆行列式来表出。

6.5-2 定理（距离） 在式(1)中，若$\dim Y<\infty$并且$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$是Y中的任一基，则

$$\|z\|^2=\frac{G(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)}{G(y_1,y_2,\cdots,y_n)}$$

其中

$$G(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,y_1\rangle & \cdots & \langle x,y_n\rangle\\ \langle y_1,x\rangle & \langle y_1,y_1\rangle & \cdots & \langle y_1,y_n\rangle\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \langle y_n,x\rangle & \langle y_n,y_1\rangle & \cdots & \langle y_n,y_n\rangle\end{vmatrix}$$

证明：由于$\langle y,z\rangle=0$，其中$z=x-y$，所以根据(2)可得到

$$\|z\|^2=\langle z,z\rangle+\langle y,z\rangle=\langle x,x-y\rangle=\langle x,x\rangle-\langle x,\sum\alpha_k y_k\rangle$$

并能够改写为

$$-\|z\|^2+\langle x,x\rangle-\bar{\alpha}_1\langle x,y_1\rangle-\cdots-\bar{\alpha}_n\langle x,y_n\rangle=0 \tag{6}$$

再加上$\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\cdots,\bar{\alpha}$所满足的$n$个方程(3)：

$$\langle y_j,x\rangle-\bar{\alpha}_1\langle y_j,y_1\rangle-\cdots-\bar{\alpha}_n\langle y_j,y_n\rangle=0$$

其中$j=1,2,\cdots,n$。方程(6)和(3)合起，便得到含有$n+1$个“未知数”$1,-\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_n$和$n+1$个线性方程的齐次方程组。由于该方程组有一非平凡解，故它的系数行列式一定等于零，即

$$\begin{vmatrix}\langle x,x\rangle-\|z\|^2 & \langle x,y_1\rangle & \cdots & \langle x,y_n\rangle\\ \langle y_1,x\rangle+0 & \langle y_1,y_1\rangle & \cdots & \langle y_1,y_n\rangle\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \langle y_n,x\rangle+0 & \langle y_n,y_1\rangle & \cdots & \langle y_n,y_n\rangle\end{vmatrix}=0 \tag{7}$$

我们可把这个行列式写成两个行列式的和，而第一个行列式就是$G(x,y_1,\cdots,y_n)$，而第二个行列的第一列的元素为$-\|z\|^2,0,\cdots,0$，其余各列与第一个行列式相同。按照第一列把它展开，可以看出式(7)能够被写成

$$G(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)-\|z\|^2G(y_1,y_2,\cdots,y_n)=0$$

由于$G(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq0$（见6.5-1），这便给出了式(5)。

若(5)中的基$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$是标准正交的，则便有$G(y_1,y_2,\cdots,y_n)=1$(为什么？)，并且把$G(x,y_1,\cdots,y_n)$按其第一行展开，注意到$\langle x,y_i\rangle\cdot\langle y_i,x\rangle=|\langle x,y_i\rangle|^2$，则从式(5)得到

$$\|z\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle x,y_k\rangle|^2 \tag{8}$$

如果把y_k记成e_k，则式(8)和§3.4中的式(11)是一致的。

习　　题

1.证明：重新排列$y_1, y_2, \cdots, y_n$，$G(y_1, y_2, \cdots, y_n)$的值保持不变。

2.证明：

$$G(\cdots, \alpha y_j, \cdots) = |\alpha|^2 G(\cdots, y_j, \cdots)$$

其中用"·"所代表的y_k在等式两端是相同的。

3.若$G(y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq 0$，证明对$j=1,2,\cdots,n-1$，$G(y_1, y_2, \cdots, y_j) \neq 0$。若$G(y_1, y_2, \cdots, y_n)=0$，找出类似的关系。

4.用格拉姆行列式表示出许瓦兹不等式。用定理6.5-1求得等号成立的条件（见3.2-1）。

5.证明：$G(y_1, y_2, \cdots, y_n) \geqslant 0$。由此得出：希尔伯特空间中的有限子集是线性无关的，当且仅当它们的格拉姆行列式是正的。

6.证明：

$$G(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n + \alpha y_j) = G(y_1, y_2, \cdots, y_n), \qquad j<n$$

并指出如何利用这个关系获得定理6.5-2。

7.设$M=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$是希尔伯特空间$H$中的线性无关组。证明：对任意的子集$\{y_k, \cdots, y_m\}$，$k<m<n$，都有

$$\frac{G(y_k, \cdots, y_n)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_n)} \leqslant \frac{G(y_k, \cdots, y_m)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_m)}$$

在几何上为什么这是有道理的？证明：

$$\frac{G(y_m, \cdots, y_n)}{G(y_{m+1}, \cdots, y_n)} \leqslant G(y_m)$$

8.设$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$是希尔伯特空间$H$中的线性无关组，证明：对$m=1,2,\cdots,n-1$有

$$G(y_1, y_2, \cdots, y_n) \leqslant G(y_1, \cdots, y_m) G(y_{m+1}, \cdots, y_n)$$

并且，当且仅当$M_1=\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$中的每一个元素都正交于$M_2=\{y_{m+1}, \cdots, y_n\}$中的每个元素才有等号成立。

9.（**哈达玛行列式定理**）证明在习题8中有

$$G(y_1, y_2, \cdots, y_n) \leqslant \langle y_1, y_2\rangle \langle y_2, y_2\rangle \cdots \langle y_n, y_n\rangle$$

并且，当且仅当$y_1, y_2, \cdots, y_n$相互正交时才有等号成立。用这个公式证明，n阶实方阵$A=(\alpha_{jk})$的行列式满足

$$(\det A)^2 \leqslant a_1 a_2 \cdots a_n, \quad 其中 a_j = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}|^2。$$

10.证明：线性无关集$\{x_1, x_2, \cdots\}$在希尔伯特空间H中是稠密的，当且仅当对每个$x \in H$，

$$当 n \to \infty 时，\quad \frac{G(x, x_1, \cdots, x_n)}{G(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \longrightarrow 0$$

§6.6 样条函数

样条逼近是分段多项式逼近。这就意味着对给定的定义在区间$J=[a,b]$上的函数x，我们用这样的一个函数y去逼近它，y在$[a,b]$被划分的每一个子区间上都是一个多项式，并且这些多项式在子区间的公共端点上若干次可微。因此，代替在整个区间$[a,b]$上用一个多项式去逼近x，而改用n个多项式去逼近x，这里的n是$[a,b]$被划分的子区间的个数。按这种方式所得到的逼近函数y，虽然失去了解析性，但是在很多逼近和插值问题中却更适合。例如，它们不象$[a,b]$上的单一多项式那样在结点之间来回摆动。由于样条在实用上越来越重要，我们打算作一简短的介绍。

最简单的连续的分段多项式逼近要算是用分段线性函数。但是这样的函数在某些点（子区间的端点）不是可微的，而这也是它比$[a,b]$上处处有确定导数的函数更可取的地方。

我们来考察$J=[a,b]$上的**三次样条**。据定义，它们是$[a,b]$上的二次连续可微的实值函数y；所以把它写为

$$y\in C^2[a,b]$$

并且在J的给定的划分P_n

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b \tag{1}$$

的每个子区间中，这样的函数y都是一个次数不超过3的多项式。我们把t_j叫做P_n的结点，而把所有这些三次样条构成的矢量空间记为

$$Y(P_n)$$

让我们来阐明在$[a,b]$上给定的实值函数x是如何用样条函数逼近的。首先选定$J=[a,b]$的一个形如式(1)的划分P_n。所欲要的x的逼近将用插值法得到，这种方法是有效地确定逼近函数的最重要的方法之一。用y对x进行**插值**，就是构造一个y，它在每个结点$t_0,t_1,\cdots,t_n$上都和x有相同的值。经典的插值方法是利用插值公式（如拉格朗日，牛顿或埃弗雷特①公式）得到$[a,b]$上的一个n次多项式，它在每个结点上的值都和x相同。在结点附近，这个多项式能很好地逼近x，但在离结点较远的点，可能有相当大的偏差。在用三次样条的样条插值中，我们取刚才定义的样条y，它在每个结点上有与x相同的值。我们来证明这样的y是存在的，并且若指定了导数y'在区间端点a和b的值，则可证明y是唯一的。这就是下面定理的内容。

6.6-1定理（样条插值） 设x是定义在$J=[a,b]$上且是实值的，P_n是J的任一形如式(1)的划分，并且设k_0'和k_n'是任意两个实数。则存在唯一的三次样条函数$y\in Y(P_n)$，它满足以下$n+3$个条件

$$y(t_j)=x(t_j),\qquad j=0,1,\cdots,n \tag{2a}$$

$$y'(t_0)=k_0',\qquad y'(t_n)=k_n' \tag{2b}$$

①多数的数值分析书都有插值法一章，在E·克雷斯齐格(1972)PP.648—653中有一个简短的介绍。

证明：在每个子区间$I_j=[t_j,t_{j+1}]\subset J$，$j=0,\cdots,n-1$，样条$y$必须和满足

$$p_j(t_j)=x(t_j),\qquad p_j(t_{j+1})=x(t_{j+1})$$

的一个三次多项式p_j一致。我们记$1/(t_{j+1}-t_j)=\tau_j$和

$$p_j'(t_j)=k_j'\qquad p_j'(t_{j+1})=k_{j+1}'$$

k_0'和k_n'是给定的常数，而$k_1',k_2',\cdots,k_{n-1}'$是待定的。直接计算可以验证，满足这四个条件的唯一的三次多项式p_j由下式给出

$$\begin{aligned}p_j(t)&=x(t_j)\tau_j^3(t-t_{j+1})^2\ [1+2\tau_j(t-t_j)]\\&+x(t_{j+1})\tau_j^3(t-t_j)^2\ [1-2\tau_j(t-t_{j+1})]\\&+k_j'\tau_j^2(t-t_j)(t-t_{j+1})^2+k_{j+1}'\tau_j^2(t-t_j)^2(t-t_{j+1})\end{aligned}$$

微分两次可得

$$p_j''(t_j)=-6\tau_j^2x(t_j)+6\tau_j^2x(t_{j+1})-4\tau_jk_j'-2\tau_jk_{j+1}'\tag{3}$$

$$p_j''(t_{j+1})=6\tau_j^2x(t_j)-6\tau_j^2x(t_{j+1})+2\tau_jk_j'+4\tau_jk_{j+1}'\tag{4}$$

由于$y\in C^2[a,b]$，在结点处两个相邻接的多项式的二阶导数一定相同，即

$$p_{j-1}''(t_j)=p_j''(t_j)\qquad j=1,2,\cdots,n-1$$

在(4)中，用$j-1$代替j，和(3)一起。我们看到这$n-1$个方程取如下形式

$$\tau_{j-1}k_{j-1}'+2(\tau_{j-1}+\tau_j)k_j'+\tau_jk_{j+1}'=3\ [\tau_{j-1}^2\Delta x_j+\tau_j^2\Delta x_{j+1}]$$

其中$\Delta x_j=x(t_j)-x(t_{j-1})$，$\Delta x_{j+1}=x(t_{j+1})-x(t_j)$，$j=1,2,\cdots,n-1$。这个含有$n-1$个线性方程的方程组有唯一的解$k_1',k_2',\cdots,k_{n-1}'$。事实上，根据定理5.2-1，因为系数矩阵的所有的元素都是非负的，且主对角线每个元素都大于同一行其余元素(绝对值)之和（即对角占优矩阵）。因此，能唯一地确定y的一阶导数在结点上的值$k_1',k_2',\cdots,k_{n-1}'$。这就完成了证明。

最后，我们推导一个有趣的极小性质，以结束本节关于样条的介绍。假定在定理6.6-1中$x\in C^2[a,b]$，并且(2b)取如下形式

$$y'(a)=x'(a)\qquad\qquad y'(b)=x'(b)\tag{5}$$

则$x'-y'$在a和b的值等于零。用分部积分可得

$$\int_a^b y''(t)\ [x''(t)-y''(t)]\ dt=-\int_a^b y'''(t)\ [x'(t)-y'(t)]\ dt$$

由于y'''在划分的每个子区间上都是常数，所以由(2a)知，右端积分为零，这就证明了

$$\int_a^b [x''(t)-y''(t)]^2dt=\int_a^b [x''(t)]^2dt-\int_a^b[y''(t)]^2dt$$

上式左端的积分是非负的，故右端亦是。从而当$x\in C^2[a,b]$且满足式(2a)和式(5)时，便有

$$\int_a^b[x''(t)]^2dt\geqslant\int_a^b[y''(t)]^2dt\tag{6}$$

并且，当且仅当x是三次样条y时等号成立。这就是样条函数的极小性质。至于为什么叫这

样一个名字，是因为长期以来工程技术人员用一个叫做样条的细长杆去拟合过给定点的曲线，并且用这样的样条把应变能量极小化到和样条的二阶导数的平方的积分近乎相当。

关于高次样条，多变量样条，收敛性问题以及应用和其他课题等，可参看*A*·萨德(*A*·*Sard*)和*S*·温特劳布(*S*·*Weintraub*,1971)*pp*.107-119。

习　题

1.证明：对应于区间$[a,b]$的一个给定的划分P_n，所有的三次样条函数构成一个矢量空间$Y(P_n)$。这个空间的维数是多少？

2.证明：对于给定的形如(1)的划分P_n，唯一地存在$n+1$个三次样条$y_0, y_1, \cdots, y_n$满足

$$y_j(t_k)=\delta_{jk}, \qquad y_j'(a)=y_j'(b)=0$$

如何利用这些条件得到$Y(P_n)$的一个基？

3.用相应于$[-1,1]$的划分$P_2=\{-1,0,1\}$的，且满足(2a)及(5)的三次样条去逼近$[-1,1]$上函数$x(t)=t^4$。首先估定y可能的形式，然后再计算。

4.设$x(t)=t^4$定义在$[-1,1]$上，$Y=\mathrm{span}\{1,t,t^2,t^3\}$，求$x(t)$在$Y$中的契比雪夫逼近$\tilde{y}$。$\tilde{y}$满足(2a)和(5)吗？画出曲线并把$\tilde{y}$与习题3中的样条逼近加以比较。

5.证明：相对于x，习题4中的契比雪夫逼近比习题3中的样条逼近有更大的最大偏差。试加以评论。

6.若$[a,b]$上的三次样条y是三次连续可微的，试证y一定是一个多项式。

7.在$[a,b]$的两个相邻的子区间上，样条函数用同一个多项式表示有时是可能的，试举例说明。对应于划分$\{-\pi/2,0,\pi/2\}$，求$x=x(t)=\sin t$的满足(2a)和(5)的三次样条y。

8.(6)的一个可能的几何解释是：三次样条函数极小化了曲率平方的积分，至少是近似的。请阐明这一解释。

9.对于$x, y\in C^2[a,b]$，定义

$$\langle x,y\rangle_2=\int_a^b x''(t)y''(t)dt, \qquad p(x)=\langle x,x\rangle_2^{1/2}$$

其中脚码2是指：我们这里用的是二阶导数。证明p是一个半范数（见§2.3习题12），但不是一个范数。用$\langle x,y\rangle_2$和p写出(6)的推导。

10.证明：对于任一$x\in C^2[a,b]$和它的满足(2a)及(5)的样条函数y，我们都能用p（见习题9）来估计偏差，并且与划分的具体选择无关：

$$\|x-y\|_2\leqslant p(x)$$

第七章 赋范空间中线性算子的谱论

谱理论是现代泛函分析及其应用的主要分支之一。粗略地讲，它是研究一些逆算子和它们的一般性质，以及它们与原算子的关系。在求解线性代数方程、微分方程、积分方程时，自然地会出现这样的逆算子。例如，施特姆（*Sturm*）和刘维尔（*Liouville*）对边值问题的研究，弗雷德霍姆著名的积分方程理论，对这领域的发展都起过重要的作用。

我们将会看到，算子的谱论对于理解算子本身，也是很重要的。

在第7-9章，我们介绍赋范空间和内积空间上的有界线性算子T：$X \to X$的谱理论。这就包括了对几类最有实际意义的算子的研究，特别是紧算子（第八章）和自伴算子（第九章）。酉算子的谱论放在稍后一点（在§10.5节，读这一节不需要参考第十章的其它各节）。

希尔伯特空间中的无界线性算子在第十章中考虑，而它们在量子力学中的应用则在第十一章研究。

本章内容概要

我们先从有限维矢量空间开始。因为有限维空间中线性算子的谱论本质上就是矩阵的特征值理论（§7.1），它要比无限维空间中算子的谱论简单得多。但是，它具有极大的实际的重要性，这个领域的研究论文是大量的，其中很多出现在数值分析之中。§7.2节中对无限维赋范空间的线性算子所定义的某些谱理论的概念，也正是在矩阵的特征值问题的启示下才提出的，尽管前者要比后者复杂得多。

在§7.3和§7.4中，讨论赋范空间和巴拿赫空间上的有界线性算子的谱的重要性质。

复分析在谱论的研究中是一个有用的工具，但这里保持在初等的水平上，我们只介绍这个方向的一些基本事实。如果学生没有这方面的基础，这节（§7.5）可以删去。

在§7.6和§7.7中，我们将证明这里的某些研究能够推广到巴拿赫代数中去。

一般的假定

为了获得完满的理论，我们不考虑平凡的矢量空间$\{0\}$，除非另有声明，所讨论的空间皆假定是复线性空间。

§7.1 有限维赋范空间中的谱论

令X是一个有限维赋范空间，T：$X \to X$是一个线性算子。这样的算子的谱论比定义在无限维空间上的算子的谱论简单。事实上，从§2.9知道，我们可用矩阵（它与X的基的选择有关）来表示T。我们将会看到，T的谱论本质上就是矩阵的特征值理论。所以我们从矩阵开始。

注意，本节是代数的。但从下一节开始，我们马上要利用范数。

对于给定的（实或复）n 阶方阵 $A=(\alpha_{jk})$，特征值和特征矢量的概念用方程

$$Ax=\lambda x \tag{1}$$

定义如下：

7.1-1 定义（矩阵的特征值，特征矢量，特征空间、谱、预解集） 使方程（1）有解 $x\neq\theta$ 的数 λ，叫做方阵 $A=(\alpha_{jk})$ 的特征值。而 x 叫做 A 的对应于特征值 λ 的特征矢量。对应于 λ 的所有特征矢量和零矢量构成的 X 的线性子空间，叫做 A 的对应于特征值 λ 的特征空间。A 的所有特征值的集合 $\sigma(A)$ 叫做 A 的谱。其关于复平面 C 的余集 $\rho(A)=C-\sigma(A)$ 叫做 A 的预解集。

例如，直接计算可以验证

$$x_1=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} \text{和} \quad x_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \text{分别是} \quad A=\begin{bmatrix}5&4\\1&2\end{bmatrix}$$ 的对应于特征值 $\lambda_1=6$ 和 $\lambda_2=1$ 的特征矢量。那么我们是怎样得出这一结果的呢？在一般情况下关于矩阵的特征值的存在性，我们又能讲点什么呢？

为了回答这一问题，我们首先注意到能把方程（1）写成

$$(A-\lambda I)x=0 \tag{2}$$

其中 I 是 n 阶单位阵。这是含有 n 个未知数 $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ 和 n 个线性方程的齐次方程组，其中 ξ_i 是 x 的分量。方程的系数行列式是 $\det(A-\lambda I)$，要使方程（2）有非零解 x，必须有 $\det(A-\lambda I)=0$。这就给出了 A 的特征方程：

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

$\det(A-\lambda I)$ 叫做 A 的**特征行列式**，把它展开便得到 λ 的 n 次多项式，叫做 A 的**特征多项式**。方程（3）叫做 A 的特征方程。

我们得到下述基本结果：

7.1-2 定理（矩阵的特征值） n 阶方阵 $A=(\alpha_{jk})$ 的特征值由其特征方程（3）的解给出。因此 A 至少有一个特征值（并且至多有 n 个不同的特征值）。

根据所谓代数基本定理和因式分解定理：在 C 上一个正 n 次复系数多项式在 C 内有一个根（并且至多有 n 个不同的根）。所以定理中的第二个论述是成立的。注意，即使 A 是实矩阵时，其特征值也可能是复数。

在前面的例子中，

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda+6=0$$

谱是{6, 1}，而 A 的对应于 6 和 1 的特征矢量分别从方程组

$$\begin{cases} -\xi_1 + 4\xi_2 = 0 \\ \xi_1 - 4\xi_2 = 0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} 4\xi_1 + 4\xi_2 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 = 0 \end{cases}$$

得到。显然，上面的每个方程组只有一个方程是独立的（为什么？）。

上面的结论如何应用到定义在n维赋范空间X上的线性算子T：$X \to X$上去呢？为此令$e=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是$X$的任意一个基，而$T_e=(\alpha_{jk})$是$T$相对于这个基（其元素保持给定的次序）的矩阵表示。则矩阵T_e的特征值、谱、和预解集便叫做算子T的特征值、谱、和预解集。这是因为：

7.1-3 定理（算子的特征值） 定义在有限维赋范空间X上的一个线性算子T：$X \to X$，其相对于X的各个基的所有矩阵表示都有相同的特征值。

证明：首先我们必须弄清，当从X的一个基转移到另一个基时，会出现什么情况。为此令$e=(e_1, e_2, \cdots, e_n)$和$\tilde{e}=(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \cdots, \tilde{e}_n)$是$X$的任意两个基，这里把它们写成行矢量的形式。由基的定义可知，每个e_j都是诸$\tilde{e}_k$的一个线性组合，反之亦然。所以我们能够写成：

$$\tilde{e}=eC \quad 或 \quad \tilde{e}^T = C^T e^T \tag{4}$$

其中C是一个n阶非奇异方阵。每个$x \in X$相对这两个基都各有唯一的表示，比如说

$$x = ex_1 = \sum \xi_j e_j = \tilde{e}x_2 = \sum \tilde{\xi}_k \tilde{e}_k$$

其中$x_1=(\xi_j)$和$x_2=(\tilde{\xi}_k)$都是列矢量。由此和（4）便有$ex_1=\tilde{e}x_2=eCx_2$。因此有

$$x_1 = Cx_2 \tag{5}$$

类似地对于$Tx=y=ey_1=\tilde{e}y_2$，我们有

$$y_1 = Cy_2 \tag{6}$$

所以，若T_1和T_2分别表示T相对于e和$\tilde{e}$的矩阵，则

$$y_1 = T_1 x_1 \quad 和 \quad y_2 = T_2 x_2$$

而由此和（5）、（6），便得

$$CT_2x_2 = Cy_2 = y_1 = T_1x_1 = T_1Cx_2$$

用C^{-1}左乘等式两端，我们便得到变换法则

$$T_2 = C^{-1}T_1C \tag{7}$$

其中C是按照（4）的基变换来确定的（它与T无关）。利用（7）和$\det(C^{-1})\det C=1$，便能够证明T_2和T_1的特征行列式相等：

$$\begin{aligned} \det(T_2-\lambda I) &= \det(C^{-1}T_1C-\lambda C^{-1}IC) \\ &= \det[C^{-1}(T_1-\lambda I)C] \\ &= \det(C^{-1})\det(T_1-\lambda I)\det C \\ &= \det(T_1-\lambda I) \end{aligned} \tag{8}$$

由定理 7.1-2 便可推出T_1和T_2的特征值相等。

顺便指出，我们也可以用下述更具有普遍意义的概念来表述上面的结果。若存在一个非奇异矩阵C使（7）成立，则称n阶方阵T_2和n阶方阵T_1是相似的。T_1和T_2叫做相似的矩阵。用这一概念，我们的证明是说：

（i）定义在有限维赋范空间X上的一个线性算子关于X的任何两个基的两个矩阵表示是相似的。

（ii）相似矩阵有相同的特征值。

此外，定理 7.1-2 和定理 7.1-3 还蕴含着：

7.1-4 存在性定理（特征值） 定义在有限维复赋范空间 $X\neq\{0\}$上的线性算子至少有一个特征值。

一般情况下，我们没有更多的话要说了。（参阅习题13）。

此外，在（8）中令 $\lambda=0$ 便得 $\det T_2=\det T_1$。因此，这个行列式的值给出了算子T的一个内在性质，所以我们能够明确地指出 $\det T$ 这个量。

习　　题

1．求下列矩阵的特征值和特征矢量，其中 a 和 b 是实数且 $b\neq 0$。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -8 & 11\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$$

2．（埃尔米特矩阵） 证明埃尔米特矩阵 $A=(\alpha_{jk})$ 的特征值都是实数。（见§3.10中的定义。）

3．（反埃尔米特矩阵） 证明反埃尔米特矩阵$A=(\alpha_{jk})$的特征值都是纯虚数或零。（见§3.10中的定义。）

4．（酉矩阵） 证明酉矩阵的特征值的绝对值都是1。（见§3.10中的定义。）

5．令X是一个有限维的内积空间，T：$X\to X$是一个线性算子。若T是自伴的，证明它的谱是实的。若T是酉算子，证明它的特征值的绝对值是1。

6．（迹） 令 λ_1，$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$n$阶方阵$A=(\alpha_{jk})$的$n$个特征值，其中某些或全部可以是相等的。证明这些特征值之积等于 $\det A$，其和等于A的迹，也就是说等于A的主对角元素的和：

$$\operatorname{trace} A=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{nn}$$

7．（逆） 证明当且仅当方阵A的所有特征值λ_1，$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$皆不等于零时它的逆 A^{-1}存在。若A^{-1}存在，证明其特征值为λ_1^{-1}，$\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$。

8．证明二阶非奇异方阵

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}\quad\text{有逆}\quad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}\alpha_{22} & -\alpha_{12}\\ -\alpha_{21} & \alpha_{11}\end{bmatrix}$$

若A的特征值为λ_1，λ_2，如何从这个公式推出A^{-1}的特征值为λ_1^{-1}，λ_2^{-1}？

9．若方阵$A=(\alpha_{jk})$的特征值为λ_j，$j=1$，$2,\cdots,n$。证明kA和A^m（$m\in N$）的特征值分

别为$k\lambda_j$和λ_j^m。

10．若方阵A的特征值为λ_1，λ_2，…，λ_n，p是任意的多项式，证明矩阵$p(A)$的特征值为$p(\lambda_j)$，$j=1$，2，…，n。

11．若x_j是n阶方阵A的对应于特征值λ_j的一个特征矢量，C是任意一个n阶非奇异方阵。证明λ_j是$\tilde{A}=C^{-1}AC$的一个特征值，而相应的特征矢量是$y=C^{-1}x_j$。

12．举一个简单例子说明：一个n阶方阵可能没有n个独立的特征矢量以构成$\mathbf{R}^n$(或$\mathbf{C}^n$)的基。例如，考虑矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

13．(**重数**) 矩阵A的特征值λ作为特征多项式的根的重数，叫做其代数重数。A的对应于λ的特征空间的维数，叫做λ的几何重数。求对应于下述变换的矩阵的特征值及其重数，并加以说明。

$$\eta_j=\xi_j+\xi_{j+1},\ (j=1,\ 2,\cdots,n-1),\ \eta_n=\xi_n$$

14．证明一个特征值的几何重数不可能超过它的代数重数（参考习题13）。

15．令X表示所有次数不超过$n-1$的多项式和零多项式构成的线性空间，T是定义在X上的微分算子。求T的所有特征值和特征矢量，以及它们的代数重数和几何重数。

§7.2 基本概念

在上一节，我们考虑的是有限维空间。而在这一节我们考虑任意维数的赋范空间，并将看到在无限维空间中谱理论变得比较复杂。

令$X\neq\{0\}$是一个复赋范空间，T：$\mathscr{D}(T)\to X$是一个线性算子，其定义域$\mathscr{D}(T)\subset X$。用T定义算子：

$$T_\lambda=T-\lambda I \tag{1}$$

其中λ是一个复数，I是定义在$\mathscr{D}(T)$上的恒等算子。若T_λ有逆，用$R_\lambda(T)$表示它，即

$$R_\lambda(T)=T_\lambda^{-1}=(T-\lambda I)^{-1} \tag{2}$$

我们称它为T的预解算子，或简称为T的预解式①。在具体的讨论中若涉及的算子T是不言而喻的，又把$R_\lambda(T)$简记为R_λ。

"预解式"这一名字是很合适的，由于它对解方程$T_\lambda x=y$有帮助。在$R_\lambda(T)$存在的情况下，$x=T_\lambda^{-1}y=R_\lambda(T)y$。

更重要的是，要了解算子T，研究R_λ的性质是基础。自然，T_λ和R_λ的很多性质都依赖于λ，而谱理论就是研究这些性质的。例如，我们对复平面内使R_λ存在的所有λ的集合感兴趣。R_λ的有界性是另一个重要的性质。我们还会问：怎样的λ使R_λ的定义域在X中稠

① 某些作者把预解式定义为$(\lambda I-T)^{-1}$，在较早的积分方程的文献中预解式定义为$(I-\mu T)^{-1}$。诚然，通过基本变换都能够变成式(2)，但却是讨厌的事。希望读者在比较谱论的不同出版资料之前，先要核实一下预解式的定义为好。

密。我们暂且只提出这几个方面的问题。

由定理 2.6-10(b)可知，$R_\lambda(T)$是一个线性算子。

为研究T、T_λ和R_λ，需要下述谱论中的几个基本概念：

7.2-1 定义（正则值，预解值，谱） 令$X\neq\{0\}$是一个复赋范空间，T：$\mathscr{D}(T)\to X$是一个线性算子且$\mathscr{D}(T)\subset X$。T的正则值λ是使下面三条成立的复数：

($R1$)　$R_\lambda(T)$存在，

($R2$)　$R_\lambda(T)$是有界的，

($R3$)　$R_\lambda(T)$是定义在X中的稠密集上。

T的所有正则值λ的集合叫做T的预解集$\rho(T)$。$\rho(T)$在复平面C中的余集$\sigma(T)=C-\rho(T)$叫做T的谱，而$\lambda\in\sigma(T)$叫做T的谱值。进而，谱$\sigma(T)$又可划分为以下三个不相交的集合：

点谱或离散谱$\sigma_p(T)$是使$R_\lambda(T)$不存在的复数集合。而$\lambda\in\sigma_p(T)$叫做T的特征值。

连续谱$\sigma_c(T)$是使$R_\lambda(T)$存在且满足($R3$)但不满足($R2$)的，即$R_\lambda(T)$无界的复数集合。

残谱$\sigma_r(T)$是使$R_\lambda(T)$存在（它可以是有界，亦可以是无界）但不满足（$R3$），即$R_\lambda(T)$的定义域在X中不稠密的复数集合。

为避免不必要的误会，我们允许定义中的某些集合可以是空集。这也是我们将必须讨论的一个存在性问题。例如，从§7.1可知，在有限维情况下$\sigma_c(T)=\sigma_r(T)=\phi$。

定义 7.2-1 中所陈述的条件可概括为下表：

满　　足	不　满　足	λ 属　于：
(R1)　(R2)　(R3)		$\rho(T)$
	(R1)	$\sigma_p(T)$
(R1)　　(R3)	(R2)	$\sigma_c(T)$
(R1)	(R3)	$\sigma_r(T)$

为加强对这些概念的理解，我们给出如下的一些一般性的说明。

首先注意到，表中的四个集合是互不相交的，并且它们的并为整个复平面：

$$\begin{aligned}C&=\rho(T)\cup\sigma(T)\\&=\rho(T)\cup\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T)\end{aligned}$$

再者，若预解式$R_\lambda(T)$存在，前面曾指出根据定理 2.6-10，它是线性的。该定理还证明了：当且仅当$T_\lambda x=0$蕴含着$x=0$时，$R_\lambda(T)$：$\mathscr{R}(T_\lambda)\to\mathscr{D}(T_\lambda)$是存在的，也就是说，$R_\lambda(T)$存在的充要条件是$T_\lambda$的零空间为$\{0\}$。这里$\mathscr{R}(T_\lambda)$表示$T_\lambda$的值域(参见§2.6)。

因此，对某个$x\neq0$若有$T_\lambda x=(T-\lambda I)x=0$，则$\lambda\in\sigma_p(T)$。根据定义，$\lambda$是$T$的一个特征值。则矢量$x$叫做$T$的相对于特征值$\lambda$的特征矢量（若$X$是一个函数空间，$x$叫做$T$的特征函数）。由零矢量和$T$的相对于特征值$\lambda$的所有特征矢量构成的$\mathscr{D}(T)$的子空间，叫做$T$的相对于特征值$\lambda$的特征空间。

可以看出，这里关于特征值的定义是和上一节的定义相符的。还可以看到，有限维空间

上的线性算子的谱是纯点谱，也就是说，其连续谱和残谱皆是空集。所以它的每个谱值都是一个特征值。

对于希尔伯特空间上的一类重要的自伴线性算子来说，其残谱$\sigma_r(T)=\phi$。基于这样的一个事实，我们又把$\sigma(T)-\sigma_p(T)$划分为$\sigma_c(T)$及$\sigma_r(T)$。上述事实将在§9.2-4中证明。

若X是无限维空间，则T可以有不是特征值的谱值。

7.2-2 例子（具有非特征值的谱值的算子） 在希尔伯特序列空间$X=l^2$（参见§3.1-6）上，我们用下式定义线性算子T：$l^2\to l^2$

$$(\xi_1,\ \xi_2,\cdots)\longmapsto(0,\ \xi_1,\ \xi_2,\cdots)\tag{3}$$

其中$x=(\xi_j)\in l^2$。算子T叫做右移位算子。因为

$$\|Tx\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2=\|x\|^2$$

所以T是有界的（且$\|T\|=1$）。算子$R_0(T)=T^{-1}$：$T(X)\to X$是存在的。事实上，它就是由下式给出的左移位算子

$$(\xi_1,\ \xi_2,\cdots)\longmapsto(\xi_2,\ \xi_3,\cdots)$$

（3）表明，$T(X)$在X中不是稠密的。事实上，$T(X)$是由所有满足$\eta_1=0$的$y=(\eta_i)$构成的子空间Y。所以$R_0(T)$不满足（$R3$）。因此，按定义$\lambda=0$是T的一个谱值。此外，直接从式（3）可以看出，$Tx=0$意味着$x=0$，而零矢量不是特征矢量，故$\lambda=0$不是一个特征值。

在我们前面的讨论中，有界逆定理4.12-2表明：若T：$X\to X$是有界、线性的，X是完备的；又若对某一λ预解式$R_\lambda(T)$存在且定义在整个空间X上，则对于该λ，预解式$R_\lambda(T)$是有界的。

此外，下述事实（后面要用到）对于更好地理解前面的概念也可能是有帮助的。

7.2-3 引理（R_λ的定义域） 令X是一个复巴拿赫空间，T：$X\to X$是一个线性算子，$\lambda\in\rho(T)$。假定(a)T是闭的，或(b)T是有界的。则$R_\lambda(T)$在整个空间X上有定义且是有界的。

证明：(a)由于T是闭的，故由4.13-3知T_λ也是闭的。因此，R_λ是闭的。由($R2$)知R_λ是有界的。据4.13-5(b)，可得$\mathscr{D}(R_\lambda)$是闭的，所以由($R3$)导出$\mathscr{D}(R_\lambda)=\overline{\mathscr{D}(R_\lambda)}=X$。

(b) 由于$\mathscr{D}(T)=X$是闭的，则由4.13-5(a)知T是闭的，从而由（a）的证明可推出引理的结论。

习　　题

1.（恒等算子） 对于赋范空间X上的恒等算子I，求其特征值和特征空间，以及$\sigma(I)$和$R_\lambda(I)$。

2. 对于给定的线性算子T，证明集合$\rho(T)$，$\sigma_p(T)$，$\sigma_c(T)$和$\sigma_r(T)$相互间是不相交的，并且它们的并是复平面。

3.（不变子空间） 设Y是赋范空间X的一个子空间，$T: X\to X$是一个线性算子。若$T(Y)\subset Y$，则说Y在T之下是不变的。证明T的特征空间在T之下是不变的，并给出例子。

4. 若Y是n维赋范空间X上的线性算子T的一个不变子空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是$X$的一个基且使$Y=\mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$。问$T$关于基$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$的矩阵表示是怎样的形式？

5. 令(e_k)是可分希尔伯特空间H的一个完全标准正交序列，在e_k上按下式定义$T: H\to H$

$$Te_k=e_{k+1} \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

然后线性连续地延拓到H。求不变子空间，并证明T没有特征值。

6.（延拓） 一个算子在延拓下，其谱的各个部分的特性具有很重要的实际意义。若T是一个有界线性算子，T_1是T的一个线性延拓，证明$\sigma_p(T_1)\supset\sigma_p(T)$，并且对任意的$\lambda\in\sigma_p(T)$，$T$的特征空间都包含在$T_1$的特征空间中。

7. 证明在习题6中有$\sigma_r(T_1)\subset\sigma_r(T)$。

8. 证明在习题6中有$\sigma_c(T)\subset\sigma_c(T_1)\cup\sigma_p(T_1)$。

9. 直接证明（不用习题6和8）在习题6中有$\rho(T_1)\subset\rho(T)\cup\sigma_r(T)$。

10. 从习题6和8如何推证习题9中的结论。

§7.3 有界线性算子的谱性质

给定一个算子，它的谱有什么样的一般性质？这个问题与定义算子的空间的类型（比较§7.1和§7.2的说明）以及我们所研究的算子的类型有关。这就建议我们单独研究具有共同谱性质的算子的广泛分类问题。这一节首先从研究复巴拿赫空间X上的有界线性算子T开始。因而$T\in B(X, X)$，其中X是完备的，参阅§2.10。

以后我们将会看到，下面第一个定理是各部分理论的基本定理。

7.3-1 定理（逆） 令$T\in B(X, X)$，其中X是一个巴拿赫空间。若$\|T\|<1$，则$(I-T)^{-1}$作为定义在整个空间X上的有界线性算子是存在的，并且

$$(I-T)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}T^j=I+T+T^2+\cdots \tag{1}$$

〔其中右端的级数按$B(X,X)$上的范数收敛〕。

证明：据§2.7中的（7）有$\|T^j\|\leqslant\|T\|^j$。我们还记得，对于$\|T\|<1$，几何级数$\sum\|T\|^j$收敛。因此，（1）中的级数对于$\|T\|<1$是绝对收敛的。由于X是完备的，据定理2.10-2 $B(X, X)$也是完备的。从§2.3我们知道，绝对收敛蕴含着收敛。

我们用S记式（1）中级数的和，剩下的是要证明$S=(I-T)^{-1}$。为此，计算

$$\begin{aligned}&(I-T)(I+T+\cdots+T^n)\\&=(I+T+\cdots+T^n)(I-T)\\&=I-T^{n+1}\end{aligned} \tag{2}$$

令 $n\to\infty$，因 $\|T\|<1$ 则 $T^{n+1}\to 0$。于是得到

$$(I-T)S=S(I-T)=I$$

这就证明了 $S=(I-T)^{-1}$。

作为这个定理的第一个应用，让我们证明一个重要的事实：有界线性算子的谱是复平面中的一个闭集（$\sigma\neq\phi$ 将在 §7.5-4 中证明）。

7.3-2 定理（谱的闭性） 复巴拿赫空间 X 上的有界线性算子 T 的预解集 $\rho(T)$ 是开的；因此谱 $\sigma(T)$ 是闭的。

证明：若 $\rho(T)=\phi$，则它是开的（真正地说，$\rho(T)\neq\phi$，在定理 7.3-4中将会看到。）现令 $\rho(T)\neq\phi$。对于固定的 $\lambda_0\in\rho(T)$ 和任意的 $\lambda\in C$，有

$$\begin{aligned}T-\lambda I&=T-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I\\&=(T-\lambda_0 I)[I-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 I)^{-1}]\end{aligned}$$

用 V 表示上式方括号〔…〕中的算子，我们能把它写成如下形式：

$$T_\lambda=T_{\lambda_0}V \quad \text{其中} V=I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0} \tag{4}$$

由于 $\lambda_0\in\rho(T)$ 和 T 是有界的，引理 7.2-3(*b*) 意味着 $R_{\lambda_0}=T_{\lambda_0}^{-1}\in B(X,X)$。进而，定理 7.3-1 表明，对于一切满足 $\|(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}\|<1$ 的 λ，在 $B(X,X)$ 中 V 有逆

$$V^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}[(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^j=\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j \tag{5a}$$

也就是 λ 满足

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|} \tag{5b}$$

由于 $T_{\lambda_0}^{-1}=R_{\lambda_0}\in B(X,X)$，由此和（4）可以看到，对于每一个满足（5*b*）的 λ，算子 T_λ 有逆

$$R_\lambda=T_\lambda^{-1}=(T_{\lambda_0}V)^{-1}=V^{-1}R_{\lambda_0} \tag{6}$$

因此（5*b*）表示由 T 的正则值 λ 构成的 λ_0 的一个邻域。由于 $\lambda_0\in\rho(T)$ 是任意的，故 $\rho(T)$ 是开的，所以它的余集 $\sigma(T)=C-\rho(T)$ 是闭的。

特别有意义的是，在这个证明过程中我们还得到了预解式的一个基本表达式，它是用含 λ 的幂的幂级数给出的。事实上，由（5）和（6）立即可得到下述定理：

7.3-3 表示定理（预解式） X 和 T 如定理 7.3-2 中所设，对每一个 $\lambda_0\in\rho(T)$，预解式 $R_\lambda(T)$ 有表示式：

$$R_\lambda=\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1} \tag{7}$$

这个级数对复平面上开圆盘（参见(5*b*)）

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$$

中的每个 λ 都是绝对收敛的。这个圆盘是 $\rho(T)$ 的一个子集。

这个定理也将为应用复分析研究谱论提供了一条途径，在§7.5中会看到这点。

作为定理7.3-1的另一个结果，让我们来证明这样一个重要事实：有界线性算子的谱是复平面上的一个有界集。精确的论述如下：

7.3-4 定理（谱） 复巴拿赫空间X上的有界线性算子$T: X\to X$的谱$\sigma(T)$是紧的，并且位于由

$$|\lambda|\leqslant\|T\| \tag{8}$$

所界定的圆盘之内。因此T的预解集$\rho(T)$是不空的。〔$\sigma(T)\neq\phi$将在§7.5-4中证明。〕

证明：令$\lambda\neq 0$且$\kappa=\lambda^{-1}$。从定理7.3-1可得到表达式：

$$R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}=-\lambda^{-1}(I-\kappa T)^{-1}=\lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\kappa T)^j=\lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^{-1}T)^j \tag{9}$$

定理7.3-1还表明，对所有满足

$$\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|=\frac{\|T\|}{|\lambda|}<1 \qquad 即 \qquad |\lambda|>\|T\|$$

的λ，级数收敛。同一个定理也证明了这样的$\lambda\in\rho(T)$。因此谱$\sigma(T)=C-\rho(T)$一定落在圆盘（8）内，从而$\sigma(T)$是有界的。再者，据定理7.3-2知$\sigma(T)$是闭的。所以$\sigma(T)$是紧的。

由刚才证明的定理知道，复巴拿赫空间上的有界线性算子T的谱是有界的。那么自然要寻求以原点为中心包含整个谱的最小圆盘，这就促使我们提出下面的概念。

7.3-5 定义（谱半径） 复巴拿赫空间X上的算子$T\in B(X,X)$的谱半径$r_\sigma(T)$就是复λ-平面内以原点为中心包含$\sigma(T)$的最小闭圆盘的半径

$$r_\sigma(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$$

从（8）可以看出：对于复巴拿赫空间上的有界线性算子T，其谱半径满足

$$r_\sigma(T)\leqq\|T\| \tag{10}$$

而在§7.5中我们将证明

$$r_\sigma(T)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}$$

习 题

1．令$X=C[0,1]$且用$Tx=vx$定义$T: X\to X$，其中$v\in X$是固定的。求$\sigma(T)$。注意$\sigma(T)$是闭的。

2．求一个线性算子$T: C[0,1]\to C[0,1]$，它的谱是给定的区间$[a,b]$。

3．若Y是算子T对应于特征值λ的特征空间，问算子T_Y的谱是什么？

4．令$T: l^2\to l^2$是由$y=Tx$，$x=(\xi_j)$，$y=(\eta_j)$，$\eta_j=\alpha_j\xi_j$所定义的算子，其中(α_j)在$[0,1]$中稠密。求$\sigma_p(T)$及$\sigma(T)$。

5．在习题4中若$\lambda\in\sigma(T)-\sigma_p(T)$，证明$R_\lambda(T)$是无界的。

6. 推广习题4，求一个线性算子T：$l^2\to l^2$，它的特征值在给定的紧集$K\subset C$中稠密且$\sigma(T)=K$。

7. 令$T\in B(X,X)$。证明当$\lambda\to\infty$时$\|R_\lambda(T)\|\to 0$。

8. 令$X=C[0,\pi]$且用$x\to x''$定义T：$\mathscr{D}(T)\to X$，其中$\mathscr{D}(T)=\{x\in X\mid x',x''\in X, x(0)=x(\pi)=0\}$。证明$\sigma(T)$不是紧的。

9. 令T：$l^\infty\to l^\infty$是由$x\mapsto(\xi_2,\xi_3,\cdots)$定义的算子，其中给定$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$。(*a*) 若$|\lambda|>1$，证明$\lambda\in\rho(T)$。(*b*) 若$|\lambda|\leqslant 1$，证明$\lambda$是特征值，并求特征空间$Y$。

10. 令T：$l^p\to l^p$是由$x\mapsto(\xi_2,\xi_3,\cdots)$定义的算子，其中给定$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$且$1\leqslant p<+\infty$。若$|\lambda|=1$，问$\lambda$是$T$的一个特征值吗（象习题9中那样）？

§7.4 预解式和谱的其他性质

预解式的一些进一步的有意义的基本性质表述如下：

7.4-1 定理（预解方程，可交换性） 令X是一个复巴拿赫空间，$T\in B(X,X)$且λ，$\mu\in\rho(T)$（参见7.2-1）。则

(a) T的预解式R_λ满足希尔伯特关系或预解方程

$$R_\mu-R_\lambda=(\mu-\lambda)R_\mu R_\lambda,\qquad \lambda,\mu\in\rho(T) \tag{1}$$

(b) R_λ与任一个与T可交换的$S\in B(X,X)$可交换。

(c) 还有

$$R_\lambda R_\mu=R_\mu R_\lambda,\qquad \lambda,\mu\in\rho(T) \tag{2}$$

证明：(a) 据7.2-3，T_λ的值域为整个X。因此$I=T_\lambda R_\lambda$，其中I是X上的恒等算子。同样有$I=R_\mu T_\mu$。因此有

$$\begin{aligned}R_\mu-R_\lambda&=R_\mu(T_\lambda R_\lambda)-(R_\mu T_\mu)R_\lambda\\&=R_\mu(T_\lambda-T_\mu)R_\lambda\\&=R_\mu[T-\lambda I-(T-\mu I)]R_\lambda\\&=(\mu-\lambda)R_\mu R_\lambda\end{aligned}$$

(b) 据假设：$ST=TS$。因此$ST_\lambda=T_\lambda S$。利用式$I=T_\lambda R_\lambda=R_\lambda T_\lambda$，便可得到

$$R_\lambda S=R_\lambda ST_\lambda R_\lambda=R_\lambda T_\lambda SR_\lambda=SR_\lambda$$

(c) 由(*b*)知R_μ和T可交换，因此再由(*b*)可知R_λ和R_μ可交换。

我们的下一个结果是重要的谱映射定理，并且在矩阵特征值理论的启示下着手这一工作。

若λ是方阵A的一个特征值，则对某一个$x\neq 0$有$Ax=\lambda x$。用A左乘等式两端有

$$A^2x=A\lambda x=\lambda Ax=\lambda^2x$$

如此继续下去，对每个正整数m有

$$A^m x = \lambda^m x$$

也就是说，若 λ 是 A 的一个特征值，则 λ^m 是 A^m 的一个特征值。更一般地说，

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

是矩阵

$$p(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_0 I$$

的一个特征值。

值得注意的是，我们将要证明这个性质可以推广到任意维的复巴拿赫空间。在证明的过程中我们将要用到这样一个事实：有界线性算子有非空的谱。这一点将在后面（§7.5-4）证明，采用的是复分析方法。

为了得到所希望的定理，给出一个方便的记法：

$$p(\sigma(T)) = \{\mu \in C \mid \mu = p(\lambda),\ \lambda \in \sigma(T)\} \qquad (3)$$

也就是说，$p(\sigma(T))$ 是对于某一 $\lambda \in \sigma(T)$，满足 $\mu = p(\lambda)$ 的所有复数 μ 的集合。我们也用 $p(\rho(T))$ 表示类似意义的集合。

7.4-2 多项式的谱映射定理 令 X 是一个复巴拿赫空间，$T \in B(X,X)$ 且

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0 \qquad \alpha_n \neq 0$$

则有

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) \qquad (4)$$

也就是说算子

$$p(T) = \alpha_n T^n + \alpha_{n-1} T^{n-1} + \cdots + \alpha_0 I$$

的谱 $\sigma(p(T))$ 完全由多项式 p 在 T 的谱 $\sigma(T)$ 上的值构成。

证明：我们假设 $\sigma(T) \neq \phi$；这将在 7.5-4 中证明。在 $n=0$ 的情况下，有 $p(\sigma(T)) = \{\alpha_0\} = \sigma(p(T))$。现令 $n>0$，以下分两步证明。(a) 证明：

$$\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T)) \qquad (4a)$$

(b) 证明：

$$p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T)) \qquad (4b)$$

这样便证明了式（4）。详细证明如下：

(a) 为了简单起见，令 $S = p(T)$ 及

$$S_\mu = p(T) - \mu I \qquad \mu \in C$$

则当 S_μ^{-1} 存在时，S_μ 的公式表明 S_μ^{-1} 是算子 $p(T)$ 的预解式。我们固定 μ，由于 X 是复的，给定的多项式 $s_\mu = p(\lambda) - \mu$ 必定可完全分解成线性因子的积：

$$s_\mu(\lambda) = p(\lambda) - \mu = \alpha_n(\lambda - \gamma_1)(\lambda - \gamma_2)\cdots(\lambda - \gamma_n) \qquad (5)$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 是 s_μ 的零点（当然，它们依赖于 μ）。对应于（5）我们有

$$S_\mu = p(T) - \mu I = \alpha_n(T - \gamma_1 I)(T - \gamma_2 I)\cdots(T - \gamma_n I)$$

若每个 $\gamma_j \in \rho(T)$，据7.2-3每个$T-\gamma_j I$ 都有一个定义在整个X上的有界逆，同样对S_μ也是成立的；事实上，由§2.6中的（6），有

$$S_\mu^{-1} = \frac{1}{\alpha_n}(T-\gamma_n I)^{-1}(T-\gamma_{n-1}I)^{-1}\cdots(T-\gamma_1 I)^{-1}$$

因此，这时便证明了 $\mu \in \rho(p(T))$。从此可推出：

$$\mu \in \sigma(p(T)) \Rightarrow \gamma_j \in \sigma(T)，对某个 j。$$

而（5）给出

$$s_\mu(\gamma_j) = p(\gamma_j) - \mu = 0$$

故而

$$\mu = p(\gamma_j) \in p(\sigma(T))$$

由于 $\mu \in \sigma(p(T))$是任意的，这就证明了式（4*a*）。

$$\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$$

(b) 为了证明式（4*b*）：

$$p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$$

我们通过证明：

$$\kappa \in p(\sigma(T)) \Rightarrow \kappa \in \sigma(p(T)) \tag{6}$$

来达到。现令 $\kappa \in p(\sigma(T))$，据定义，这意味着对某个 $\beta \in \sigma(T)$，有 $\kappa = p(\beta)$。这时有以下两种可能性：

（*A*） $T-\beta I$ 没有逆，

（*B*） $T-\beta I$ 有一个逆。

我们逐一地考察这两种情况。

（*A*）从 $\kappa = p(\beta)$可得 $p(\beta)-\kappa = 0$。因此 β 是多项式 $s_\kappa(\lambda) = p(\lambda)-\kappa$ 的一个零点。由此我们可以写成 $s_\kappa(\lambda) = p(\lambda)-\kappa = (\lambda-\beta)g(\lambda)$，其中 $g(\lambda)$ 表示其余 $n-1$ 个线性因子和 α_n 的积。与此对应，我们有

$$S_\kappa = p(T) - \kappa I = (T-\beta I)g(T) \tag{7}$$

由于 $g(T)$的因子都与$T-\beta I$ 可换，所以又有

$$S_\kappa = g(T)(T-\beta I) \tag{8}$$

若S_κ有一个逆，则（7）和（8）给出

$$I = (T-\beta I)g(T)S_\kappa^{-1} = S_\kappa^{-1}g(T)(T-\beta I)$$

这就证明了 $T-\beta I$ 有一个逆，而这与我们的假设矛盾。从而说明，对于我们给定的κ，$p(T)$的预解式S_κ^{-1}是不存在的，故有 $\kappa \in \sigma(p(T))$。由于 $\kappa \in p(\sigma(T))$ 是任意的，这就在 $T-\beta I$ 没有逆的假定下证明了（6）。

（*B*）假定对某个 $\beta \in \sigma(T)$，$\kappa = p(\beta)$，象上面一样，现在假设逆 $(T-\beta I)^{-1}$ 存在。则

对于$T-\beta I$的值域，一定有

$$\mathscr{R}(T-\beta I)\neq X \tag{9}$$

若不是这样，把有界逆定理 4.12-2 应用到 $T-\beta I$，便得出$(T-\beta I)^{-1}$是有界的，从而有$\beta\in\rho(T)$，这将与$\beta\in\sigma(T)$相矛盾。由（7）和（9）可得到

$$\mathscr{R}(S_\kappa)\neq X$$

而把引理 7.2-3(*b*) 应用到 $p(T)$，从 $\kappa\in\rho(p(T))$ 将能推出 $\mathscr{R}(S_\kappa)=X$，这就证明了 $\kappa\in\sigma(p(T))$。如此便在$T-\beta I$有逆的假定下证明了（6）。定理 7.4-2得证。

最后我们考察特征矢量的一个基本性质。

7.4-3 定理（线性无关性） 对应于矢量空间X上的线性算子T的不同特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的特征矢量 $x_1, x_2,\cdots,x_n$，构成一个线性无关组。

证明：如果假定$\{x_1, x_2,\cdots,x_n\}$线性相关，会导出矛盾的结果。令 x_m 是矢量组中第一个能用它前边的矢量线性组合表出的矢量，即

$$x_m=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_{m-1}x_{m-1} \tag{10}$$

则$\{x_1, x_2,\cdots,x_{m-1}\}$是线性无关的。用$T-\lambda_mI$作用（10）的两端，便得

$$(T-\lambda_mI)x_m=\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j(T-\lambda_mI)x_j=\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j(\lambda_j-\lambda_m)x_j$$

由于 x_m 是对应于 λ_m 的一个特征矢量，故左端 $(T-\lambda_mI)x_m=0$。又由于右端的矢量形式$\{x_1, x_2,\cdots,x_{m-1}\}$是线性无关的，故必有

$$\alpha_j(\lambda_j-\lambda_m)=0 \qquad j=1,2,\cdots,m-1$$

而又因 $\lambda_j-\lambda_m\neq0$，所以 $\alpha_j=0$，$j=1,2,\cdots,m-1$。将这一结果代入（10）便得 $x_m=\theta$，这与x_m是T的特征矢量 $x_m\neq0$ 的事实相矛盾。从而完成了证明。

习　题

1. 不用（1）或 7.4-1(*b*)，直接证明（2）。
2. 从（1）证明（2）。
3. 若S，$T\in B(X,X)$，证明对任一$\lambda\in\rho(S)\cap\rho(T)$有 $R_\lambda(S)-R_\lambda(T)=R_\lambda(S)(T-S)R_\lambda(T)$。
4. 令X是一复巴拿赫空间，$T\in B(X,X)$且 p 是一个多项式。证明对每一个 $y\in X$，方程

$$p(T)x=y \qquad x,\ y\in X$$

有唯一解 x 的充分必要条件是：对所有的 $\lambda\in\sigma(T)$，$p(\lambda)\neq0$。

5. 在定理 7.4-2 中，为什么要求X必须是复空间？
6. 利用定理 7.4-3，找出一个 n 阶方阵具有可张成全空间 $\mathbf{C}^n$（或 $\mathbf{R}^n$）的 n 个特征矢量的充分条件。

7. 证明复巴拿赫空间X上的任一算子$T\in B(X,X)$，都有

$$r_\sigma(\alpha T)=|\alpha|r_\sigma(T),\qquad r_\sigma(T^k)=[r_\sigma(T)]^k,\qquad k\in N$$

其中 r_σ 表示谱半径（参见 7.3-5）。

8. 用（i）直接计算，及（ii）证明$A^2=I$的方法，来求出矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

的特征值。

9.（**幂等算子**） T是巴拿赫空间上的一个有界线性算子，若$T^2=T$（也可参考§3.3），则称T是幂等的。给出一些幂等算子的例子。若$T\neq I,\theta$，则它的谱 $\sigma(T)=\{0,1\}$；用(a) §7.3 中的（9），(b) 定理7.4-2 来证明这一结论。

10. 证明矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

代表一个幂等算子 T：$\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 相对于一个标准正交基B的 矩阵表示。利用（i）习题**9**，和（ii）通过直接计算来确定它的谱。并求出特征矢量及特征空间。

§7.5 复分析在谱论中的应用

复分析是研究谱论的一个重要工具。这两个领域之间的联系可用复线积分或幂级数来沟通。这里我们只用幂级数。这样做能使我们的讨论保持在较初等的水平上，而且只需要下面几个基本的概念和事实① 。

当一个度量空间不能表示成两个不相接的非空开子集之并时，便说它是连通的。度量空间的子集若视为子空间是连通的，称为是连通集。

所谓复平面 $\mathbf{C}$ 中的一个域G，是指G为$\mathbf{C}$中的一个开连通子集。

可以证明，$\mathbf{C}$ 中的开集G是连通的充分必要条件为：G中的每两点都能用G中的一条折线（由有限多条直线段组成）连接起来（在大多数复分析的书中，这种说法都用作连通性的定义）。

对于复变量λ的复值函数 h，若它在复λ-平面中的域G上有定义且可微，也就是说，由

$$h'(\lambda)=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{h(\lambda+\Delta\lambda)-h(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

① 不熟悉初等复分析的读者可以只看主要结果（7.5-3，7.5-4，7.5-5），跳过有关证明而直接过渡到下一节。映射（例如，一个算子）的"域"，意味着映射的定义域，即被确定的所有映射点的集合。因而这是术语"域"的不同应用。

所定义的 h 的导数 h'，对每个 $\lambda\in G$ 都存在，则称 $h(\lambda)$ 在域 G 上是解析的（或全纯的）。若函数 h 在 $\lambda_0\in\mathbf{C}$ 的某一个 ε-邻域上是解析的，则称它在点 λ_0 是解析的。

当且仅当在每个 $\lambda_0\in G$ 上，h 都有级数表示

$$h(\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty} C_j(\lambda-\lambda_0)^j$$

且该级数的收敛半径不等于零时，h 在 G 上是解析的。

要把复分析用来研究谱理论，上述结论和定理 7.3-3 都起着关键作用。

预解式 R_λ 是一个依赖于复参数 λ 的算子，这就提出了如下的研究途径。

所谓一个矢值函数或算子函数，是指映射

$$\begin{aligned} S:\ &\Lambda\to B(X,X)\\ &\lambda\mapsto S_\lambda \end{aligned}\tag{1}$$

其中 Λ 是复 λ-平面的任一子集（我们用 S_λ 代替 $S(\lambda)$，对于 $R(\lambda)$ 也有类似的记法 R_λ，因为后面我们将研究 $S_\lambda=R_\lambda$ 和 $\Lambda=\rho(T)$ 的情形。）

在 S 给定之后，我们可以选取任意 $x\in X$，这样便得到映射：

$$\begin{aligned} &\Lambda\to X\\ &\lambda\mapsto S_\lambda x \end{aligned}\tag{2}$$

我们还可以选取 $x\in X$ 和任一 $f\in X'$（参见 2.10-3）得到一个从 Λ 到复平面的映射，即

$$\begin{aligned} &\Lambda\to\mathbf{C}\\ &\lambda\mapsto f(S_\lambda x) \end{aligned}\tag{3}$$

据式（3）提出如下定义。

7.5-1 定义（局部解析，解析） 令 Λ 是 $\mathbf{C}$ 的一个开子集，X 是一个复巴拿赫空间。若对每一个 $x\in X$ 和 $f\in X'$，函数

$$h(\lambda)=f(S_\lambda x)$$

按通常的意义（如前面所述）在每个 $\lambda_0\in\Lambda$ 都是解析的，则称式（1）中的 S 在 Λ 上是局部解析的。若 Λ 是一个域且 S 在 Λ 上是局部解析，则称 S 在 Λ 上是解析的。若 S 在 $\lambda_0\in\mathbf{C}$ 的某一 λ_0 的 ε-邻域上是解析的，则称 S 在点 λ_0 是解析的。

这个定义注意到下述情形：有界线性算子 T 的预解集 $\rho(T)$ 是开的（据 7.3-2），但未必总是一个域。一般来说，它是几个不相接的域（或不相接的连通开集）之并。我们将会看到，预解式在 $\rho(T)$ 的每一点都是解析的，因此在任何情况下它在 $\rho(T)$ 上是局部解析的（因而在这些域的每一个之上都定义了一个解析的算子函数），当且仅当 $\rho(T)$ 为连通的时候，预解式才是在 $\rho(T)$ 上解析，这时 $\rho(T)$ 是一个单连通域。

在详细地讨论这些问题之前，先让我们作如下的概述。

评注 定义 7.5-1 是很合适的，决不是无所谓的，而是值得作出如下的解释：我们还曾记得，在 §4.9 研究有界线性算子时定义过三种收敛性，因此，在这里对 S_λ 关于 λ 的导数 S_λ'，也能有相应的三种定义式

$$\left\| \frac{1}{\Delta\lambda}[S_{\lambda+\Delta\lambda} - S_\lambda] - S_\lambda' \right\| \to 0$$

$$\left\| \frac{1}{\Delta\lambda}[S_{\lambda+\Delta\lambda}x - S_\lambda x] - S_\lambda' x \right\| \to 0 \qquad x \in X$$

$$\left| \frac{1}{\Delta\lambda}[f(S_{\lambda+\Delta\lambda}x) - f(S_\lambda x)] - f(S_\lambda' x) \right| \to 0 \qquad (x \in X,\ f \in X')$$

按最后一个式子的意义，对域Λ中的所有λ导数的存在意味着$h(\lambda) = f(S_\lambda x)$按通常的意义是$\Lambda$上的解析函数；因而这就是我们关于导数的定义。可以证明，这种导数（对每一个$x \in X$和每一个$f \in X'$）的存在性蕴含着另外两种导数的存在性；参阅E·希尔（$E.Hille$）和R·菲利普斯（$R.S.Phillips$，1957），p.93（列在附录3中）。这是很值得注意的，同时也证实了提出定义7.5-1是有道理的。由于在7.5-1中定义的解析性常常很容易检验，所以它也有实际的重要性。

象上面指出的，把复分析应用到谱论的关键是定理7.3-3。这个定理是说，对每个$\lambda_0 \in \rho(T)$，复巴拿赫空间X上的算子$T \in B(X,X)$的预解式$R_\lambda(T)$都有幂级数表示

$$R_\lambda(T) = \sum_{j=0}^{\infty} R_{\lambda_0}(T)^{j+1}(\lambda - \lambda_0)^j \tag{4}$$

该级数对于圆盘（图62）

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|} \tag{5}$$

中的每个λ都是绝对收敛的。取任一$x \in X$和$f \in X'$并定义h为

$$h(\lambda) = f(R_\lambda(T)x)$$

由（4）可得到幂级数表示

$$h(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\lambda - \lambda_0)^j \qquad c_j = f(R_{\lambda_0}(T)^{j+1}x)$$

该级数在圆盘（5）上是绝对收敛的。这就证明了

7.5-2 定理（R_λ的解析性） 复巴拿赫空间X上的有界线性算子T：$X \to X$的预解式$R_\lambda(T)$，在T的预解集$\rho(T)$上的每一点λ_0都是解析的。因此$R_\lambda(T)$在$\rho(T)$上是局部解析的。

此外，$\rho(T)$是使T的预解式局部解析的最大集合。事实上，预解式在谱点不能再是解析的，这可从下面定理中的（7）看出。

7.5-3 定理（预解式） 若$T \in B(X,X)$，其中X是一个复巴拿赫空间，而$\lambda \in \rho(T)$，则

$$\|R_\lambda(T)\| \geqslant \frac{1}{\delta(\lambda)} \qquad 其中\quad \delta(\lambda) = \inf_{s \in \sigma(T)} |\lambda - s| \tag{6}$$

是λ到谱$\sigma(T)$的距离。因此

$$\text{当 } \delta(\lambda)\to 0 \text{ 时，} \|R_\lambda(T)\|\to\infty \tag{7}$$

证明：对每个 $\lambda_0\in\rho(T)$，圆盘（5）是 $\rho(T)$ 的一个子集；参见7.3-3。因此，假定 $\sigma(T)\neq\phi$（下面证明）。我们看到 λ_0 到谱的距离至少要等于圆盘的半径，也就是说，$\delta(\lambda_0)\geqslant 1/\|R_{\lambda_0}\|$。这就推出了（6）。

复巴拿赫空间上的有界线性算子 T 的谱决不可能是空集。这一结论在理论上和实用上都是极为重要的。

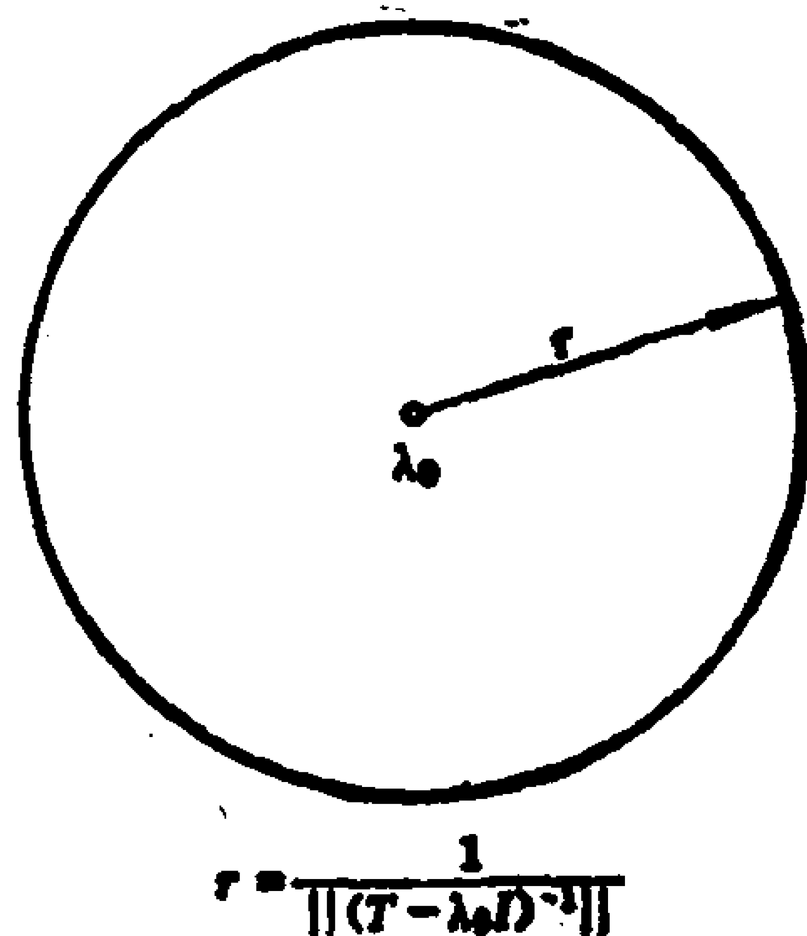


图62 由（5）表示的复 λ-平面中半径 $r=1/\|R_{\lambda_0}\|$ 的开圆

7.5-4 定理（谱） 若 $X\neq\{0\}$ 是一个复巴拿赫空间，而 $T\in B(X,X)$，则 $\sigma(T)\neq\phi$。

证明：由假设，$X\neq\{0\}$。若 $T=0$，则 $\sigma(T)=\{0\}\neq\phi$。令 $T\neq 0$，则 $\|T\|\neq 0$。§7.3中的级数（9）为

$$R_\lambda=-\lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^{-1}T)^j \qquad |\lambda|>\|T\| \tag{8}$$

由于该级数关于 $1/|\lambda|<1/\|T\|$ 收敛，所以在 $1/|\lambda|\leqslant 1/2\|T\|$，即 $|\lambda|>2\|T\|$ 时绝对收敛。对于这些 λ，用几何级数的求和公式可得

$$\|R_\lambda\|\leqslant|\lambda|^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\|\lambda^{-1}T\|^j=\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}\leqslant\frac{1}{\|T\|}, \quad |\lambda|\geqslant 2\|T\| \tag{9}$$

下面我们来证明，如果 $\sigma(T)=\phi$，将导致矛盾。$\sigma(T)=\phi$ 意味着 $\rho(T)=\mathbf{C}$。据7.5-2，R_λ 对于所有的 λ 都是解析的。因此，对于固定的 $x\in X$ 和固定的 $f\in X'$，函数

$$h(\lambda)=f(R_\lambda x)$$

在 $\mathbf{C}$ 上是解析的，也就是说 h 是一个整函数。由解析性意味着连续性，所以 h 是连续的。而且在紧圆盘 $|\lambda|\leqslant 2\|T\|$ 上是有界的。但根据式（9）由于 $\|R_\lambda\|<1/\|T\|$，并且

$$|h(\lambda)|=|f(R_\lambda x)|\leqslant\|f\|\,\|R_\lambda x\|$$
$$\leqslant\|f\|\,\|R_\lambda\|\,\|x\|\leqslant\|f\|\,\|x\|/\|T\|$$

故 h 对于 $|\lambda|\geqslant 2\|T\|$ 也是有界的。从而 h 在 $\mathbf{C}$ 上有界，故据刘维尔定理："在整个复平面上有界的整函数是一个常数，"则 h 是一个常数。又由于在 h 中的 $x\in X$ 及 $f\in X'$ 是任取的，h 是常数便意味着 R_λ 与 λ 无关，所以 $R_\lambda^{-1}=T-\lambda I$ 也不依赖于 λ，但这是不可能的。从而定理获证。

最后，我们用式（8）来证明下面盖尔芳德（*I.Gelfand* 1941）的结果：

7.5-5 定理（谱半径） 若 T 是复巴拿赫空间上的一个有界线性算子，则对于 T 的谱半径 $r_\sigma(T)$ 有

$$r_\sigma(T)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|} \tag{10}$$

证明：根据谱映射定理7.4-2，我们有 $\sigma(T^n)=[\sigma(T)]^n$，所以

$$r_\sigma(T^n)=[r_\sigma(T)]^n \tag{11}$$

在§7.3的（10）中，把T换成T^n便得

$$r_\sigma(T^n)\leqslant \| T^n \|$$

与式（11）合在一起，对每个n都有

$$r_\sigma(T)=\sqrt[n]{r_\sigma(T^n)}\leqslant\sqrt[n]{\| T^n \|}$$

因此

$$r_\sigma(T)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\| T^n \|}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\| T^n \|} \tag{12}$$

如果我们能证明 $r_\sigma(T)=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\| T^n \|}$，则由式（12）可推出式（10）。

级数 $\sum c_n\kappa^n$ 对于$|\kappa|<r$绝对收敛，r为其收敛半径，根据下面著名的哈达玛公式可以求得。

$$1/r=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} \tag{13}$$

在很多复分析的书中都包含有这个公式并加以证明，例如，在E·希尔（1973），p.118。

令$\kappa=\lambda^{-1}$，我们可把（8）写成如下形式

$$R_\lambda=-\kappa\sum_{n=0}^{\infty}T^n\kappa^n \qquad |\kappa|<r$$

然后记$|c_n|=\| T^n \|$，便得

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty}T^n\kappa^n\right\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\| T^n \||\kappa|^n=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n||\kappa|^n$$

哈达玛公式（13）表明，对于$|\kappa|<r$，该级数绝对收敛。因此，对于

$$|\lambda|=\frac{1}{|\kappa|}>\frac{1}{r}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\| T^n \|}$$

级数绝对收敛。

从定理7.5-2和7.5-3知道，R_λ在复λ-平面中的预解集$\rho(T)$上恰好是局部解析的，这在前面已经指出。$\rho(T)$对应于复κ-平面中的一个集合，记之为M。则由复分析可知，收敛半径r是完全包含在M中的以$\kappa=0$为中心的最大开圆盘的半径（例如，参看E·希尔（1973），p.197；注意，我们的幂级数以$\kappa=0$为中心。）。因此，$1/r$是复λ-平面中以$\lambda=0$为中心且其外部整个落在$\rho(T)$中的最小圆盘的半径。根据定义，这就表明$1/r$是T的谱半径。因此，根据式（13）有

$$r_\sigma(T)=\frac{1}{r}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\| T^n \|}$$

由此和式（12）便得到式（10）。

习　　题

1.（**幂零算子**）　若存在正整数m，使得$T^m=0$，则称线性算子T是幂零算子。求复巴

拿赫空间$X\neq\{0\}$上的幂零算子T：$X\to X$的谱。

2．如何从式（8）推出习题1的结果？

3．从式（8）求$(A-\lambda I)^{-1}$，（利用$A^2=I$）其中A为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

4．很明显，定理7.3-4蕴含着

$$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|$$

问如何从定理7.5-5推出这一结果？

5．若X是一复巴拿赫空间，$S,T\in B(X,X)$且$ST=TS$，证明

$$r_\sigma(ST)\leqslant r_\sigma(S)r_\sigma(T)$$

6．证明在习题5中，可换性$ST=TS$是不能丢掉的。

7．值得注意的是式（10）中的序列（$\|T^n\|^{1/n}$）不必是单调的。为说明这一点，可考虑由下式定义的T：$l^1\to l^1$

$$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3\cdots)\longmapsto(0,\xi_1,2\xi_2,\xi_3,2\xi_4,\xi_5\cdots)$$

8．（舒尔不等式） 设$A=(a_{jk})$是一个n阶方阵且$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是它的特征值。则可以证明舒尔不等式

$$\sum_{m=1}^{n}|\lambda_m|^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|^2$$

是成立的，其中当且仅当A是正规的（参见3.10-2），等号成立。由这个不等式推出A的谱半径的一个上界。

9．若T是希尔伯特空间H上的一个正规算子，证明$r_\sigma(T)=\|T\|$（参见定义3.10-1）。

10．证明（10）中的极限的存在性已经从$\|T^{m+n}\|\leqslant\|T^m\|\,\|T^n\|$推出；参见§2.7中的（7）。（令$a_n=\|T^n\|$，$b_n=\ln a_n$，$\alpha=\inf(b_n/n)$，证明$b_n/n\to\alpha$。）

§7.6 巴拿赫代数

有趣的是，在研究巴拿赫代数中也会出现谱的问题。所谓巴拿赫代数，它们既是巴拿赫空间，而同时也是一个代数。我们将阐明这一事实，先从某些有关的概念开始。

一个域**K**上的**代数A**首先是域**K**上的一个矢量空间**A**，并且对指定的每一对元素$x,y\in$ **A**，定义了唯一的积$xy\in$ **A**，具有以下性质：

$$(xy)z=x(yz)\tag{1}$$

$$x(y+z)=xy+xz\tag{2a}$$

$$(x+y)z=xz+yz\tag{2b}$$

$$\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)\tag{3}$$

其中x，y，z是**A**中的任意元素，α是**K**中的标量。

若$\mathsf{K}=\mathsf{R}$或C，则A分别叫做实的或复的代数。

当乘法是可交换的时候，也就是说对所有的x，$y\in\mathsf{A}$，都有

$$xy=yx \tag{4}$$

则称A是**可交换**的（或阿贝尔代数）。

若A含有元素e，它对所有的$x\in\mathsf{A}$都有

$$ex=xe=x \tag{5}$$

则称A是具有**恒等元**（或么元）的代数。元素e就叫做A的么元。

若A有么元，则么元是唯一的。

事实上，若e'是A的另一个么元，则由于

$$ee'=e \qquad (\text{由于 } e' \text{ 是一个么元})$$

$$ee'=e' \qquad (\text{由于 } e \text{ 是一个么元})$$

故$e'=e$

7.6-1 定义（赋范代数，巴拿赫代数） 代数A若是一个赋范空间且对所有元$x,y\in\mathsf{A}$有

$$\|xy\|\leqslant\|x\|\,\|y\| \tag{6}$$

再若A有么元e，还满足

$$\|e\|=1 \tag{7}$$

则称A是一个赋范代数。如果赋范代数A作为赋范空间又是完备的，则称它为巴拿赫代数。

注意式（6）联系到乘法和范数，从下面可以看出乘积是两个因子的连续函数的。

$$\begin{aligned}\|xy-x_0y_0\| &= \|x(y-y_0)+(x-x_0)y_0\| \\ &\leqslant \|x\|\,\|y-y_0\|+\|x-x_0\|\,\|y_0\|\end{aligned}$$

下面的例子说明很多重要的空间都是巴拿赫代数。

例子

7.6-2 空间 R 和 C。 实直线R和复平面C都是具有么元$e=1$的可交换的巴拿赫代数。

7.6-3 空间 C[a,b] 空间$C[a,b]$是具有么元（$e=1$）的可交换巴拿赫代数，其积xy按通常的意义定义为

$$(xy)(t)=x(t)y(t) \qquad t\in[a,b]$$

关系式（6）容易验证。

由所有多项式组成的$C[a,b]$的子空间是一个具有么元（$e=1$）的可交换的赋范代数。

7.6-4 矩阵 所有$n\times n$阶（n是大于1的固定的正整数）复矩阵组成的矢量空间X是一个具有么元I（n阶单位阵）的不可交换代数，在X上定义范数便得到一个巴拿赫代数。（关于X上的范数，可看§2.7中习题12。）

7.6-5 空间 B(X,X) 复巴拿赫空间$X\neq\{0\}$上的所有有界线性算子组成的巴拿赫空间$B(X,X)$是具有么元I（X上的恒等算子）的巴拿赫代数。据定义，乘法就是算子的合成。

关系式（6）为（参见§2.7中式（7））：

$$\|T_1T_2\| \leqslant \|T_1\|\,\|T_2\|$$

除非 $\dim X=1$，$B(X,X)$是不可交换的。

令**A**是具有幺元的一个代数。如果 $x\in$ **A** 在**A**中有**逆**①，则称之为**可逆的**，也就是说，若**A**含有一个元素，记之为 x^{-1}，使得

$$x^{-1}x=xx^{-1}=e \tag{8}$$

便说 x 是可逆的。

若 x 是可逆的，则其逆是唯一的。事实上，$yx=e=xz$ 意味着

$$y=ye=y(xz)=(yx)z=ez=z$$

用这些概念，我们能够建立下面的定义。

7.6-6 定义（预解集，谱） 令**A**是具有幺元的一个复巴拿赫代数，则 $x\in A$ 的预解集 $\rho(x)$是指复平面内使 $x-\lambda e$ 为可逆的所有 λ 的集合。而 x 的谱 $\sigma(x)$是 $\rho(x)$在复平面内的余集，而因有 $\sigma(x)=\mathbf{C}-\rho(x)$。任一 $\lambda\in\sigma(x)$都叫做 x 的一个谱值。

因此，$x\in$ **A** 的谱值是使 $x-\lambda e$不可逆的那些 λ。

若X是一个复巴拿赫空间，则$B(X,X)$ 便是一个巴拿赫代数，所以定义 7.6-6 是可以应用的。在这种情况下，立即会提出这样一个问题：定义 7.6-6 和我们前面的定义 7.2-1 是否一致？我们将证明回答是肯定的。

令$T\in B(X,X)$而 λ 属于由 7.6-6 所定义的预解集。则据定义，$R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}$ 存在且是$B(X,X)$中的一个元素，也就是说$R_\lambda(T)$是定义在X上的一个有界线性算子。因此 λ 属于由 7.2-1所定义的 $\rho(T)$，$\lambda\in\rho(T)$。

反之，假定 λ 属于由 7.2-1定义的 $\rho(T)$，$\lambda\in\rho(T)$，则$R_\lambda(T)$存在且是线性（据2.6-10）有界的，并且定义在X的一个稠密子集上。但由于T是有界的，因此引理 7.2-3 (b) 蕴含着$R_\lambda(T)$定义在整个空间X上。从而说明 λ 属于由 7.6-6 定义的 $\rho(T)$，$\lambda\in\rho(T)$。这就表明 7.2-1 和 7.6-6 关于预解集的定义是一致的。由于谱是预解集的余集，所以与定义的谱也是一致的。

习　　题

1. 在例 7.6-4 中，X为什么是完备的？
2. 证明例 7.6-3 中的式（6）是成立的。
3. 我们怎样才能使 n 元复数序组构成的矢量空间成为一个巴拿赫代数？
4. 在(a)7.6-2，(b)7.6-3，(c)7.6-4 中的可逆元素都分别是什么样的元素？
5. 证明：对于 7.6-4 中X的元素来说，7.6-6中谱的定义是和定义 7.1-1 中一致的。
6. 求 $x\in C[0,2\pi]$的$\sigma(x)$，这里的 $x(t)=\sin t$。对任一 $x\in C[a,b]$ 求 $\sigma(x)$。
7. 证明定义在一个线性空间上且映到自己的所有线性算子集合构成一个代数。

---

① 有的作者采用"正则"（对于可逆），和"奇异"（对于不可逆）的术语。

8. 设A是一个具有么元e的复巴拿赫代数。若对一个$x\in A$有y，$z\in A$满足$yx=e$及$xz=e$，证明x是可逆的且$y=z=x^{-1}$。

9. 若$x\in A$是可逆的且和$y\in A$是可交换的，证明x^{-1}和y也是可交换的。

10. 代数A的子集A_1，如果对A_1的元素施行代数运算的结果仍落在A_1之中，则称A_1是A的一个子代数。所谓A的中心C是指A中这样一些元素的集合：它们和A的所有元素都是可交换的。给出一个例子，证明C是A的一个可交换的子代数。

§7.7 巴拿赫代数的其他性质

我们打算说明这样一个有意义的事实：本章前几节中的某些结论和证明，能够被推广到巴拿赫代数中去。

7.7-1 定理（逆） 令$\mathbf{A}$是一个具有么元e的复巴拿赫代数。若$x\in \mathbf{A}$满足$\|x\|<1$，则$e-x$是可逆的，且

$$(e-x)^{-1}=e+\sum_{j=1}^{\infty}x^j \tag{1}$$

证明：根据上一节式（6）我们有$\|x^j\|\leqslant\|x\|^j$，由$\|x\|<1$可知$\sum\|x^j\|$收敛。因此式（1）中的级数是绝对收敛的。因为$\mathbf{A}$是完备的，所以它是收敛的（参见§2-3）。令s是它的和，让我们证明$s=(e-x)^{-1}$。直接计算可知：

$$\begin{aligned}&(e-x)(e+x+\cdots+x^n)\\&=(e+x+\cdots+x^n)(e-x)\\&=e-x^{n+1}\end{aligned} \tag{2}$$

现令$n\to\infty$，由于$\|x\|<1$，则$x^{n+1}\to 0$。而（2）给出

$$(e-x)s=s(e-x)=e$$

其中利用了A中的乘法是连续的这一事实。因此$s=(e-x)^{-1}$，式（1）成立。

在具有么元e的复巴拿赫代数A给定后，我们便可以考虑$\mathbf{A}$中所有可逆元素构成的子集G。由于这个子集G是一个群，所以我们把它写成G。（参见附录1.8中关于群的定义。）

事实上，$e\in G$。并且若$x\in G$，则x^{-1}存在。而由于它有逆$(x^{-1})^{-1}=x$，故$x^{-1}\in G$。此外，若$x,y\in G$，则因为$y^{-1}x^{-1}$是xy的逆：

$$(xy)(y^{-1}x^{-1})=x(yy^{-1})x^{-1}=xex^{-1}=e$$

$$(y^{-1}x^{-1})(xy)=y^{-1}(x^{-1}x)y=y^{-1}ey=e$$

故$xy\in G$。

我们下面证明G是开的：

7.7-2 定理（可逆元） 令$\mathbf{A}$是一个具有么元的复巴拿赫代数。则$\mathbf{A}$的所有可逆元的集合G是A的一个开子集；因此$\mathbf{A}$的所有不可逆的元之集合$M=\mathbf{A}-G$是闭的。

证明：令$x_0\in G$，我们必须证明：每个充分接近x_0的$x\in\mathbf{A}$，比如说

$$\| x - x_0 \| < \frac{1}{\| x_0^{-1} \|}$$

都属于G。令 $y = x_0^{-1}x$ 和 $z = e - y$ 。则利用上节的（6）可得：

$$\begin{aligned}\| z \| &= \| -z \| = \| y - e \| \\ &= \| x_0^{-1}x - x_0^{-1}x_0 \| \\ &= \| x_0^{-1}(x - x_0) \| \\ &\leqslant \| x_0^{-1} \| \, \| x - x_0 \| < 1\end{aligned}$$

因而 $\| z \| < 1$，所以根据7.7-1知$e-z$是可逆的。因此$e - z = y \in G$。又由于G是一个群，故也有

$$x_0 y = x_0 x_0^{-1} x = x \in G$$

而由于 $x_0 \in G$是任意的，这就证明了G是开的，而其余集M是闭的。

参照定义7.6-6，我们定义 $x \in A$ 的**谱半径** $r_\sigma(x)$为

$$r_\sigma(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| \tag{3}$$

而且可证明有如下定理：

7.7-3 定理（谱） 令$\mathbf{A}$是一个具有么元e的复巴拿赫代数。则对任一 $x \in \mathbf{A}$，其谱$\sigma(x)$是紧的，且其谱半径满足

$$r_\sigma(x) \leqslant \| x \| \tag{4}$$

证明：若 $|\lambda| > \| x \|$，则 $\| \lambda^{-1}x \| < 1$，所以由7.7-1知$e - \lambda^{-1}x$是可逆的。因此，$-\lambda(e - \lambda^{-1}x) = x - \lambda e$也是可逆的，故有$\lambda \in \rho(x)$。这就证明了式（4）。

式（4）表明$\sigma(x)$是有界的。下面我们通过证明 $\rho(x) = \mathbf{C} - \sigma(x)$是开的来证明$\sigma(x)$是闭的。

若 $\lambda_0 \in \rho(x)$，则 $x - \lambda_0 e$ 是可逆的。根据7.7-2，存在 $x - \lambda_0 e$ 的一个邻域 $N \subset \mathbf{A}$ 且N的全部元素都是可逆的。对固定的一个x，映射$\lambda \mapsto x - \lambda e$ 是连续的。因此，只要λ足够接近λ_0。比如$|\lambda - \lambda_0| < \delta$，其中$\delta > 0$，则$x - \lambda e$便落在$N$中。所以这样的$x - \lambda e$都是可逆的。这就意味着相应的$\lambda$属于$\rho(x)$。由于$\lambda_0 \in \rho(x)$是任取的，所以$\rho(x)$是开的，从而$\sigma(x) = \mathbf{C} - \rho(x)$是闭的。

这个定理证明了 $\rho(x) \neq \phi$。此外，还有：

7.7-4 定理（谱） 在上面定理的假设条件下，有 $\sigma(x) \neq \phi$。

证明：令λ，$\mu \in \rho(x)$且记

$$v(\lambda) = (x - \lambda e)^{-1}, \quad w = (\mu - \lambda) v(\lambda)$$

则有

$$\begin{aligned} x - \mu e &= x - \lambda e - (\mu - \lambda) e \\ &= (x - \lambda e)(e - w) \end{aligned}$$

对上式两端取逆，便有

$$v(\mu)=(e-w)^{-1}v(\lambda) \tag{5}$$

其中用到了求逆的简单公式。假定 μ 足够地接近 λ，使得 $\|w\|<\frac{1}{2}$，则据（1）有

$$\|(e-w)^{-1}-e-w\|=\left\|\sum_{j=2}^{\infty}w^j\right\|\leqslant\sum_{j=2}^{\infty}\|w\|^j=\frac{\|w\|^2}{1-\|w\|}\leqslant 2\|w\|^2$$

由此式和（5），便有

$$\begin{aligned}\|v(\mu)-v(\lambda)-(\mu-\lambda)v(\lambda)^2\|&=\|(e-w)^{-1}v(\lambda)-(e+w)v(\lambda)\|\\&\leqslant\|v(\lambda)\|\ \|(e-w)^{-1}-(e+w)\|\\&\leqslant 2\|w\|^2\|v(\lambda)\|\end{aligned}$$

其中 $\|w\|^2$含有因子 $|\mu-\lambda|^2$。因此，用 $|\mu-\lambda|$ 去除不等式两端并令 $\mu\to\lambda$，则可看出 $\|w\|^2/|\mu-\lambda|\to 0$，从而不等式的左端有

$$\frac{1}{\mu-\lambda}[v(\mu)-v(\lambda)]\to v(\lambda)^2 \tag{6}$$

这个结果在下面将要用到。

令 $f\in A'$，这里的A'是A的对偶空间，这时是把A作为一个巴拿赫空间来考虑的。我们用$h(\lambda)=f(v(\lambda))$来定义 h：$\rho(x)\to\mathbf{C}$。由于 f 是连续的，所以 h 也是连续的。把 f 应用到(6)，便得

$$\lim_{\mu\to\lambda}\frac{h(\mu)-h(\lambda)}{\mu-\lambda}=f(v(\lambda)^2)$$

这就证明了 h 在 $\rho(x)$的每一点都是解析的。

若 $\sigma(x)$ 是空集，则 $\rho(x)=\mathbf{C}$，所以 h 是一个整函数。由于在 $|\lambda|\to\infty$时，$v(\lambda)=-\lambda^{-1}(e-\lambda^{-1}x)^{-1}$和$(e-\lambda^{-1}x)^{-1}$都以 $e^{-1}=e$为极限，所以便得到

$$|h(\lambda)|=|f(v(\lambda))|\leqslant\|f\|\ \|v(\lambda)\|=\|f\|\ |\lambda|^{-1}\|(e-\lambda^{-1}x)^{-1}\|\to 0 \tag{7}$$

这就证明了 h 在$\mathbf{C}$上是有界的，因此据刘维尔定理（参见§7.5）知 h 是一个常数，再据(7)知 $h=0$。由于 $f\in A'$是任取的，由 $h(\lambda)=f(v(\lambda))=0$ 据 4.3-4 可推出 $v(\lambda)=0$。但这是不可能的。否则，将意味着

$$\|e\|=\|(x-\lambda e)v(\lambda)\|=\|0\|=0$$

而这显然与 $\|e\|=1$ 矛盾。因此 $\sigma(x)=\phi$ 不能成立。

在我们的讨论中，么元 e 的存在是必不可少的。在很多应用中，$\mathbf{A}$ 有一个么元。但是若 $\mathbf{A}$ 没有么元，关于能够做到的又是什么呢？在这种情况下，按照下述经典的方式可以给 $\mathbf{A}$ 补充一个么元。

令 $\tilde{A}$ 是所有序偶 (x,α) 的集合，其中 $x\in\mathbf{A}$，α 是一个标量。定义

$$(x,\alpha)+(y,\beta)=(x+y,\ \alpha+\beta)$$

$$\beta(x,\ \alpha)=(\beta x,\ \beta\alpha)$$

$$(x,\ \alpha)(y,\ \beta)=(xy+\alpha y+\beta x,\ \alpha\beta)$$
$$\|(x,\ \alpha)\|=\|x\|+|\alpha|$$
$$\tilde{e}=(0,\ 1)$$

则$\tilde{A}$便是具有么元$\tilde{e}$的一个巴拿赫代数；事实上，§7.6中的（1），（2），（3），（6）和（7）是很容易验证的，而$\tilde{A}$的完备性可从A及C的完备性推出。

此外，在把A和$\tilde{A}$看作为赋范空间时，映射$x\mapsto(x,\ 0)$是A到$\tilde{A}$的一个子空间上的同构。这个子空间的余维是1。如果我们把x和$(x,\ 0)$等同起来，则$\tilde{A}$就简直是A加上由$\tilde{e}$生成的一维矢量空间。

习　　题

1．若$\|x-e\|<1$，证明x是可逆的，并且

$$x^{-1}=e+\sum_{j=1}^{\infty}(e-x)^j$$

2．证明在定理7.7-1中

$$\|(e-x)^{-1}-e-x\|\leqslant\frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$$

3．若x是可逆的，并且y满足$\|yx^{-1}\|<1$，证明$x-y$是可逆的，并且对任一$a\in A$记$a^0=e$时有

$$(x-y)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}x^{-1}(yx^{-1})^j$$

4．证明所有形如

$$x=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

的复矩阵集合，构成所有复2×2阶矩阵代数的一个子代数，并求$\sigma(x)$。

5．要注意的是，巴拿赫代数**A**的元x的谱$\sigma(x)$与**A**有关。事实上，能够证明：若B是**A**的一个子代数，则$\boldsymbol{\sigma}(x)\supset\sigma(x)$，其中$\boldsymbol{\sigma}(x)$是把$x$视为$B$的元时的谱。

6．令λ，$\mu\in\rho(x)$，证明下面预解方程：

$$v(\mu)-v(\lambda)=(\mu-\lambda)v(\mu)v(\lambda)$$

其中$v(\lambda)=(x-\lambda e)^{-1}$。

7．一个具有么元的代数，若它的每个非零元都是可逆的，则把它叫做一个**可除代数**。若一个复巴拿赫代数**A**是一个可除代数，证明**A**是么元的所有标量倍的集合。

8．设G如7.7-2中所定义，证明由$x\mapsto x^{-1}$所给定的映射$G\to G$是连续的。

9．所谓$x\in$ **A**的一个左逆是指满足$yx=e$的$y\in A$。类似地，若$xz=e$，则称z是x的一个右逆。如果代数**A**的每个元素$x\neq0$都有一个左逆，证明**A**是一个可除代数。

10．若(x_n)和(y_n)是赋范代数**A**中的两个柯西序列，证明(x_ny_n)也是**A**中的一个柯西序列。进而，若$x_n\to x$，$y_n\to y$，证明$x_ny_n\to xy$。

第八章　赋范空间上的紧线性算子及其谱

在应用中紧线性算子是很重要的。例如，在积分方程理论和各种数学物理问题中，它们都起着核心的作用。

紧线性算子的理论曾作为泛函分析早期研究的一个雏型。其性质与有限维空间上算子的某些性质极为相象。对于紧线性算子来讲，其谱理论能够相当完整地从弗雷德霍姆著名的线性积分方程理论推广到含复参数的线性泛函方程$Tx-\lambda x=y$中去。这个被推广了的理论叫做黎斯-邵德尔（*Riesz-Schauder*）理论。参见F.黎斯（1918）和J.邵德尔（1930）。

本章内容概要

线性算子的紧性（定义 8.1-1）是从积分方程中提出的，它在弗雷德霍姆的理论中是一条根本的性质。在§8.1和§8.2中，我们讨论紧线性算子的重要的一般性质。而在§8.3和§8.4中讨论其谱性质。黎斯-邵德尔理论就是以§§8.3，8.4为基础的，关于算子方程的一些结果在§8.5到§8.7中给出。包括了§8.7中的在积分方程中的应用。

§8.1　赋范空间上的紧线性算子

紧线性算子的定义如下：

8.1-1 定义（紧线性算子）　令X,Y是两个赋范空间。算子$T: X\to Y$若是线性的，且对X的每一个有界子集M，其象$T(M)$是相对紧的，即闭包$\overline{T(M)}$是紧的(参见定义2.5-1)，则称T是一个紧线性算子（或全连续线性算子）。

分析中的很多线性算子都是紧的。紧线性算子的系统理论是从形如

$$(T-\lambda I)x(s)=y(s),\ 其中\ Tx(s)=\int_a^b k(s,t)x(t)dt \tag{1}$$

的积分方程理论中产生出来的。在这里，$\lambda\in\mathbf{C}$是一个参数①，y和核k是给定的（满足一定条件的）函数，而x是未知函数。这样的方程在常微分和偏微分方程的理论中也起着重要的作用。D·希尔伯特（1912）发现了一个令人惊异的事实：关于方程（1）的可解性这样一个本质的结论（弗雷德霍姆的理论）不依赖于（1）中T的积分表示的存在，而只与T是否为紧线性算子有关。F·黎斯（1918）在1918年的一篇著名论文中，把弗雷德霍姆的理论用抽象的公理形式表述出来（在§8.7我们将考虑积分方程）。

“紧”这一术语是通过定义提出来的。而老一点的术语“全连续”是通过下述引理诱导出来的。这个引理说明紧线性算子是连续的，而其逆一般是不真的。

① 若$\lambda\neq0$时，式（1）被称为第二类的方程；$\lambda=0$时，式（1）被称为第一类的力程。对应于这两类方程的理论是很不相同的，其原因是不能用几句话说得清楚。可看R·柯朗和D·希尔伯特（1953-62),Vol.1,p.159.——引入可变参数λ是H·庞加莱（1896)的想法。

8.1-2 引理（连续性） 令X和Y是赋范空间，则

(a) 每个紧线性算子T：$X \to Y$都是有界的，因此是连续的。

(b) 若$\dim X = \infty$，恒等算子I：$X \to X$（是连续的）不是紧的。

证明：(a) 单位球面$U = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$是有界的。由于$T$是紧的，故$\overline{T(U)}$是紧的。据2.5-2知也是有界的，所以

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty$$

因此T是有界的，从而由2.7-9证明了它是连续的。

(b) 当然闭单位球$M = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$是有界的。当$\dim X = \infty$时，则由2.5-5可推出$M$不是紧的。因而$I(M) = M = \overline{M}$不是相对紧的。

从集合紧性的定义（参见2.5-1），我们很容易得到关于算子紧性的一个有用判据。

8.1-3 定理（紧性判据） 令X和Y是赋范空间，T：$X \to Y$是一个线性算子。当且仅当X中的每个有界序列(x_n)在T之下的象序列$(Tx_n) \subset Y$都有一个收敛的子序列，T才是紧的。

证明：若T是紧的而(x_n)是有界的，则序列(Tx_n)在Y中的闭包是紧的，而定义2.5-1表明(Tx_n)含有一个收敛的子序列。

反之，假定每个有界序列(x_n)都含有子序列(x_{n_k})使得(Tx_{n_k})在Y中收敛。现考察任一有界子集$B \subset X$，并令(y_n)是$T(B)$中的任一序列。则对某些$x_n \in B$有$y_n = Tx_n$，并且由于B是有界的，可知(x_n)也是有界的。据假定，(Tx_n)含有收敛的子序列。因为(y_n)是在$T(B)$中任取的，故据定义2.5-1可知$\overline{T(B)}$是紧的。再据定义，这就证明了T是紧的。

从这一定理可得以下几乎是显然的事实：两个紧线性算子T_j：$X \to Y$之和$T_1 + T_2$是紧的（参见习题2）。类似地，αT_1也是紧的，其中α是任一标量。因此我们有如下结论：

从X到Y的紧线性算子形成一个矢量空间。

此外，在有限维的情况下，定理8.1-3还可得到一定的简化。

8.1-4 定理（有限维的定义域或值域） 令X和Y是赋范空间，T：$X \to Y$是一个线性算子。则有

(*a*) 若T是有界的且$\dim T(X) < \infty$，则算子T是紧的。

(*b*) 若$\dim X < \infty$，则算子T是紧的。

证明：(a) 令(x_n)是X中的任一有界序列。则不等式$\|Tx_n\| \leqslant \|T\| \|x_n\|$表明$(Tx_n)$是有界的。因此据$\dim X < \infty$及2.5-3可知$(Tx_n)$是相对紧的。从而推出$(Tx_n)$含有收敛的子序列。又由于$(x_n)$是在$X$中任取的有界序列，所以据8.1-3知$T$是紧的。

(b) 根据$\dim X < \infty$，由2.7-8可推出T的有界性，再由2.6-9(*b*)推出，$\dim T(X) \leqslant \dim X$。从而由(*a*)证明了(*b*)。

顺便指出，具有$\dim T(X) < \infty$的算子$T \in B(X, Y)$（参见8.1-4(*a*)），常常叫做有限秩的算子。

下面一个定理是讲，在怎样的条件下，一个紧线性算子序列的极限是紧的。对于一个被表示成紧线性算子序列的一致算子极限的已知算子来讲，要证明它的紧性，这个定理是一个

重要的工具。

8.1-5 定理（紧线性算子序列） 令(T_n)是一个从赋范空间X到巴拿赫空间Y的紧线性算子序列。如果(T_n)是一致算子收敛，也就是说，$\|T_n - T\| \to 0$（参见§4.9），则极限算子T是紧的。

证明：我们利用“对角线方法”来证明，对X中任一有界序列(x_m)，其象(Tx_m)有一个收敛的子序列，然后应用定理8.1-3。

由于T_1是紧的，故(x_m)有一个使$(T_1x_{1,m})$是柯西序列的子序列$(x_{1,m})$。类似地，$(x_{1,m})$有一个使$(T_2x_{2,m})$为柯西序列的子序列$(x_{2,m})$。如此继续下去，我们看到“对角线序列”$(y_m)=(x_{m,m})$是(x_m)的这样一个子序列，对每一个固定的正整数n，序列$(T_ny_m)_{m\in N}$是柯西序列。由于(x_m)是有界的，比如说对所有的m有$\|x_m\|\leqslant c$。因此，对所有的m，$\|y_m\|\leqslant c$，令$\varepsilon>0$，由于$T_m\to T$，存在一个$n=p$，使得$\|T-T_p\|<\varepsilon/3c$。由于$(T_py_m)_{m\in N}$是柯西序列，所以存在一个N，使得

$$\|T_py_j - T_py_k\| < \varepsilon/3 \qquad (j,k>N)$$

因此，对于j，$k>N$，我们便得到

$$\begin{aligned}\|Ty_j - Ty_k\| &\leqslant \|Ty_j - T_py_j\| + \|T_py_j - T_py_k\| + \|T_py_k - Ty_k\| \\ &\leqslant \|T-T_p\|\,\|y_j\| + \varepsilon/3 + \|T_p - T\|\,\|y_k\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3c}c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c}c = \varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了(Ty_m)是柯西序列，并且由于Y是完备的故它是收敛的。记住(y_m)是任意有界序列(x_m)的子序列，这就从定理8.1-3推出算子T的紧性。

要注意的是，如果用强算子收敛性$\|T_nx - Tx\|\to 0$来代替一致算子收敛性，上述定理将不再是正确的。这一事实可从由$T_nx=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots)$所定义的$T_n$：$l^2\to l^2$看出，其中$x=(\xi_j)\in l^2$。由于$T_n$是线性有界的，故由8.1-4$(a)$知$T_n$是紧的。显然，$T_nx\to x=Ix$，但$I$不是紧的，这是由于$\dim l^2=\infty$，参见8.1-2$(b)$。

下面的例子说明这个定理是如何用来去证明算子的紧性。

8.1-6 例子（空间l^2） 证明T：$l^2\to l^2$的紧性，T被定义为$y=(\eta_j)=Tx$，其中$\eta_j=\xi_j/j$，$j=1,2,\cdots$。

解：T显然是线性的。若$x=(\xi_j)\in l^2$，则$y=(\eta_j)\in l^2$。现定义T_n：$l^2\to l^2$如下：

$$T_nx=(\xi_1,\xi_2/2,\xi_3/3,\cdots,\xi_n/n,0,0,\cdots)$$

T_n是线性有界的，而因此据8.1-4(a)是紧的。进而，

$$\begin{aligned}\|(T-T_n)x\|^2 &= \sum_{j=n+1}^{\infty}|\eta_j|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}|\xi_j|^2 \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{j=n+1}^{\infty}|\xi_j|^2 \leqslant \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

对所有范数等于1的x取上确界，便得到

$$\|T-T_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

因此$T_n \to T$，再据定理8.1-5便知T是紧的。

紧线性算子的另一个有趣而基本的性质是：它把弱收敛序列变换成一个强收敛序列。

8.1-7 定理（弱收敛性） 令X和Y是赋范空间并且T：$X \to Y$是一个紧线性算子。假定(x_n)是X中的弱收敛序列，即$x_n \xrightarrow{w} x$。则(Tx_n)在Y中是强收敛的，并且极限为$y=Tx$。

证明：我们记$y_n=Tx_n$和$y=Tx$。首先证明

$$y_n \xrightarrow{w} y \tag{2}$$

然后证明

$$y_n \to y \tag{3}$$

令g是Y上的任一有界线性泛函。我们用

$$f(z)=g(Tz) \qquad (z \in X)$$

在X上定义泛函f，则f是线性的。因为T是紧的，所以T是有界的，因此f也是有界的，并且有

$$|f(z)|=|g(Tz)| \leqslant \|g\| \ \|Tz\| \leqslant \|g\| \ \|T\| \ \|z\|$$

据弱收敛的定义，$x_n \xrightarrow{w} x$意味着$f(x_n) \to f(x)$。因此据f的定义，有$g(Tx_n) \to g(Tx)$，也就是说，$g(y_n) \to g(y)$。由于g是任意的，这就证明了式（2）。

现证明式（3）。假若式（3）不成立，则对某一$\eta>0$，(y_n)有一子序列(y_{n_k})，使得

$$\|y_{n_k}-y\| \geqslant \eta \tag{4}$$

由于(x_n)是弱收敛的，所以据4.8-3(*c*)知(x_n)是有界的，从而(x_{n_k})也是有界的。据8.1-3，T的紧性意味着(Tx_{n_k})有一收敛的子序列，比如说为$(\tilde{y}_j)$。令$\tilde{y}_j \to \tilde{y}$，毫无疑问，$\tilde{y}_j \xrightarrow{w} \tilde{y}$。因此据（2）和4.8-3(*b*)，$\tilde{y}=y$。因此由式（4）有

$$\|\tilde{y}_j-y\| \to 0 \qquad 但 \qquad \|\tilde{y}_j-y\| \geqslant \eta>0$$

这便产生了矛盾。所以式（3）必然成立。

习　题

1．证明任一赋范空间上的零算子是紧的。

2．若T_1和T_2是从赋范空间X到赋范空间Y的紧线性算子，证明T_1+T_2是紧线性算子。从而证明，从X到Y的紧线性算子构成$B(X,Y)$的一个子空间$C(X,Y)$。

3．若Y是一个巴拿赫空间，证明习题2中的$C(X,Y)$是$B(X,Y)$中的一个闭子集。

4．若Y是一个巴拿赫空间，证明习题2中的$C(X,Y)$是一个巴拿赫空间。

5．在课文中曾证明，如果用强算子收敛性代替一致算子收敛性，则定理8.1-5将变成不真。证明：为了证明这一事实在那里所利用的算子T_n是有界的。

6．值得注意的是：在不改变紧线性算子的概念的前提下，8.1-1中的条件可以减弱。事实上，可以证明：线性算子T：$X \to Y$（X，Y是赋范空间）是紧的，当且仅当X中的单位球

M的象$T(M)$在Y中是相对紧的。

7. 证明：线性算子$T: X \to X$是紧的，当且仅当对范数不超过1的矢量所构成的每一个序列(x_n)，序列(Tx_n)都有一个收敛的子序列。

8. 若z是赋范空间X的一个固定元，并且$f \in X'$，证明算子$T: X \to X$是紧的，其中T被定义为$Tx = f(x)z$。

9. 若X是一个内积空间，证明：对于固定的y和z，$Tx = \langle x, y \rangle z$在$X$上定义了一个紧线性算子。

10. 令Y是一个巴拿赫空间，且令$T_n: X \to Y$，$n = 1, 2, \cdots$，是有限秩的算子。若(T_n)是一致算子收敛的，证明它的极限算子是紧的。

11. 证明：一个希尔伯特空间H到它的一个有限维子空间上的投影是紧的。

12. 证明：由$Tx = y = (\eta_i)$，其中$\eta_i = \xi_i / 2^i$，所定义的$T: l^2 \to l^2$是紧的。

13. 证明：由$y = (\eta_j) = Tx$，$\eta_j = \xi_j / j$，所定义的$T: l^p \to l^p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$是紧的。

14. 证明：由$y = (\eta_j) = Tx$，$\eta_j = \xi_j / j$，所定义的$T: l^\infty \to l^\infty$是紧的。

15. **(连续映射)** 若$T: X \to Y$是一个从度量空间X到度量空间Y的连续映射，证明：一个相对紧集$A \subset X$的象是相对紧的。

§8.2 紧线性算子的其他性质

在这一节我们来证明，赋范空间上的紧线性算子有可分的值域和紧的伴随算子。这些性质对于从下一节开始的紧线性算子的谱研究是必需的。

我们把这一研究建立在两个相关的概念上，而这两个相关的概念对于研究集合的紧性也是具有一般意义的。

8.2-1 定义（ε-网，完全有界性） 令B是度量空间X的一个子集，且$\varepsilon > 0$是给定的。若对每一个点$z \in B$，都有一点属于集合$M_\varepsilon \subset X$，它到z的距离小于ε，则称集合M_ε是B的一个ε-网。若对每个$\varepsilon > 0$，B都有一个有限的ε-网$M_\varepsilon \subset X$，则称集合B是完全有界的。这里的"有限"是指M_ε为有限集合（即由有限多点所组成）。

因此，B的完全有界性意味着，对每个给定的$\varepsilon > 0$，集合B都含在有限多个半径为ε的开球之并内。

我们可以看出，这个概念的重要和有效性正象下面的引理所确定的那样，而这个引理在本节的证明中也起着关键的作用。

8.2-2 引理（完全有界性） 令B是度量空间X的一个子集。则有

(a) 若B是相对紧的，则B是完全有界的。

(b) 若B是完全有界的且X是完备的，则B是相对紧的。

(c) 若B是完全有界的，则对每个$\varepsilon > 0$，它都有一个有限的ε-网$M_\varepsilon \subset B$。

(d) 若B是完全有界的，则B是可分的。

证明：(a) 我们假定B是相对紧的，来证明对任意给定的$\varepsilon_0 > 0$，都存在B的一个有限的ε_0-网。若$B = \phi$，则ϕ便是B的一个ε_0-网。若$B \neq \phi$，则任取$x_1 \in B$，如果对所有的$z \in B$都有$d(x_1, z) < \varepsilon_0$，$\{x_1\}$便是$B$的一个$\varepsilon_0$-网。否则，设$x_2 \in B$是不满足$d(x_1, x_2) < \varepsilon_0$

的，即使得 $d(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon_0$。这时如果对一切 $z\in B$ 都有

$$d(x_j,z)<\varepsilon_0 \qquad (j=1\text{ 或 }2) \tag{1}$$

则 $\{x_1,x_2\}$ 便是 B 的一个 ε_0-网。如果不是这样，再令 $z=x_3\in B$ 是不满足（1）的点。若对一切 $z\in B$ 都有

$$d(x_j,z)<\varepsilon_0 \qquad (i=1,\ 2\text{ 或 }3)$$

则 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 便是 B 的一个 ε_0-网。否则，继续选取 $x_4\in B$ 等等。我们可以断言，存在着正整数 n，使得在如此这般地做了 n 步之后，便得到 B 的一个 ε_0-网 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。事实上，如果不存在这样的 n，我们的构造过程便给出一个满足

$$d(x_j,x_k)\geqslant\varepsilon_0 \qquad j\neq k$$

的序列 (x_j)。很显然 (x_j) 不能够有柯西子序列。因此 (x_j) 在 X 中不能够有收敛的子序列。但根据构造过程知 (x_j) 是 B 中的序列，这便与 B 的相对紧性矛盾。因此 B 一定有有限的 ε_0-网。由于 $\varepsilon_0>0$ 是任意的，故证明了 B 是完全有界的。

（b）设 B 是完全有界的且 X 是完备的，来证明 B 是相对紧的。为此，我们考察 B 中的任一序列 (x_n)，并证明它在 X 中有收敛的子序列，从而证明了 B 是相对紧的。据假设，B 有一个有限的网 ε-网，这里取 $\varepsilon=1$。因此，B 含在有限多个半径为 1 的开球之并内。从这些球中我们能够找出一个球 B_1，它含有 (x_n) 的无穷多项。令 $(x_{1,n})$ 是 (x_n) 的落在 B_1 中的子序列。同理，据假设 B 也含在有限多个半径为 $\varepsilon=1/2$ 的开球之并内，从这些球中我们能够找出一个球 B_2，它含有子序列 $(x_{1,n})$ 的一个子序列 $(x_{2,n})$。依此类推，选取 $\varepsilon=1/3$ $1/4,\cdots$ 并令 $y_n=x_{n,n}$。则对每一个给定的 $\varepsilon>0$，都存在一个 N（与 ε 有关），使得当 $n>N$ 时所有的 y_n 都落在半径为 ε 的球内。因此说明 (y_n) 是一个柯西序列。由于 X 是完备的，故它在 X 中是收敛的，不妨设，$y_n\to y\in X$，并且可从 $y_n\in B$ 推出 $y\in\bar{B}$。据闭包的定义，对 $\bar{B}$ 中的每一个序列 (z_n)，在 B 中都有一个序列 (x_n)，使得对每个 n，都有 $d(x_n,z_n)\leqslant\frac{1}{n}$。由于 (x_n) 落在 B 中，正象上面证明的那样，它有一个在 $\bar{B}$ 中收敛的子序列，由于 $d(x_n,z_n)\leqslant\frac{1}{n}$，故 (z_n) 也有一个在 $\bar{B}$ 中收敛的子序列。从而证明了 $\bar{B}$ 是紧的，而 B 是相对紧的。

（c）在 $B=\phi$ 的情况下，结论显然是对的。设 $B\neq\phi$。据假设，在 $\varepsilon>0$ 给定后，取 $\varepsilon_1=\varepsilon/2$，则 B 有一个有限的 ε_1-网 $M_{\varepsilon_1}\subset X$，因此 B 含在有限多个半径为 ε_1 的开球之并内，并且这些开球的球心是 M_{ε_1} 的元。特别取其中与 B 相交的那些开球 B_1，$B_2,\cdots,B_n$，并设它们的球心分别为 x_1，$x_2,\cdots,x_n$。我们选取一点 $z_j\in B\cap B_j$，见图 63。则 $\tilde{M}_\varepsilon=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}\subset B$ 且是 B 的一个 ε-网，这是因为，对每个 $z\in B$，都有一个含有 z 的 B_j，且满足

$$d(z,z_j)\leqslant d(z,x_j)+d(x_j,z_j)<\varepsilon_1+\varepsilon_1=\varepsilon$$

（d）假定 B 是完全有界的，根据（c），集合 B 含有自己的一个有限 ε-网 $M_{1/n}$，其中 $\varepsilon=\varepsilon_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$。所有这些网的并 M 是可数的，并且在 B 中是稠密的。事实上，对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在一个 n，使得 $\frac{1}{n}<\varepsilon$；因此对任一 $z\in B$，都存在一个 $a\in M_{1/n}\subset M$，使得

$d(z,a)<\varepsilon$。这就证明了B是可分的。

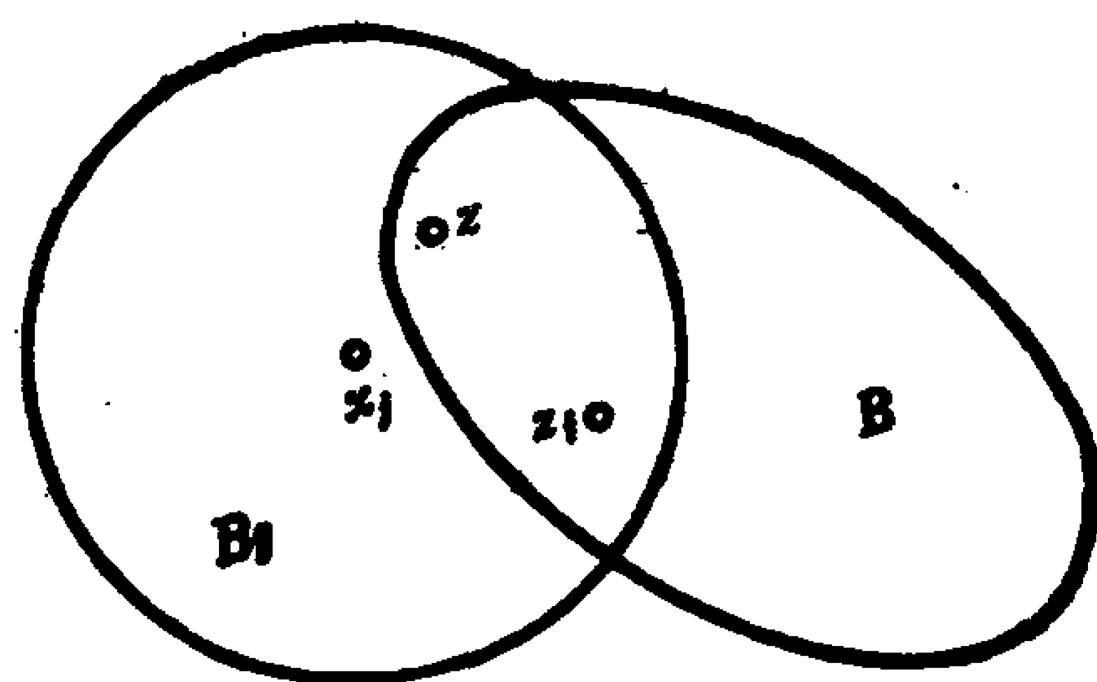


图63 引理8.2-2(c)的证明的表示

完全有界性蕴含着有界性。但反过来一般是不成立的。

实际上，前一个论断几乎是明显的。至于第二个论断，若注意到闭单位球 $U=\{x \mid \|x\|\leqslant 1\}\subset l^2$ 是有界的，但由于 l^2 是无穷维的完备空间，所以U 不是紧的（见 2.5-5），再根据 8.2-2(b)，它不是完全有界的，便得到了证明。

引理 8.2-2 包括了我们的进一步研究所需要的一些性质。而其它的一些虽有意义但暂不需要的性质，我们把它们放在习题集中叙述，特别是习题 2 至习题 4。

利用上述引理，能够很容易地证明下面的定理。

8.2-3 定理（值域的可分性） 设X和Y是赋范空间。则紧线性算子T：$X\to Y$的值域$\mathscr{R}(T)$是可分的。

证明：考察球$B_n=B(0;\ n)\subset X$。由于T是紧的，所以象$C_n=T(B_n)$是相对紧的。据引理 8.2-2 C_n是可分的。而由于任一$x\in X$的范数都是有限的，故对足够大的n，有$\|x\|<n$，因此$x\in B_n$。因而

$$(a)\ X=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,\quad (b)\quad T(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}T(B_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n \tag{2}$$

由于C_n是可分的，所以它有一个可数的稠密子集D_n，并且并集

$$D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$$

也是可数的，(2b)表明D在值域$\mathscr{R}(T)=T(X)$中是稠密的。

在下一个定理中，我们将证明赋范空间X上的紧线性算子能够延拓到X的完备化上，并且延拓后的算子仍是线性的紧算子。

8.2-4 定理（紧延拓） 从赋范空间X到巴拿赫空间Y的紧线性算子T：$X\to Y$有一个紧线性延拓$\hat{T}$：$\hat{X}\to Y$，其中$\hat{X}$是X的完备化（见 2.3-2）。

证明：我们可以把X看作为$\hat{X}$的一个子空间；见定理 2.3-2。由于T是有界的（见 8.1-2），故它有一个有界线性延拓$\hat{T}$：$\hat{X}\to Y$见 2.7-11。我们来证明T的紧性蕴含着$\hat{T}$也是紧的。为此，我们考察$\hat{X}$中的任一有界序列$(\hat{x}_n)$，并证明$(\hat{T}\hat{x}_n)$有收敛的子序列。

由于X在$\hat{X}$中是稠密的，故在X中有序列(x_n)使得$\hat{x}_n-x_n\to 0$。显然，(x_n)也是有界的。由于T是紧的，(Tx_n)有收敛的子序列(Tx_{n_k})令

$$Tx_{n_k}\to y_0\in Y \tag{3}$$

而$\hat{x}_n-x_n\to 0$蕴含着$\hat{x}_{n_k}-x_{n_k}\to 0$。由于$\hat{T}$是线性有界的，故它是连续的。因而得到（见 1.4-8）

$$\hat{T}\hat{x}_{n_k}-Tx_{n_k}=\hat{T}(\hat{x}_{n_k}-x_{n_k})\to\hat{T}0=0$$

根据（3）这意味着$\tilde{T}x_{n_k}\to y_0$。从而证明了任意有界序列(x_n)都有一个子序列(x_{n_k})使得$(\tilde{T}x_{n_k})$收敛。这就据8.1-3证明了$\tilde{T}$的紧性。

在本章稍后将会看到，在实用上和理论上都极为重要的算子方程中经常出现紧线性算子。关于这些方程的可解性理论，本质上要利用伴随算子。而在这方面最有决定意义的是这样一个事实：紧线性算子的伴随算子本身是紧的。让我们证明紧线性算子的这一重要性质，而在下一节我们来讨论这些算子的谱。

8.2-5 定理（伴随算子） 设T：$X\to Y$是一个线性算子。若T是紧的，则其伴随算于$T^{\times}$：$Y'\to X'$也是紧的；其中X和Y是赋范空间，而X'和Y'分别是它们的对偶空间（见2.10-3）。

证明：我们考察Y'中的任一有界子集B，不妨设对所有的$g\in B$有

$$\|g\|\leqslant c$$

并证明其象$T^{\times}(B)\subset X'$是完全有界的，从而据8.2-2(b)便证明了$T^{\times}(B)$是相对紧的，因为X'是完备的（见2.10-4）。

因此，我们必须证明：对任意固定的$\varepsilon_0>0$，象$T^{\times}(B)$有一个有限的ε_0-网。由于T是紧的，单位球

$$U=\{x\in X \mid \|x\|\leqslant 1\}$$

的象$T(U)$是相对紧的。由8.2-2(a)可知$T(U)$是完全有界的。从8.2-2(c)可推得$T(U)$有一个有限的ε_1-网$M\subset T(U)$，其中$\varepsilon_1=\varepsilon_0/4c$。这就意味着$U$含有点$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得对每个$x\in U$都满足

$$\|Tx-Tx_j\|<\frac{\varepsilon_0}{4c},\quad \text{对某个}j; \tag{4}$$

现在我们用

$$Ag=(g(Tx_1),\ g(Tx_2),\cdots,g(Tx_n)) \tag{5}$$

定义一个线性算子A：$Y'\to R^n$据假设g是有界的，而据8.1-2$(a)$$T$也是有界的。因此据8.1-4知$A$是紧的。由于$B$是有界的，故$A(B)$是相对紧的。因此根据8.2-2$(a)$知$A(B)$是完全有界的。据8.2-2$(c)$知$A(B)$含有一个自己的有限的$\varepsilon_2$-网$\{Ag_1,\cdots,Ag_m\}$，其中$\varepsilon_2=\varepsilon_0/4$。这就意味着对每个$g\in B$都满足

$$\|A_g-A_{g_k}\|_0<\frac{1}{4}\varepsilon_0\qquad \text{对某个}\ k \tag{6}$$

其中$\|\cdot\|_0$是R^n上的范数。我们将证明，$\{T^{\times}g_1,\cdots,T^{\times}g_m\}$就是所希望的$T^{\times}(B)$的$\varepsilon_0$-网；从而就完成了定理的证明。

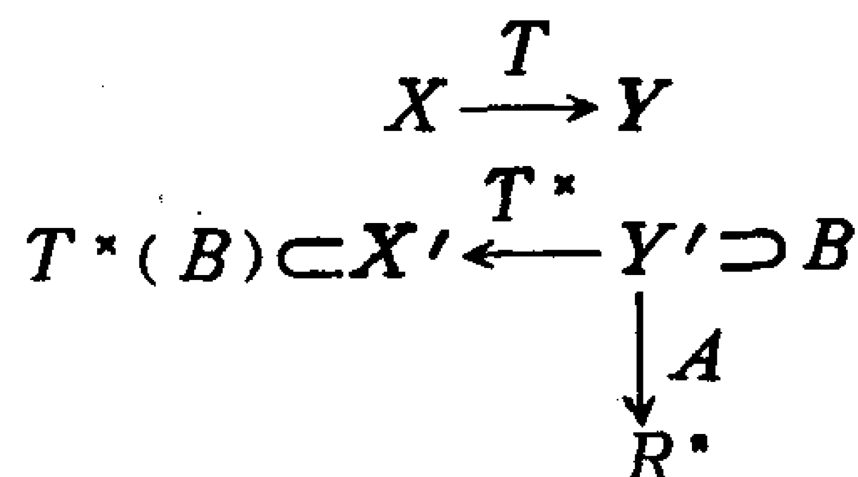


图64　定理8.2-5的证明的表示

从式（5）和式（6）我们立即可以看出，对每个 j 和每个 $g\in B$，都存在一个 k 使得

$$
\begin{aligned}
|g(Tx_j)-g_k(Tx_j)|^2 &\leqslant \sum_{j=1}^{n}|g(Tx_j)-g_k(Tx_j)|^2\\
&=\|A(g-g_k)\|_0^2\\
&<\left(\frac{1}{4}\varepsilon_0\right)^2
\end{aligned}
\tag{7}
$$

设 $x\in U$ 是任意的。则存在一个使式（4）成立的 j。设 $g\in B$ 是任意的。则存在一个使式（6）成立的 k，并且对于这个 k 和每个 j，式（7）是成立的。从而得到

$$
\begin{aligned}
|g(Tx)-g_k(Tx)| &\leqslant |g(Tx)-g(Tx_j)|+|g(Tx_j)-g_k(Tx_j)|\\
&\quad+|g_k(Tx_j)-g_k(Tx)|\\
&<\|g\|\,\|Tx-Tx_j\|+\frac{\varepsilon_0}{4}+\|g_k\|\,\|Tx_j-Tx\|\\
&\leqslant c\frac{\varepsilon_0}{4c}+\frac{\varepsilon_0}{4}+c\frac{\varepsilon_0}{4c}<\varepsilon_0
\end{aligned}
$$

由于这个不等式对每个 $x\in U$ 都成立，并且据 $T^\times$ 的定义有 $g(Tx)=(T^\times g)(x)$，故最后可得

$$
\begin{aligned}
\|T^\times g-T^\times g_k\| &= \sup_{\|x\|=1}|(T^\times(g-g_k))(x)|\\
&=\sup_{\|x\|=1}|g(Tx)-g_k(Tx)|<\varepsilon_0
\end{aligned}
$$

这就证明了 $\{T^\times g_1, T^\times g_2,\cdots,T^\times g_m\}$ 是 $T^\times(B)$ 的一个 ε_0-网。由于 $\varepsilon_0>0$ 是任意的，所以 $T^\times(B)$ 是完全有界的，因此据 8.2-2(*b*) 知它是相对紧的。又由于 B 是 Y' 的任意有界子集，据定义 8.1-1，这就证明了 $T^\times$ 是紧的。

习　题

1．设 X 是一个完全有界的度量空间。试证：每个无限子集 $Y\subset X$ 都有一个直径小于给定的 $\varepsilon>0$ 的无限子集 Z。

2．若度量空间 X 是紧的，证明 X 是完备的。并证明完备性不蕴含紧性。

3．举例说明，对于紧性而言，完全有界性是必要的，但不是充分的。

4．证明：度量空间 X 是紧的，当且仅当 X 是完备的和完全有界的。

5．若度量空间 (X,d) 是紧的。证明：对任意的 $\varepsilon>0$，空间 X 都有一个有限子集 M，使得每个点 $x\in X$ 到 M 的距离 $\delta(x,M)=\inf\limits_{y\in M}d(x,y)<\varepsilon$。

6．用 $Tx=y=(\eta_j)$ 定义算子 T：$l^2\to l^2$，其中 $x=(\xi_j)$，并且

$$
\eta_j=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{jk}\xi_k\quad,\qquad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{jk}|^2<\infty
$$

证明 T 是紧的（利用 8.1-5）。

7．证明：习题 6 中定义的那种算子构成了 $B(l^2,l^2)$ 的一个子空间。举例说明习题 6 中的条件对紧性来说是充分的，而不是必要的。

8. 是否存在满射的紧线性算子T: $l^\infty \to l^\infty$?

9. 若$T \in B(X,Y)$不是紧的，T在X的一个无限维子空间上的限制能否是紧的?

10. 设 (λ_n) 是一个标量序列，且当 $n\to\infty$ 时有 $\lambda_n\to 0$。用$Tx = y = (\eta_j)$ 定义算子T: $l^2 \to l^2$，其中 $x = (\xi_j)$且 $\eta_j = \lambda_j\xi_j$。证明T是紧的。

§8.3 赋范空间上的紧线性算子的谱性质

在这一节和下一节，我们讨论赋范空间X上的紧线性算子T: $X\to X$的谱性质。为此，我们将再一次利用算子

$$T_\lambda = T - \lambda I, \qquad \lambda \in c \tag{1}$$

和§7.2中所定义的谱理论的基本概念。

紧线性算子的谱理论是有限矩阵的特征值理论（§7.1）的一个较为简单的推广，并且在很多方面都和有限维的情况相似。这可从下面对§8.3和§8.4概括的摘要看出来。这个摘要为读者提供了一个指南，以便从详尽的证明中找到方向。在这个摘要中，我们也给出了对应的定理（其在课文中的次序是按证明的相互依赖关系来安排的）。

摘要 赋范空间X上紧线性算子T: $X\to X$有下述性质。

T的特征值的集合是可数的（或许是有限的，甚或是空集）。（见§8.3-1）

$\lambda = 0$是特征值集合唯一可能的聚点。（见8.3-1）

每一个谱值$\lambda \neq 0$都是一个特征值。（见8.4-4）若X是无穷维的，则$0\in\sigma(T)$。

T的关于$\lambda\neq 0$的任何特征空间的维数都是有限的。（见8.3-3）

对于$\lambda\neq 0$，T_λ，T_λ^2，T_λ^3，…的零空间都是有限维（见8.3-3，8.3-4），并且这些算子的值域都是闭的（见8.3-5，8.3-6）。

存在一个（依赖于$\lambda, \lambda\neq 0$）的数r，使得

$$X = \mathscr{N}(T_\lambda^r) \oplus T_\lambda^r(X)$$

（见8.4-5）；此外，零空间还满足

$$\mathscr{N}(T_\lambda^r) = \mathscr{N}(T_\lambda^{r+1}) = \mathscr{N}(T_\lambda^{r+2}) = \cdots$$

并且值域满足

$$T_\lambda^r(X) = T_\lambda^{r+1}(X) = T_\lambda^{r+2}(X) = \cdots$$

（见8.4-3）；若$r>0$，有真包含关系（见8.4-3）

$$\mathscr{N}(T_\lambda^0) \subset \mathscr{N}(T_\lambda) \subset \cdots \subset \mathscr{N}(T_\lambda^r)$$

和

$$T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset \cdots \supset T_\lambda^r(X)$$

我们的第一个定理是关于特征值的。它告诉我们：紧线性算子的点谱不是很复杂的。我们马上就会看到，这个定理还要强得多。事实上，在下一节我们将会看到，紧线性算子所有可能（或者没有！）的每个谱值$\lambda\neq 0$都是一个特征值。这就表明了紧线性算子的谱在很大

程度上与有限维空间上的算子极为相象。

8.3-1 定理（特征值） 赋范空间X上的紧线性算子T：$X \to X$的特征值的集合是可数的（或许是有限的，甚或是空集），并且$\lambda = 0$是这个集合唯一可能的聚点。

证明：显然，只要证明对每个实数$k>0$，满足$|\lambda| \geqslant k$的所有$\lambda \in \sigma_p(T)$的集合是有限的就够了。

假定对某一个$k_0>0$不是这样，则存在无穷多个不同特征值构成的序列(λ_n)满足$|\lambda_n| \geqslant k_0$。对某一$x_n \neq 0$有$Tx_n = \lambda_n x_n$。由定理7.4-3，所有这些$x_n$的集合是线性无关的。设$M_n = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$，则每个$x \in M_n$都有唯一的表示

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

我们用$T - \lambda_n I$作用于上式两端并利用$Tx_j = \lambda_j x_j$：

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1}$$

可以看出x_n在右端不再出现，因此对一切$x \in M_n$

$$(T - \lambda_n I)x \in M_{n-1} \qquad \text{对一切 } x \in M_n \tag{2}$$

M_n是闭的（见2.4-3）。根据黎斯引理2.5-4，存在序列(y_n)满足

$$y_n \in M_n, \quad \|y_n\| = 1, \quad \text{对一切 } x \in M_{n-1}, \quad \|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}$$

如果我们能证明

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geqslant \frac{1}{2}k_0 \qquad n>m \tag{3}$$

则由于$k_0>0$，便说明(Ty_n)没有收敛的子序列。而又由于(y_n)是有界的，故与T的紧性发生矛盾。从而说明反设不真，定理便获得证明。

通过加一项和减一项的办法，有

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - \tilde{x}, \qquad \tilde{x} = \lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m \tag{4}$$

设$m<n$。现证$\tilde{x} \in M_{n-1}$。由于$m \leqslant n-1$，可以看出$y_m \in M_m \subset M_{n-1} = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$。因此由于$Tx_j = \lambda_j x_j$知$Ty_m \in M_{n-1}$。根据（2）有

$$\lambda_n y_n - Ty_n = -(T - \lambda_n I)y_n \in M_{n-1}$$

合在一起，便知$\tilde{x} \in M_{n-1}$。从而也有$x = \lambda_n^{-1}\tilde{x} \in M_{n-1}$，所以据$|\lambda_n| > k_0$得

$$\|\lambda_n y_n - \tilde{x}\| = |\lambda_n| \|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_n| \geqslant \frac{1}{2}k_0 \tag{5}$$

由此和式（4）便得到式（3）。因此对某个$k_0 \geqslant 0$存在无限多个特征值满足$|\lambda_n| \geqslant k_0$，这个假定不真，故定理得证。

这个定理表明了，若赋范空间上的紧线性算子有无穷多个特征值，则能够将这些特征值排成一个收敛到零的序列。

紧线性算子和有界线性算子的合成也是一个紧线性算子。这个有趣的事实正是下面引理

所要证明的内容，它有很多应用，而目前我们要利用它去证明紧线性算子的一个基本性质（8.3-4）。

8.3-2 引理（积的紧性） 设$T: X\to X$是赋范空间X上的一个紧线性算子，而$S: X\to X$是一个有界线性算子，则TS和ST都是紧的。

证明：设$B\subset X$是任一有界集。由于S是有界算子，故$S(B)$是一个有界集合。又因为T是紧的，故集合$T(S(B))=TS(B)$是相对紧的。因此TS是一个紧线性算子。

现在证明ST也是紧的。设(x_n)是X中任一有界序列，则据8.1-3(Tx_n)有一个收敛的子序列(Tx_{n_k})，而据1.4-8知(STx_{n_k})也是收敛的。因此据8.1-3知ST是紧的。

这就是本章一开始所申明的，紧线性算子的谱理论几乎象有限维空间上的线性算子（基本上是有限矩阵的特征值理论；见§7.1）那样简单。支撑这个论点的一个重要性质是，对于紧线性算子可能有（也可能没有）的每一个非零特征值，其对应的特征空间都是有限维的。事实上，这一性质蕴含在下述定理之中。

8.3-3 定理（零空间） 设$T: X\to X$是赋范空间X上的紧线性算子，则对每个$\lambda\neq 0$，算子$T_\lambda=T-\lambda I$的零空间$\mathscr{N}(T_\lambda)$都是有限维的。

证明：我们先证明$\mathscr{N}(T_\lambda)$中的闭单位球M是紧的，然后再应用定理2.5-5。

设(x_n)是M中的序列，则(x_n)是有界的（$\|x\|\leqslant 1$），并且据8.1-3知(Tx_n)有一收敛的子序列(Tx_{n_k})。而$x_n\in M\subset\mathscr{N}(T_\lambda)$意味着$T_\lambda x_n=Tx_n-\lambda x_n=0$，所以从$\lambda\neq 0$可推知$x_n=\lambda^{-1}Tx_n$。因此，$(x_{n_k})=(\lambda^{-1}Tx_{n_k})$也是收敛的。由于$M$是闭的，故它的极限也属于$M$。因为$(x_n)$是在$M$中任取的，所以据定义2.5-1知$M$是紧的。根据2.5-5便证明了$\dim\mathscr{N}(T_\lambda)<\infty$。

8.3-4 推论（零空间） 在定理8.3-3中，

$$\dim\mathscr{N}(T_\lambda{}^n)<\infty,\qquad n=1,2,\cdots \tag{6}$$

并且

$$\{0\}=\mathscr{N}(T_\lambda{}^0)\subset\mathscr{N}(T_\lambda)\subset\mathscr{N}(T_\lambda{}^2)\subset\cdots \tag{7}$$

证明：由于T_λ是线性的，故它映0到0上（见§2.6式（8））。因此$T_\lambda{}^n x=0$蕴含着$T_\lambda{}^{n+1}x=0$，从而式（7）获得。

现证式（6）。根据二项式定理

$$\begin{aligned}T_\lambda{}^n=(T-\lambda I)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^k(-\lambda)^{n-k}\\&=(-\lambda)^n I+T\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}T^{k-1}(-\lambda)^{n-k}\end{aligned}$$

从而可把$T_\lambda{}^n$写为

$$T_\lambda{}^n=W-\mu I,\qquad \mu=-(-\lambda)^n$$

其中$W=TS=ST$，S表示右端的和式。T是紧的，据8.1-2(*a*)T是有界的，故S也是有界的。因此据引理8.3-2知W是紧的。所以把定理8.3-3应用到$W-\mu I$，便得到式（6）。

对于紧线性算子T和任一$\lambda\neq 0$，我们来考察算子T_λ，$T_\lambda{}^2$，… 的值域。首先要记住，有界线性算子的零空间总是闭的，而其值域却未必是闭的〔见2.7-10(*b*)和§2.7中的习题6〕。

然而，若T是紧的，则对每个$\lambda \neq 0$，T_λ有闭值域，并且对T_λ^2，T_λ^3，… 也是如此。首先证明T_λ的值域是闭的。然后，可立即把这个结论推广到T_λ^n，$n \in N$。

8.3-5 定理（值域） 设$T: X \to X$是赋范空间X上的紧线性算子，则对每个$\lambda \neq 0$，算子$T_\lambda = T - \lambda I$的值域是闭的。

证明：采取反证法。我们假定值域$T_\lambda(X)$不是闭的，并由此推导出矛盾。证明的思路如下：

(a) 我们考察$T_\lambda(X)$的闭包中的一个y，而且y不属于$T_\lambda(X)$，以及收敛到y的一个序列$(T_\lambda x_n)$。我们将证明$x_n \notin \mathscr{N}(T_\lambda)$，但$\mathscr{N}(T_\lambda)$含有一个满足$\|x_n - z_n\| < 2\delta_n$的序列$(z_n)$，其中$\delta_n = D(x_n, \mathscr{N}(T_\lambda))$表示$x_n$到$\mathscr{N}(T_\lambda)$的距离。

(b) 再证明$a_n = \|x_n - z_n\| \to \infty$。

(c) 最后令$w_n = a_n^{-1}(x_n - z_n)$，考察序列$(w_n)$便能得到预期的矛盾。

详细的证明如下。

(a) 假定$T_\lambda(X)$不是闭的，则存在一个$y \in \overline{T_\lambda(X)}$且$y \notin T_\lambda(X)$，并且在$X$中有序列$(x_n)$满足

$$y_n = T_\lambda x_n \to y \tag{8}$$

由于$T_\lambda(X)$是一个矢量空间，故$0 \in T_\lambda(X)$，但由于$y \notin T_\lambda(X)$，所以$y \neq 0$。这就意味着对所有充分大的n有$y_n \neq 0$和$x_n \notin \mathscr{N}(T_\lambda)$。不失一般性，我们可以假定对所有的$n$这一事实都是成立的。由于$\mathscr{N}(T_\lambda)$是闭的，故$x_n$到$\mathscr{N}(T_\lambda)$的距离$\delta_n$是正的。即

$$\delta_n = \inf_{z \in \mathscr{N}(T_\lambda)} \|x_n - z\| > 0$$

根据下确界的定义，在$\mathscr{N}(T_\lambda)$中存在序列(z_n)满足

$$a_n = \|x_n - z_n\| < 2\delta_n \tag{9}$$

(b) 我们来证明

$$a_n = \|x_n - z_n\| \to \infty \qquad (n \to \infty) \tag{10}$$

假若式（10）不成立，则$(x_n - z_n)$有一个有界的子序列。由于T是紧的，据8.1-3知$(T(x_n - z_n))$有一个收敛的子序列。而由$T_\lambda = T - \lambda I$及$\lambda \neq 0$可得$I = \lambda^{-1}(T - T_\lambda)$，利用$T_\lambda z_n = 0$〔记住$z_n \in \mathscr{N}(T_\lambda)$〕，从而得到

$$\begin{aligned} x_n - z_n &= \lambda^{-1}(T - T_\lambda)(x_n - z_n) \\ &= \lambda^{-1}[T(x_n - z_n) - T_\lambda x_n] \end{aligned}$$

$(T(x_n - z_n))$有收敛的子序列，并且据式(8)$(T_\lambda x_n)$是收敛的；因此，$(x_n - z_n)$有收敛的子序列，不妨设$x_{n_k} - z_{n_k} \to v$。由于T是紧的，故T和T_λ都是连续的。因此从定理1.4-8得知

$$T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) \to T_\lambda v$$

其中因为$z_n \in \mathscr{N}(T_\lambda)$故有$T_\lambda z_{n_k} = 0$，所以据式（8）又有

$$T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) = T_\lambda x_{n_k} \to y$$

因此$T_\lambda v=y$。因而$y\in T_\lambda(X)$，这与$y\notin T_\lambda(X)$矛盾，见(a)的证明。这个矛盾是由于我们假设（10）不成立而导致的，故式（10）被证明。

（c）再利用式（10）中定义的a_n，并令

$$w_n=a_n^{-1}(x_n-z_n) \tag{11}$$

则有$\|w_n\|=1$。由于$a_n\to\infty$，而$T_\lambda z_n=0$和（$T_\lambda x_n$）收敛，故推出

$$T_\lambda w_n=a_n^{-1}T_\lambda x_n\to 0 \tag{12}$$

再利用$I=\lambda^{-1}(T-T_\lambda)$，便得到

$$w_n=\lambda^{-1}(Tw_n-T_\lambda w_n) \tag{13}$$

由于T是紧的和（w_n）是有界的，故（Tw_n）有收敛的子序列。此外，据(12)知（$T_\lambda w_n$）收敛，因此(13)表明(w_n)有收敛的子序列，不妨设

$$w_{n_j}\to w \tag{14}$$

与式（12）比较便推出$T_\lambda w=0$。因此$w\in\mathscr{N}(T_\lambda)$。由于$z_n\in\mathscr{N}(T_\lambda)$，又

$$u_n=z_n+a_nw\in\mathscr{N}(T_\lambda)$$

因此从x_n到u_n的距离应该有

$$\|x_n-u_n\|\geqslant\delta_n$$

把u_n代入并利用式（11）和式（9），便得到

$$\begin{aligned}\delta_n&\leqslant\|x_n-z_n-a_nw\|\\&=\|a_nw_n-a_nw\|\\&=a_n\|w_n-w\|\\&<2\delta_n\|w_n-w\|\end{aligned}$$

用$2\delta_n>0$去除不等号两端，便有$\frac{1}{2}<\|w_n-w\|$。这与(14)发生矛盾，从而证明了定理。

8.3-6 推论（值域） 在定理8.3-5的假设下，对每个$n=0,1,2,\cdots$，T_λ^n的值域都是闭的。进而还有

$$X=T_\lambda^0(X)\supset T_\lambda(X)\supset T_\lambda^2(X)\supset\cdots$$

证明：注意到在8.3-4的证明中W是紧的，便可从定理8.3-5推出第一个论断。而用归纳法可证明第二个论断。事实上，$T_\lambda^0(X)=I(X)=X\supset T_\lambda(X)$，再把$T_\lambda$作用在$T_\lambda^{n-1}(X)\supset T_\lambda^n(X)$两端便有$T_\lambda^n(X)\supset T_\lambda^{n+1}(x)$。

习 题

1. 假定对某一正整数p，T^p是一个紧线性算子，证明定理8.3-1。

2. 设X，Y和Z是赋范空间，且T_1：$X\to Y$和T_2：$Y\to Z$。若T_1和T_2是紧线性算子，证明：T_2T_1：$X\to Z$也是紧线性算子。

3. 若T是紧线性算子，证明：对任意给定的数$k>0$，对应于绝对值大于k的特征值，T至多存在有限多个线性无关的特征矢量。

4. 设T_j: $X_j \to X_{j+1}$，$j=1,2,3$，是赋范空间上的有界线性算子。若T_2是紧的，证明$T=T_3T_2T_1$: $X_1 \to X_4$是紧的。

5. 在引理8.3-2中基于有界序列给予$T\ S$的紧性的证明。

6. 设H是一个希尔伯特空间，T: $H \to H$是一个有界线性算子，T^*是T的希尔伯特伴随算子。证明：T是紧的，当且仅当T^*T是紧的。

7. 若习题6中的T是紧的，证明T^*也是紧的。

8. 若无穷维赋范空间X上的紧线性算子T: $X \to X$关于整个X有一个逆，证明这个逆不可能是有界的。

9. 用黎斯引理2.5-4（代替定理2.5-5）证明定理8.3-3。

10. 在较弱的假设下：对某一个$p\in N$，T^p是一个紧线性算子，证明定理8.3-3（用习题9中的证明）。

11. 用一个简单的例子说明，在定理8.3-3中T是紧的和$\lambda\neq 0$这些条件是不能省略的。

12. 若X是希尔伯特空间，给出定理8.3-3的另外一种证明。

13. 在较弱的假设下：对一个$p\in N$，T^p是紧线性算子，来证明推论8.3-4。

14. 设T: $X\to X$是赋范空间X上的紧线性算子。若$\dim X=\infty$，证明$0\in\sigma(T)$。

15. 设T: $l^2\to l^2$是用$y=(\eta_j)=Tx$，$x=(\xi_j)$，$\eta_{2k}=\xi_{2k}$，$\eta_{2k-1}=0$，$k=1,2,\cdots$来定义的。试求$\mathscr{N}(T_\lambda^n)$。并问：T是紧的吗？

§8.4 紧线性算子的其他谱性质

从上一节我们知道，对于赋范空间X上的紧线性算子T和$\lambda\neq 0$来说，零空间$\mathscr{N}(T_\lambda^n)$，$n=1,2,\cdots$，都是有限维的，并且满足$\mathscr{N}(T_\lambda^n)\subset\mathscr{N}(T_\lambda^{n+1})$；而值域$T_\lambda^n(X)$都是闭的，并且满足$T_\lambda^n(X)\supset T_\lambda^{n+1}(X)$。

我们还能够进一步地说，从某一个$n=r$开始，所有这些零空间都是相等的（下面的引理8.4-1）；从某一个$n=q$开始，这些值域也是相等的（引理8.4-2），并且$q=r$（定理8.4-3；这里的q和r都是具有上述性质的最小整数）。让我们从下面的引理开始。

8.4-1 引理（零空间） 设T: $X\to X$是赋范空间X上的紧线性算子且$\lambda\neq 0$。则存在一个（依赖于λ的）最小的整数r，使得$n=r$从起，零空间$\mathscr{N}(T_\lambda^n)$都是相等的，并且若$r>0$，包含关系

$$\mathscr{N}(T_\lambda^0)\subset\mathscr{N}(T_\lambda)\subset\cdots\subset\mathscr{N}(T_\lambda^r)$$

都是真正的。

证明：为简单起见，记$\mathscr{N}_n=\mathscr{N}(T_\lambda^n)$。证明的思路如下：

(a) 我们假定没有一个m使得$\mathscr{N}_m=\mathscr{N}_{m+1}$，然后推导出矛盾。以黎斯引理2.5-4作为基本工具。

(b) 再证明$\mathscr{N}_m=\mathscr{N}_{m+1}$意味着对所有的$n>m$有$\mathscr{N}_n=\mathscr{N}_{n+1}$。

详细证明如下。

(a) 据8.3-4知$\mathscr{N}_m \subset \mathscr{N}_{m+1}$。假定不存在一个$m$使得$\mathscr{N}_m = \mathscr{N}_{m+1}$，则对每一个$n$，$\mathscr{N}_n$都是$\mathscr{N}_{n+1}$的一个真子空间。由于这些零空间都是闭的，因而黎斯引理2.5-4意味着存在序列(y_n)满足

$$y_n \in \mathscr{N}_n, \quad \| y_n \| = 1, \quad \| y_n - x \| \geqslant \frac{1}{2} \quad 对一切 x \in \mathscr{N}_{n-1} \tag{1}$$

我们将证明

$$\| T y_n - T y_m \| \geqslant \frac{1}{2} |\lambda| \qquad (m<n) \tag{2}$$

而由于$|\lambda|>0$，所以$(T y_n)$没有收敛的子序列。又由于(y_n)是有界的，这就与T的紧性发生矛盾。

从$T_\lambda = T - \lambda I$可得$T = T_\lambda + \lambda I$，并且

$$T y_n - T y_m = \lambda y_n - \tilde{x}, \quad \tilde{x} = T_\lambda y_m + \lambda y_m - T_\lambda y_n \tag{3}$$

设$m<n$。现在证明$\tilde{x} \in \mathscr{N}_{n-1}$。由于$m \leqslant n-1$，显然有$\lambda y_m \in \mathscr{N}_m \subset \mathscr{N}_{n-1}$。$y_m \in \mathscr{N}_m$还意味着

$$0 = T_\lambda^m y_m = T_\lambda^{m-1}(T_\lambda y_m)$$

即$T_\lambda y_m \in \mathscr{N}_{m-1} \subset \mathscr{N}_{n-1}$。类似的，$y_n \in \mathscr{N}_n$意味着$T_\lambda y_n \in \mathscr{N}_{n-1}$。合在一起，便知$\tilde{x} \in \mathscr{N}_{n-1}$。并且$x = \lambda^{-1}\tilde{x} \in \mathscr{N}_{n-1}$，故由式(1)可得

$$\| \lambda y_n - \tilde{x} \| = |\lambda| \, \| y_n - x \| \geqslant \frac{1}{2} |\lambda|$$

由该式和式(3)便得到式(2)。因此我们关于"没有m使得$\mathscr{N}_m = \mathscr{N}_{m+1}$成立"的假设是不真的。故对某一个$m$必有$\mathscr{N}_m = \mathscr{N}_{m+1}$成立。

(b) 再证明$\mathscr{N}_m = \mathscr{N}_{m+1}$意味着对一切$n>m$都有$\mathscr{N}_n = \mathscr{N}_{n+1}$。假定不是这样，则对某一个$n>m$，$\mathscr{N}_n$是$\mathscr{N}_{n+1}$的一个真子空间。我们考察一个$x \in \mathscr{N}_{n+1} - \mathscr{N}_n$。据定义有

$$T_\lambda^{n+1} x = 0, \quad 但 T_\lambda^n x \neq 0$$

由于$n>m$，故$n-m>0$，令$z = T_\lambda^{n-m} x$，则

$$T_\lambda^{m+1} z = T_\lambda^{n+1} x = 0, \quad 但 T_\lambda^m z = T_\lambda^n x \neq 0$$

因此$z \in \mathscr{N}_{m+1}$，但$z \notin \mathscr{N}_m$，故$\mathscr{N}_m$是$\mathscr{N}_{m+1}$的真子空间。这与$\mathscr{N}_m = \mathscr{N}_{m+1}$矛盾。取$r$为满足$\mathscr{N}_n = \mathscr{N}_{n+1}$的最小的$n$，便证明了第一个论断。因此，若$r>0$，引理中所说的包含关系是真正的。

刚才证明的引理是关于算子T_λ，T_λ^2，…的零空间的，其中T是紧线性算子，$\lambda \neq 0$。让我们来证明，关于这些算子的值域也有类似的论断。

8.4-2 引理(值域) 在引理8.4-1的假设下，存在一个(依赖于λ的)最小的整数q，使得从$n=q$起，值域$T_\lambda^n(X)$都是相等的；并且若$q>0$，包含关系

$$T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset \cdots \supset T_\lambda^q(X)$$

都是真正的。

证明：仍然采用反证法，并且和上面的证明是相仿的。简单地记 $\mathscr{R}_n = T_\lambda^n(X)$。假定没有一个 s 使得 $\mathscr{R}_s = \mathscr{R}_{s+1}$，则对每一个 n，$\mathscr{R}_{n+1}$ 都是 $\mathscr{R}_n$ 的一个真子空间（见 8.3-6）。由于这些值域都是闭的（据 8.3-6），因而黎斯引理 2.5-4 意味着存在序列 (x_n) 满足

$$x_n \in \mathscr{R}_n, \quad \|x_n\| = 1, \quad \|x_n - x\| \geqslant \frac{1}{2} \quad 对一切\ x \in \mathscr{R}_{n+1} \tag{4}$$

设 $m < n$。由于 $T = T_\lambda + \lambda I$，可以记

$$Tx_m - Tx_n = \lambda x_m - (-T_\lambda x_m + T_\lambda x_n + \lambda x_n) \tag{5}$$

在右端，$\lambda x_m \in \mathscr{R}_m$，$x_m \in \mathscr{R}_m$，故 $T_\lambda x_m \in \mathscr{R}_{m+1}$，并且因为 $n > m$，所以 $T_\lambda x_n + \lambda x_n \in \mathscr{R}_n \subset \mathscr{R}_{m+1}$。因此，式（5）具有下面的形式

$$Tx_m - Tx_n = \lambda(x_m - x), \qquad x \in \mathscr{R}_{m+1}$$

因此，根据式（4）有

$$\|Tx_m - Tx_n\| = |\lambda|\ \|x_m - x\| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda| > 0 \tag{6}$$

因为 (x_n) 是有界的和 T 是紧的，因此 (Tx_n) 有收敛的子序列。这就和式（6）矛盾，从而证明了对某个 s 有 $\mathscr{R}_s = \mathscr{R}_{s+1}$。令 q 是使 $\mathscr{R}_s = \mathscr{R}_{s+1}$ 成立的最小的 s，则若 $q > 0$，引理中所说的包含关系（它是从 8.3-6 推出的）便是真包含。

此外，$\mathscr{R}_{q+1} = \mathscr{R}_q$ 意味着 T_λ 映 $\mathscr{R}_q$ 到 $\mathscr{R}_q$ 上。因此，反复用 T_λ 作用上式两端，对每个 $n > q$ 便得到 $\mathscr{R}_{n+1} = \mathscr{R}_n$。

把引理 8.4-1 和 8.4-2 结合在一起便得到重要的定理：

8.4-3 定理（零空间和值域） 设 $T: X \to X$ 是赋范空间 X 上的一个紧线性算子且 $\lambda \neq 0$。则存在一个（依赖于 λ 的）最小整数 $n = r$，使得

$$\mathscr{N}(T_\lambda^r) = \mathscr{N}(T_\lambda^{r+1}) = \mathscr{N}(T_\lambda^{r+2}) = \cdots \tag{7}$$

和

$$T_\lambda^r(X) = T_\lambda^{r+1}(X) = T_\lambda^{r+2}(X) = \cdots \tag{8}$$

并且若 $r > 0$，则下面的包含关系是真包含：

$$\mathscr{N}(T_\lambda^0) \subset \mathscr{N}(T_\lambda) \subset \cdots \subset \mathscr{N}(T_\lambda^r) \tag{9}$$

和

$$T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset \cdots \supset T_\lambda^r(X) \tag{10}$$

证明：引理 8.4-1 给出了式（7）和式（9），引理 8.4-2 给出了式（8）和式（10），只是 q 代替了 r。我们必须证明的是 $q = r$。分 (a) 和 (b) 两步证明。在 (a) 中，我们证明 $q \geqslant r$，而在 (b) 中，证明 $q \leqslant r$。象前面一样，简记 $\mathscr{N}_n = \mathscr{N}(T_\lambda^n)$ 和 $\mathscr{R}_n = T_\lambda^n(X)$。

(a) 据引理 8.4-2 有 $\mathscr{R}_{q+1} = \mathscr{R}_q$。这就意味着 $T_\lambda(\mathscr{R}_q) = \mathscr{R}_q$。因此，

$$y \in \mathscr{R}_q \Rightarrow y = T_\lambda x \quad 对某些\ x \in \mathscr{R}_q \tag{11}$$

现证明：

$$T_\lambda x=0,\ x\in\mathscr{R}_q \Rightarrow x=0 \tag{12}$$

假定式（12）不成立，则对某一非零的 $x_1\in\mathscr{R}_q$ 有 $T_\lambda x_1=0$。在（11）中取 $y=x_1$，则对某一 $x_2\in\mathscr{R}_q$ 有 $x_1=T_\lambda x_2$。类似地，对某一 $x_3\in\mathscr{R}_q$ 有 $x_2=T_\lambda x_3$，等等。因而通过代入，对每个 n 可得到

$$0\neq x_1=T_\lambda x_2=\cdots=T_\lambda^{n-1}x_n,\ 但\ 0=T_\lambda x_1=T_\lambda^n x_n$$

因此 $x_n\notin\mathscr{N}_{n-1}$，但 $x_n\in\mathscr{N}_n$。根据 8.4-1 有 $\mathscr{N}_{n-1}\subset\mathscr{N}_n$，我们的这一结果表明，因为 n 是任意的，对每一个 n，这一包含关系是真包含。这与 8.4-1矛盾，从而证明了式（12）。

据 8.4-2 有 $\mathscr{R}_{q+1}=\mathscr{R}_q$，如果我们能证明 $\mathscr{N}_{q+1}=\mathscr{N}_q$，则由于 r 是使得这个等式成立的最小的整数，故据 8.4-1 可推出 $q\geqslant r$。

根据 8.3-4 有 $\mathscr{N}_{q+1}\supset\mathscr{N}_q$。现在证明 $\mathscr{N}_{q+1}\subset\mathscr{N}_q$，即 $T_\lambda^{q+1}x=0$ 蕴含着 $T_\lambda^q x=0$。假若这是不真的，则对某一 x_0，有

$$y=T_\lambda^q x_0\neq 0,\ 但\ \ T_\lambda y=T_\lambda^{q+1}x_0=0$$

因此 $y\in\mathscr{R}_q$，$y\neq 0$ 并且 $T_\lambda y=0$。在（12）中以 y 代替 x，便与上述结果矛盾。从而证明 $\mathscr{N}_{q+1}\subset\mathscr{N}_q$。因此 $\mathscr{N}_{q+1}=\mathscr{N}_q$ 和 $q\geqslant r$。

(b) 我们再证明 $q\leqslant r$。若 $q=0$，不等式是成立的。设 $q\geqslant 1$，通过证明 $\mathscr{N}_{q-1}$ 是 $\mathscr{N}_q$ 的真子空间来证明 $q\leqslant r$。由于 r 是使得 $\mathscr{N}_n=\mathscr{N}_{n+1}$ 成立的最小的整数 n，这就意味着 $q\leqslant r$；见 8.4-1。

根据 8.4-2 中 q 的定义，包含关系 $\mathscr{R}_q\subset\mathscr{R}_{q-1}$ 是真包含。令 $y\in\mathscr{R}_{q-1}-\mathscr{R}_q$，则 $y\in\mathscr{R}_{q-1}$，所以对某一 x 有 $y=T_\lambda^{q-1}x$。$T_\lambda y\in\mathscr{R}_q=\mathscr{R}_{q+1}$ 还意味着 $T_\lambda y=T_\lambda^{q+1}z$ 对某一 z 成立。由于 $T_\lambda^q z\in\mathscr{R}_q$，但 $y\notin\mathscr{R}_q$，故有

$$T_\lambda^{q-1}(x-T_\lambda z)=y-T_\lambda^q z\neq 0$$

因此，$x-T_\lambda z\notin\mathscr{N}_{q-1}$。但是由于

$$T_\lambda^q(x-T_\lambda z)=T_\lambda y-T_\lambda y=0$$

故 $x-T_\lambda z\in\mathscr{N}_q$。这就证明了 $\mathscr{N}_{q-1}\neq\mathscr{N}_q$，从而 $\mathscr{N}_{q-1}$ 是 $\mathscr{N}_q$ 的一个真子空间，因此 $q\leqslant r$。与(a)合在一起便证明了 $q=r$。

巴拿赫空间上的紧线性算子的谱的重要特征几乎是上述定理的直接结果。（在 8.6-4 中我们将会看到甚至空间不是完备的，这个结果仍然是成立的。）

8.4-4 定理（特征值） 设 $T: X\to X$ 是巴拿赫空间 X 上的紧线性算子。则 T 的每一个谱值 $\lambda\neq 0$（若存在的话[①]）都是 T 的一个特征值。（对于一般的赋范空间，这个结论也是成立的，其证明在 8.6-4。）

证明：若 $\mathscr{N}(T_\lambda)\neq\{0\}$，则 λ 是 T 的一个特征值。假定 $\mathscr{N}(T_\lambda)=\{0\}$，且 $\lambda\neq 0$。则 $T_\lambda x=0$ 意味着 $x=0$，且据 2.6-10，$T_\lambda^{-1}: T_\lambda(X)\to X$ 是存在的。由于

$$\{0\}=\mathscr{N}(I)=\mathscr{N}(T_\lambda^0)=\mathscr{N}(T_\lambda)$$

①习题5表明T可能没有特征值。在§9.2中将会看到，复希尔伯特空间H≠{0}上的自伴紧线性算子总是至少有一个特征值。

所以根据 8.4-3 有 $r=0$。因此，据 8.4-3 还有$X=T_\lambda{}^0(X)=T_\lambda(X)$。这就推出 T_λ 是对射。而由于X是完备的，根据有界逆定理 4.12-2 知$T_\lambda{}^{-1}$是有界的，从而据定义知$\lambda\in\rho(T)$。

在本章的很多定理中不包括 $\lambda=0$，那么自然要问：对于复赋范空间X上的紧线性算子T：$X\to X$来说，关于 $\lambda=0$ 又是怎样的呢？若是有限维的，则T有矩阵表示。显然，0 可以属于也可以不属于 $\sigma(T)=\sigma_p(T)$；也就是说，若 $\dim X<\infty$，可能有 $0\notin\sigma(T)$；则 $0\in\rho(T)$。然而，若 $\dim X=\infty$，则必定有 $0\in\sigma(T)$；见上一节中的习题 14。如本节习题 4、5 和 §9.2 中的习题 7 所表明的那样，以下三种情况

$$0\in\sigma_p(T),\quad 0\in\sigma_c(T),\quad 0\in\sigma_r(T)$$

都是可能的。

作为定理 8.4-3 的另一个有趣而重要的应用，我们来建立X的表示，即用两个闭子空间，即$T_\lambda{}^r$的零空间和值域的直和（§3.3）表示。

8.4-5 定理（直和） 设X，T，λ 和 r 如定理 8.4-3 中所设。则① X能够被表示成

$$X=\mathscr{N}(T_\lambda{}^r)\oplus T_\lambda{}^r(X) \tag{13}$$

证明：我们考虑任一 $x\in X$，必须证明 x 有唯一的表示：

$$x=y+z,\qquad y\in\mathscr{N}_r,\qquad z\in\mathscr{R}_r$$

其中$\mathscr{N}_n=\mathscr{N}(T_\lambda{}^n)$，$\mathscr{R}_n=T_\lambda{}^n(X)$。令 $z=T_\lambda{}^r x$，则有 $z\in\mathscr{R}_r$。据定理 8.4-3，$\mathscr{R}_r=\mathscr{R}_{2r}$，因此，$z\in\mathscr{R}_{2r}$，所以对某一 $x_1\in X$ 有 $z=T_\lambda{}^{2r}x_1$。令 $x_0=T_\lambda{}^r x_1$，则 $x_0\in\mathscr{R}_r$，并且

$$T_\lambda{}^r x_0=T_\lambda{}^{2r}x_1=z=T_\lambda{}^r x$$

这表明$T_\lambda{}^r(x-x_0)=0$。因此 $x-x_0\in\mathscr{N}_r$，并且

$$x=(x-x_0)+x_0,\quad x-x_0\in\mathscr{N}_r,\quad x_0\in\mathscr{R}_r \tag{14}$$

如果能证明式（14）是唯一的，则便证明了式（13）。

现证唯一性。除了式（14）外，若还有

$$x=(x-\tilde{x}_0)+\tilde{x}_0,\quad x-\tilde{x}_0\in\mathscr{N}_r,\quad \tilde{x}_0\in\mathscr{R}_r$$

令 $v_0=x_0-\tilde{x}_0$，则由于$\mathscr{R}_r$是一矢量空间，故 $v_0\in\mathscr{R}_r$。因此对某一 $v\in X$ 有 $v_0=T_\lambda{}^r v$，还有

$$v_0=x_0-\tilde{x}_0=(x-\tilde{x}_0)-(x-x_0)$$

因此 $v_0\in\mathscr{N}_r$，$T_\lambda{}^r v_0=0$。合在一起，便有

$$T_\lambda{}^{2r}v=T_\lambda{}^r v_0=0$$

和 $v\in\mathscr{N}_{2r}=\mathscr{N}_r$（见8.4-3）。这就意味着

---

①若X是矢量空间，则对任一子空间$Y\subset X$，都存在子空间 $Z\subset X$使得$X=Y\oplus Z$；见§3.3。若X是赋范空间（甚至巴拿赫空间（而$Y\subset X$是闭子空间，也未必有闭子空间$Z\subset X$使得$X=Y\oplus Z$。（例子见附录3中F·J·默里(1937)和A·索布茨克(1941) 若X是希尔伯特空间，则对每个闭子空间Y，总是有$X=Y\oplus Z$，其中$Z=Y^\perp$ 是闭的（见3.3-3，3.3-4）。注意，在（13）中的两个子空间都是闭的。

$$v_0 = T_\lambda{}^r v = 0$$

亦即 $v_0 = x_0 - \tilde{x}_0 = 0$，$x_0 = \tilde{x}_0$，从而证明了表示（14）是唯一的，和$\mathscr{N}_r + \mathscr{R}_r$是直和。

习　题

1. 在较弱的假设下：对某个 $p \in N$，T^p 是紧的，来证明引理 8.4-1。

2. 在引理 8.4-1 的证明中，用反证法证明了：$\mathscr{N}_m = \mathscr{N}_{m+1}$ 蕴含着对一切 $n > m$ 有$\mathscr{N}_n = \mathscr{N}_{n+1}$。请给出一个直接的证明。

3. 对于一般的赋范空间要想得到定理 8.4-4，可以试图把这里的证明用到 T 的紧延拓 $\tilde{T}$（见8.2-4）上，然后再得到关于T 的结论。将会遇到什么困难？

4. 证明由

$$T x = \left(\frac{\xi_1}{1},\ \frac{\xi_2}{2},\ \frac{\xi_3}{3},\ \cdots\right),\quad x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$$

所定义的T：$l^2 \to l^2$是紧的，并且 $\sigma_p(T) = \{0\}$。

5. 由于紧线性算子可能没有特征值，所以在定理 8.4-4 中我们必须包括"若谱值存在的话"这一措辞。证明由

$$T x = \left(0,\ \frac{\xi_1}{1},\ \frac{\xi_2}{2},\ \frac{\xi_3}{3},\ \cdots\right),\quad x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$$

所定义的T：$l^2 \to l^2$就是这一类型的算子。并证明$\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$。（注意，习题4表明 0 可能属于点谱。在§9.2中的习题 7 将会看到，0 也可能属于连续谱。）

6. 求由

$$T_n x = \left(0,\ \frac{\xi_1}{1},\ \frac{\xi_2}{2},\cdots,\frac{\xi_{n-1}}{n-1}\right),\quad x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$$

所定义的T_n：$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$：的特征值。把它与习题 5 加以比较，并阐明当$n \to \infty$时会出现什么情况。

7. 设T：$l^2 \to l^2$是如下定义的算子，

$$y = T x,\quad x = (\xi_j),\quad y = (\eta_j),\quad \eta_j = \alpha_j \xi_j$$

其中(α_j)在[0，1]上是稠密的。证明T 不是紧的。

8. 设T：$l^2 \to l^2$是如下定义的算子，

$$x = (\xi_1,\ \xi_2, \cdots) \longmapsto T x = (\xi_2,\ \xi_3, \cdots)$$

并令 $m = m_0$和 $n = n_0$是使得$\mathscr{N}(T^m) = \mathscr{N}(T^{m+1})$ 和 $T^{n+1}(X) = T^n(X)$ 成立的最小数。求$\mathscr{N}(T^m)$。有限的m_0存在吗？求出 n_0。

9. 设T：$C[0，1] \longrightarrow C[0，1]$是如下定义的算子，

$$T x = v x,\quad v(t) = t$$

证明T 不是紧的。

10. 就矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

所表示的线性算子 T：$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 来推导表示（13）。

§8.5 含有紧线性算子的算子方程

弗雷德霍姆（*I. Fredholm*，1903）研究了线性积分方程，并在他有名的著作中提出了一些紧线性算子方程的可解性理论。我们将向读者介绍由弗雷德霍姆提出，黎斯进一步发展，邵德尔作出重大贡献的这一理论。

我们将讨论赋范空间 X 上的紧线性算子 T：$X \to X$，和 4.5-1 中所定义的伴随算子 $T^\times$：$X' \to X'$，以及方程

$$Tx - \lambda x = y,\quad y \in X \text{是给定的},\ \lambda \neq 0 \tag{1}$$

相应的齐次方程

$$Tx - \lambda x = 0,\quad \lambda \neq 0 \tag{2}$$

类似的关于伴随算子的方程

$$T^\times f - \lambda f = g,\quad g \in X' \text{是给定的},\ \lambda \neq 0 \tag{3}$$

及其对应的齐次方程

$$T^\times f - \lambda f = 0,\quad \lambda \neq 0 \tag{4}$$

其中 $\lambda \in \mathbf{C}$ 是任意固定的且不等于零。我们将分别研究解 x 和 f 的存在性。

为什么要同时考虑这四个方程呢？从下面的结论摘要可以看出，关于可解性这些方程是互相关联在一起的。（括号里的数字是引用的相应的定理。）

摘要 设 T：$X \to X$ 是赋范空间 X 上的紧线性算子，$T^\times$：$X' \to X'$ 是 T 的伴随算子，且 $\lambda \neq 0$。则有

式（1）是正规可解的，即式（1）有一个解 x，当且仅当对式（4）的所有解 f 都有 $f(y)=0$。因此，若 $f=0$ 是式（4）的唯一解，则对每个 y 方程（1）都是可解的（见 8.5-1）。

（3）有一个解 f，当且仅当对式（2）的所有解 x 都有 $g(x)=0$。因此，若 $x=0$ 是式（2）的唯一解，则对每个 g 方程（3）都是可解的（见8.5-3）。

对每个 $y \in X$ 方程（1）有解 x，当且仅当 $x=0$ 是方程（2）的唯一解（见 8.6-1*a*）。

对每个 $g \in X'$ 方程（3）有解 f，当且仅当 $f=0$ 是方程（4）的唯一解（见8.6-1*b*）。

方程（2）和（4）有相同个数的线性无关解（见8.6-3）。

T_λ 满足弗雷德霍姆择一性定理（见8.7-2）。

我们的第一个定理给出了方程（1）可解的必要和充分条件。

8.5-1 定理（式（1）的解） 设 T：$X \to X$ 是赋范空间 X 上的紧线性算子，且 $\lambda \neq 0$。

则式（1）有解 x，当且仅当对满足式（4）的一切 $f\in X'$，y 都满足

$$f(y)=0 \tag{5}$$

因此，若式（4）只有平凡解 $f=0$，则式（1）对任意给定的$y\in X$都是可解的。

证明：(a) 假定式（1）有解 $x=x_0$，即

$$y=Tx_0-\lambda x_0=T_\lambda x_0$$

设 f 是式（4）的任一解，则首先有

$$f(y)=f(Tx_0-\lambda x_0)=f(Tx_0)-\lambda f(x_0)$$

而由伴随算子的定义知 $f(Tx_0)=(T^\times f)(x_0)$（见4.5-1，其中的 g 为这里的f)。因此根据式（4）有

$$f(y)=(T^\times f)(x_0)-\lambda f(x_0)=0$$

(b) 反过来，假若式（1）中的 y 对式(4)的每个解 f 都满足式（5），我们来证明式(1)有一个解。

假定式（1）没有解，则不存在 x 满足 $y=T_\lambda x$。因此 $y\notin T_\lambda(X)$。而根据8.3-5知 $T_\lambda(X)$是闭的，故从 y 到$T_\lambda(X)$的距离 δ 是正的。根据引理 4.6-7，存在一个$\tilde{f}\in X'$满足 $\tilde{f}(y)=\delta$ 且对每个 $z\in T_\lambda(X)$有 $\tilde{f}(z)=0$。由于 $z\in T_\lambda(X)$，对某一 $x\in X$有 $z=T_\lambda x$，所以 $\tilde{f}(z)=0$ 变成

$$\begin{aligned}\tilde{f}(T_\lambda x)&=\tilde{f}(Tx)-\lambda\tilde{f}(x)\\&=(T^\times\tilde{f})(x)-\lambda\tilde{f}(x)=0\end{aligned}$$

由于 $z\in T_\lambda(X)$是任意的，所以上式对每个 $x\in X$都是成立的。因此 $\tilde{f}$ 是式(4)的一个解。根据假设它满足式（5），即 $\tilde{f}(y)=0$。但这与 $\tilde{f}(y)=\delta>0$ 矛盾。因而，式（1）必定有解。这就证明了定理的第一个论断，由它立即可推出第二个论断。

这个定理所表征的情况促使我们提出下面的概念。设

$$Ax=y,\quad y\text{ 是给定的} \tag{6}$$

其中A：$X\to X$是赋范空间X上的有界线性算子。假若式(6)有解 $x\in X$ 的充分必要条件是对方程

$$A^\times f=0 \tag{7}$$

的每一个解$f\in X'$，y 都满足 $f(y)=0$，其中$A^\times$是A 的伴随算子。则称式（6）是**正规可解**的。

定理 8.5-1 表明，方程（1）关于紧线性算子T和$\lambda\neq0$ 是正规可解的。

对于方程（3），也有一个和定理8.5-1类似的定理，它可从下述引理得到。这个引理中的正实数 c 可能依赖于给定的 λ。要注意的是，式（8）是对某一个解（称之为最小范数解）成立，而不必对所有解都成立。因此引理并不意味着$R_\lambda=T_\lambda^{-1}$的存在（根据§2.7中习题7）。

8.5-2 引理（方程(1)的某些解的界） 设T：$X\to X$：是赋范空间X上的紧线性算子，

而 $\lambda \neq 0$ 是给定的。则存在一个与式（1）中的 y 无关的实数 $c>0$，并且使得对每个使式（1）有解的 y，这些解中至少有一个，记为 $x=\tilde{x}$，满足

$$\|\tilde{x}\| \leqslant c\|y\| \tag{8}$$

其中 $y=T_\lambda \tilde{x}$。

证明：我们把证明分成两步进行：

(a) 先证明：若对给定的 y 式（1）肯定有解的话，则这些解的集合中包含一个最小范数的解，记之为 $\tilde{x}$。

(b) 再证明：存在一个 $c>0$，使得关于最小范数解 $\tilde{x}$，它对应于使得式（1）有解的任一 $y=T_\lambda \tilde{x}$，都有（8）成立。

详细证明如下。

(a) 设 x_0 是（1）的一个解。若 x 是式（1）的任一另外的解，则其差 $z=x-x_0$ 满足式（2）。因此，式（1）的每一个解都能够写成

$$x=x_0+z, \quad z \in \mathscr{N}(T_\lambda)$$

反过来，对每个 $z \in \mathscr{N}(T_\lambda)$，和 x_0+z 一定是式（1）的一个解。对于固定的 x_0，x 的范数与 z 有关；我们记

$$p(z)=\|x_0+z\|, \quad k=\inf_{z \in \mathscr{N}(T_\lambda)} p(z)$$

根据下确界的定义，$\mathscr{N}(T_\lambda)$ 含有序列 (z_n) 使得

$$p(z_n)=\|x_0+z_n\| \longrightarrow k, \quad n \rightarrow \infty \tag{9}$$

由于 $(p(z_n))$ 是收敛的，故是有界的。又因为

$$\|z_n\|=\|(x_0+z_n)-x_0\| \leqslant \|x_0+z_n\|+\|x_0\|=p(z_n)+\|x_0\|$$

所以 (z_n) 也是有界的。由于 T 是紧的，故 (Tz_n) 有收敛的子序列。但是 $z_n \in \mathscr{N}(T_\lambda)$ 意味着 $T_\lambda z_n=0$，即 $Tz_n=\lambda z_n$，其中 $\lambda \neq 0$。因此 (z_n) 有收敛的子序列，不妨设

$$z_{n_j} \longrightarrow z_0$$

其中 $z_0 \in \mathscr{N}(T_\lambda)$，这是因为 $\mathscr{N}(T_\lambda)$ 是闭的（见2.7-10）。由于 p 是连续的，故又有

$$p(z_{n_j}) \longrightarrow p(z_0)$$

因而从式（9）得到

$$p(z_0)=\|x_0+z_0\|=k$$

这就证明了：若式（1）对给定的 y 有解，则解的集合中含有一个最小范数解 $\tilde{x}=x_0+z_0$。

(b) 现证明存在一个 $c>0$（与 y 无关），使得式（8）关于最小范数解 $\tilde{x}$ 和使（1）可解的任一 $y=T_\lambda \tilde{x}$ 都是成立的。

假若我们的论断不成立，则存在序列 (y_n) 满足

$$\frac{\|\tilde{x}_n\|}{\|y_n\|} \longrightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty \tag{10}$$

其中 $\tilde{x}_n$ 是最小范数解且满足 $T_\lambda \tilde{x}_n = y_n$。该等式两端用 α 去乘可以看出，$\alpha \tilde{x}_n$ 是对应于 αy_n 的一个最小范数解。因此，我们可以假定 $\|\tilde{x}_n\| = 1$，这并不失掉一般性。则式(10)意味着 $\|y_n\| \to 0$。由于 T 是紧的，而 $(\tilde{x}_n)$ 是有界的，故 $(T\tilde{x}_n)$ 有收敛的子序列，不妨设 $T\tilde{x}_{n_j} \to v_0$，或者，为方便计把 v_0 写成 $v_0 = \lambda \tilde{x}_0$，则

$$T\tilde{x}_{n_j} \longrightarrow \lambda \tilde{x}_0, \quad j \to \infty \tag{11}$$

因为 $y_n = T_\lambda \tilde{x}_n = T\tilde{x}_n - \lambda \tilde{x}_n$，故有 $\lambda \tilde{x}_n = T\tilde{x}_n - y_n$。再利用式（11）和 $\|y_n\| \to 0$，并注意到 $\lambda \neq 0$，便得到

$$\tilde{x}_{n_j} = \lambda^{-1}(T\tilde{x}_{n_j} - y_{n_j}) \longrightarrow \tilde{x}_0 \tag{12}$$

由于 T 是连续的，由此可得

$$T\tilde{x}_{n_j} \longrightarrow T\tilde{x}_0$$

因此由式（11）便得 $T\tilde{x}_0 = \lambda \tilde{x}_0$。由于 $T_\lambda \tilde{x}_n = y_n$，故可看出 $x = \tilde{x}_n - \tilde{x}_0$ 满足 $T_\lambda x = y_n$。由于 $\tilde{x}_n$ 是最小范数解，所以

$$\|x\| = \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_0\| \geqslant \|\tilde{x}_n\| = 1$$

但是，这与式（12）中的收敛性是矛盾的。因此式（10）是不能成立的，但式（10）中商的序列一定是有界的，也就是一定有

$$c = \sup_{y \in T_\lambda(X)} \frac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|} < \infty$$

其中 $y = T_\lambda \tilde{x}$。这就推出了式（8）。

利用这个引理，类似于用定理8.5-1给出式（1）的解，我们可以把方程式（3）的可解性表征出来。

8.5-3 定理（(3)的解） 设 $T: X \to X$ 是赋范空间 X 上的紧线性算子，且 $\lambda \neq 0$。则式（3）有解 f，当且仅当 g 对满足式（2）的一切 $x \in X$ 都有

$$g(x) = 0 \tag{13}$$

因此，若式（2）只有平凡解 $x = 0$，则式（3）对任意给定的 $g \in X'$ 都是可解的。

证明：(a) 若式（3）有解 f 且 x 满足式（2），则因为，

$$g(x) = (T^\times f)(x) - \lambda f(x) = f(Tx - \lambda x) = f(0) = 0$$

故（13）成立。

(b) 反过来，假定 g 对式（2）的每个解 x 都满足式（13），我们来证明方程（3）有解 f。为此我们考虑任一 $x \in X$ 并令 $y = T_\lambda x$，则 $y \in T_\lambda(X)$。在 $T_\lambda(X)$ 上我们可以用

$$f_0(y) = f_0(T_\lambda x) = g(x)$$

定义一个泛函 f_0。若 $T_\lambda x_1 = T_\lambda x_2$，则有 $T_\lambda(x_1 - x_2) = 0$，从而 $x_1 - x_2$ 是（2）的一个解，因此据假设便有 $g(x_1 - x_2) = 0$，即 $g(x_1) = g(x_2)$，这说明 f_0 的定义是明确的。

由于 T_λ 和 g 都是线性的，所以 f_0 也是线性的。现在证明 f_0 是有界的。引理8.5-2意味着，对每个 $y \in T_\lambda(X)$ 至少有一个相应的 x 满足

$$\|x\| \leqslant c\|y\|, \quad y = T_\lambda x$$

其中的 c 与 y 无关。从下式

$$|f_0(y)| = |g(x)| \leqslant \|g\| \|x\| \leqslant c\|g\| \|y\| = \tilde{c}\|y\|$$

其中 $\tilde{c} = c\|g\|$，可以看出 f_0 是有界的。根据汉恩-巴拿赫定理 4.3-2，泛函 f_0 有一个从 $T_\lambda(X)$ 到 X 上的延拓 f，当然 f 是定义在 X 上的有界线性泛函。根据 f_0 的定义，

$$f(Tx - \lambda x) = f(T_\lambda x) = f_0(T_\lambda x) = g(x)$$

根据伴随算子的定义，在左端对一切 $x \in X$ 有

$$f(Tx - \lambda x) = f(Tx) - \lambda f(x) = (T^\times f)(x) - \lambda f(x)$$

与前边的式子合在一起，便证明了 f 是(3)的一个解，从而证明了定理的第一个论断。而第二个论断由第一个论断很容易推出。

由于下一节内容是本节内容的延续，所以两节的习题集都放在下一节的末尾给出。

§8.6 其他的弗雷德霍姆型定理

在本节中，我们对算子方程

$$Tx - \lambda x = y, \qquad y \text{ 给定} \tag{1}$$

$$Tx - \lambda x = 0 \tag{2}$$

$$T^\times f - \lambda f = g, \qquad g \text{ 给定} \tag{3}$$

$$T^\times f - \lambda f = 0 \tag{4}$$

的可解性问题给出进一步结果。这里的假定与上一节完全相同，即，$T: X \to X$ 是赋范空间 X 上的紧线性算子，$T^\times$ 是 T 的伴随算子，$\lambda \neq 0$ 是固定的。

正如前面指出的那样，上一节和本节的理论推广了弗雷德霍姆的著名的积分方程理论。

上一节的主要结果是：方程(1)的可解性是用方程(4)来表征的（定理 8.5-1），而方程(3)的可解性是用方程(2)来表征的（定理 8.5-3）。要寻找在(1)和(2)之间，(3)与(4)之间有否类似的关系，这是自然的事。

8.6-1 定理(方程(1)的解) 设 $T: X \to X$ 设是赋范空间 X 上的紧线性算子，$\lambda \neq 0$。则

(a) 方程(1)对每个 $y \in X$ 有解 x，当且仅当齐次方程(2)只有平凡解 $x = 0$。在这种情况下，(1)的解是唯一的，并且 T_λ 有一个有界逆。

(b) 方程(3)对每个 $g \in X'$ 有解 f，当且仅当方程(4)只有平凡解 $f = 0$。此时，式(3)的解是唯一的。

证明：(a)我们先证明：若对每个 $y \in X$ 方程(1)都是可解的，则 $x = 0$ 是方程(2)的唯一解。

如若不然，式(2)还有解 $x_1 \neq 0$。由于(1)对任意的 y 都是可解的，则 $T_\lambda x = y = x_1$ 应有解 $x = x_2$，即 $T_\lambda x_2 = x_1$。同理也存在 x_3 满足 $T_\lambda x_3 = x_2$，依此类推。因而通过代入对每个 $k = 2, 3, \cdots$ 有

$$0 \neq x_1 = T_\lambda x_2 = T_\lambda^2 x_3 = \cdots = T_\lambda^{k-1} x_k$$

并且

$$0 = T_\lambda x_1 = T_\lambda^k x_k$$

因此 $x_k \in \mathcal{N}(T_\lambda^k)$，但 $x_k \notin \mathcal{N}(T_\lambda^{k-1})$。这就意味着对一切 k，零空间 $\mathcal{N}(T_\lambda^{k-1})$是$\mathcal{N}(T^k)$的真子空间。但是这与定理 8.4-3 相矛盾。因此 $x=0$ 必须是方程(2)的唯一解。

反之，假定 $x=0$ 是式(2)的唯一解，则据定理 8.5-3，方程(3)对任意的g 都是可解的。由于$T^\times$是紧的（见 8.2-5)，所以可把前面的证明应用到$T^\times$上，从而得到 $f=0$ 必定是式（4)的唯一解。对任意的 y 式(1)是可解的便可从定理 8.5-1 推出。

由于式（1）的两个解之差是式（2）的一个解，由此可以推出（1）的解的唯一性。很显然，这样的一个唯一解 $x=T_\lambda^{-1}y$ 是最小范数解，从引理 8.5-2

$$\|x\| = \|T_\lambda^{-1}y\| \leqslant c\|y\|$$

便推出T_λ^{-1}的有界性。

(b) 这是(a)的一个结果，因为$T^\times$也是一个紧线性算子（见 8.2-5）。

齐次方程（2）和（4）也是相关的：我们将会看到它们有相同个数的线性无关解。为了证明这一事实，我们将要求在X和X'中存在着满足下面的关系式（5）的集合，通常称作为双正交系。

8.6-2 引理（双正交系） 在赋范空间X的对偶空间X'中给定一个线性无关组 $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$，则在$X$中存在着元素 $z_1, z_2, \cdots, z_m$，使得

$$f_j(z_k)=\delta_{jk}=\begin{cases}0 & j\neq k\\ 1 & j=k\end{cases} \qquad j,k=1,2,\cdots,m \tag{5}$$

证明：由于如何排列 f_j 是无关紧要的，所以只要证明存在着一个 z_m 满足

$$f_m(z_m)=1, \quad f_j(z_m)=0, \quad j=1,\cdots,m-1 \tag{6}$$

就够了。当 $m=1$ 时，据线性无关的定义知 $f_1\neq 0$，所以对某一 x_0 有 $f_1(x_0)\neq 0$，令 $z_1=(1/f_1(x_0))x_0$，则便有 $f_1(z_1)=1$。这表明式（6）是成立的。

现设$m>1$，并归纳假设引理对 $m-1$ 是成立的，即X含有元素 $z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}$ 使得

$$f_k(z_k)=1,\ f_n(z_k)=0,\ n\neq k,\ k,n=1,2,\cdots,m-1 \tag{7}$$

我们考虑集合

$$M=\{x\in X \mid f_1(x)=0,\cdots,\ f_{m-1}(x)=0\}$$

并证明M含有 $\tilde{z}_m$ 使得 $f_m(\tilde{z}_m)=\beta\neq 0$，只要令 $z_m=\beta^{-1}\tilde{z}_m$，便满足了式（6）。

反之，若对一切 $x\in M$都有 $f_m(x)=0$，则任取 $x\in X$ 并令

$$\tilde{x}=x-\sum_{j=1}^{m-1} f_j(x)z_j \tag{8}$$

根据式（7）对 $k\leqslant m-1$便有

$$f_k(\tilde{x})=f_k(x)-\sum_{j=1}^{m-1} f_j(x)f_k(z_j)=f_k(x)-f_k(x)=0$$

这说明$\tilde{x}\in M$，因而据假设有 $f_m(\tilde{x})=0$。而由（8）

$$f_m(x)=f_m(\tilde{x}+\sum_{j=1}^{m-1}f_j(x)z_j)$$

$$=f_m(\tilde{x})+\sum_{j=1}^{m-1}f_j(x)f_m(z_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_jf_j(x), \qquad \alpha_j=f_m(z_j)$$

由于x是从X中任取的，这说明f_m是$f_1,\cdots,f_{m-1}$的一个线性组合，这与$\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$的线性无关性矛盾。因此，不可能对一切$x\in M$都有$f_m(x)=0$，从而M一定含有一个使式(6)成立的z_m。引理得证。

利用这个引理，可以证明$\dim\mathscr{N}(T_\lambda)=\dim\mathscr{N}(T^\times{}_\lambda)$，其中$T^\times{}_\lambda=(T-\lambda I)^\times=T^\times-\lambda I$。对于我们所考虑的算子方程而言，这个维数等式意味着：

8.6-3 定理（T_λ和$T_\lambda{}^\times$的零空间） 设T：$X\to X$是赋范空间X上的紧线性算子，$\lambda\neq 0$，则方程（2）和（4）有相同个数的线性无关解。

证明：由于T和$T^\times$是紧的（见8.2-5），故由8.3-3知$\mathscr{N}(T_\lambda)$和$\mathscr{N}(T^\times{}_\lambda)$都是有限维的，不妨设

$$\dim\mathscr{N}(T_\lambda)=n, \qquad \dim\mathscr{N}(T^\times{}_\lambda)=m$$

我们把证明分成(a)，(b)，(c)三个部分：

(a) 讨论$m=n=0$的情况并为$m>0$，$n>0$做准备，

(b) 证明$n<m$是不可能的，

(c) 再证明$n>m$也是不可能的。

详细的证明如下。

(a) 若$n=0$，式（2）的唯一解是$x=0$。则式（3）对任意给定的g都是可解的；见8.5-3。而据8.6-1(b)，这意味着$f=0$是式(4)的唯一的解，因此$m=0$。类似地可从$m=0$推出$n=0$。

假定$m>0$，$n>0$，且令$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是$\mathscr{N}(T_\lambda)$的一个基。显然$x_1\notin Y_1=\operatorname{span}\{x_2,\cdots,x_n\}$。根据引理4.6-7，存在一个$\tilde{g}_1\in X'$，它在$Y_1$上处处等于零，而$\tilde{g}_1(x_1)=\delta$，$\delta>0$，其中$\delta$是从$x_1$到$Y_1$的距离。因此$g_1=\delta^{-1}\tilde{g}_1$满足$g_1(x_1)=1$和$g_1(x_2)=0,\cdots,g_1(x_n)=0$。类似地存在$g_2$满足$g_2(x_2)=1$和$g_2(x_j)=0$，$j\neq 2$，依此类推，$X'$含有$g_1,g_2,\cdots,g_n$且满足

$$g_k(x_j)=\delta_{kj}=\begin{cases}0 & j\neq k\\ 1 & j=k\end{cases} \qquad j,k=1,2,\cdots,n \tag{9}$$

类似地，若$\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$是$\mathscr{N}(T^\times{}_\lambda)$的一个基，则据引理8.6-2存在着$X$的元$z_1,z_2,\cdots,z_m$满足

$$f_j(z_k)=\delta_{jk}, \qquad j,k=1,2,\cdots,m \tag{10}$$

(b) 现在证明$n<m$是不可能的。设$n<m$并用

$$Sx=Tx+\sum_{j=1}^{n}g_j(x)z_j \tag{11}$$

定义算子 S：$X \to X$，由于 $g_j(x)z_j$ 是一个紧线性算子（根据 8.1-4(a)），紧线性算子之和也是紧线性算子，所以 S 是紧的。让我们来证明

$$(a) \qquad S_\lambda x_0 = S x_0 - \lambda x_0 = 0 \Longrightarrow (b)\ x_0 = 0 \tag{12}$$

根据式（12a），对 $k=1,2,\cdots,m$ 有 $f_k(S_\lambda x_0) = f_k(0) = 0$ 。因此由式（11）和式（10）可得到

$$\begin{aligned} 0 = f_k(S_\lambda x_0) &= f_k(T_\lambda x_0 + \sum_{j=1}^{n} g_j(x_0)z_j) \\ &= f_k(T_\lambda x_0) + \sum_{j=1}^{n} g_j(x_0) f_k(z_j) \\ &= (T^\times{}_\lambda f_k)(x_0) + g_k(x_0) \end{aligned} \tag{13}$$

由于 $f_k \in \mathscr{N}(T^\times{}_\lambda)$，故有 $T^\times{}_\lambda f_k = 0$。因此式（13）给出了

$$g_k(x_0) = 0, \qquad k = 1,2,\cdots,m \tag{14}$$

根据式（11），这就意味着 $Sx_0 = Tx_0$， 再据式（12a）有 $T_\lambda x_0 = S_\lambda x_0 = 0$。因此 $x_0 \in \mathscr{N}(T_\lambda)$。由于$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是$\mathscr{N}(T_\lambda)$的一个基，故

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$$

其中 α_j 是适当的标量。两端用 g_k 作用，并利用式（14）和（9），便有

$$0 = g_k(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_k(x_j) = \alpha_k, \quad k = 1, \cdots, n$$

因此$x_0 = 0$，这就证明了式（12）。定理 8.6-1(a) 意味着 $S_\lambda x = y$ 对任意的y是可解的。我们选取 $y = z_{n+1}$，并设 $x = v$ 是一个对应的解，即$S_\lambda v = z_{n+1}$ 。象式（13）中一样进行计算，并利用式（10）和（11），便有

$$\begin{aligned} 1 = f_{n+1}(z_{n+1}) &= f_{n+1}(S_\lambda v) \\ &= f_{n+1}(T_\lambda v + \sum_{j=1}^{n} g_j(v) z_j) \\ &= (T^\times{}_\lambda f_{n+1})(v) + \sum_{j=1}^{n} g_j(v) f_{n+1}(z_j) \\ &= (T^\times{}_\lambda f_{n+1})(v) \end{aligned}$$

由于假定有 $n<m$，故 $n+1 \leqslant m$，并且 $f_{n+1} \in \mathscr{N}(T^\times{}_\lambda)$。因此，$T^\times{}_\lambda f_{n+1} = 0$。这显然与上面的方程矛盾。因而证明了 $n<m$ 是不可能的。

（c）最后证明 $n>m$ 也是不可能的。其道理和(b)是类似的。设 $n>m$，并定义 $\tilde{S}$：$X' \to X'$ 如下：

$$\tilde{S} f = T^\times f + \sum_{j=1}^{m} f(z_j) g_j \tag{15}$$

据 8.2-5 知$T^\times$是紧的，据 8.1-4(a)，$f(z_j)g_j$也是一个紧线性算子，故 $\tilde{S}$ 是紧的。代替(12)

我们来证明：

$$(a)\quad \tilde{S}_{\lambda}f_0=\tilde{S}f_0-\lambda f_0=0 \Longrightarrow (b)\quad f_0=0 \tag{16}$$

利用式（16a），再把（15）中的 f 换成f_0，再利用伴随算子的定义，最后利用式（9），对每个 $k=1,\cdots,m$便得到

$$\begin{aligned}0=(\tilde{S}_{\lambda}f_0)(x_k)&=(T^{\times}{}_{\lambda}f_0)(x_k)+\sum_{j=1}^{m}f_0(z_j)g_j(x_k)\\&=f_0(T_{\lambda}x_k)+f_0(z_k)\end{aligned} \tag{17}$$

我们的假设 $m<n$ 意味着 $x_k\in\mathcal{N}(T_{\lambda})$，对 $k=1,\cdots,m$ 都是成立的。〔请记住 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是$\mathcal{N}(T_{\lambda})$的一个基。〕因此 $f_0(T_{\lambda}x_k)=f_0(0)=0$，所以式（17）给出了

$$f_0(z_k)=0,\qquad k=1,2,\cdots,m \tag{18}$$

因之，由式（15）得到$\tilde{S}f_0=T^{\times}f_0$。由此和（16$a$）可推出$T^{\times}{}_{\lambda}f_0=\tilde{S}_{\lambda}f_0=0$。因此 $f_0\in\mathcal{N}(T^{\times}{}_{\lambda})$。由于$\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$是$\mathcal{N}(T^{\times}{}_{\lambda})$的一个基，故

$$f_0=\sum_{j=1}^{m}\beta_jf_j$$

其中 β_j 是一些适当的标量。利用式（18）和式（10），对每个 $k=1,2,\cdots,m$ 可得到

$$0=f_0(z_k)=\sum_{j=1}^{m}\beta_jf_j(z_k)=\beta_k$$

因此$f_0=0$。这就证明了式（16）。定理 8.6-1(b)意味着$\tilde{S}_{\lambda}f=g$对任意的g都是可解的。我们选取 $g=g_{m+1}$，并设 $f=h$ 是相应的一个解，即$\tilde{S}_{\lambda}h=g_{m+1}$。先利用（9）和(15)，再利用（9），便得到

$$\begin{aligned}1=g_{m+1}(x_{m+1})&=(\tilde{S}_{\lambda}h)(x_{m+1})\\&=(T^{\times}{}_{\lambda}h)(x_{m+1})+\sum_{j=1}^{m}h(z_j)g_j(z_{m+1})\\&=(T^{\times}{}_{\lambda})(x_{m+1})\\&=h(T_{\lambda}x_{m+1})\end{aligned}$$

我们的假设 $m<n$ 意味着 $m+1\leqslant n$，所以 $x_{m+1}\in\mathcal{N}(T_{\lambda})$。因此，$h(T_{\lambda}x_{m+1})=h(0)=0$。这就与上面的方程发生了矛盾。所以 $m<n$ 是不可能的。由于 $m>n$ 和$m<n$ 都不可能，故必有 $n=m$。

定理 8.6-1(a) 也能用来证明关于巴拿赫空间的一个较早的结论（定理 8.4-4)，甚至对一般的赋范空间也是成立的。

8.6-4 定理（特征值） 设$T:X\to X$是赋范空间X上的紧线性算子。则若 T 有非零的谱值，则每一个非零谱值都是T的特征值。

证明：若预解算子$R_{\lambda}=T_{\lambda}^{-1}$不存在，则据定义$\lambda\in\sigma_p(T)$。设$\lambda\neq0$且假定$R_{\lambda}=T_{\lambda}^{-1}$存在，则$T_{\lambda}x=0$ 意味着 $x=0$（据 2.6-10)。这就是说式（2）只有平凡解。而定理 8.6-1 (a) 表明，式（1）对任意的 y 都是可解的，即R_{λ}在整个 X 上是有定义的，并且是有界

的，因此 $\lambda\in\rho(T)$。

习　题

1.证明在定理 8.5-3 的证明中出现的泛函 f_0 是线性的。

2.在含有 n 个方程和 n 个未知数的线性代数方程组的情况下，定理 8.5-1 意味着什么？

3.考虑含有 n 个线性方程和 n 个未知数的方程组 $Ax=y$。假定该方程组有一个解 x，证明 y 一定满足 §8.5 中形如式（5）的条件。

4.方程组 $Ax=y$（含 n 个方程和 n 个未知数）关于任给的 y 有（唯一的）解，当且仅当 $Ax=0$ 只有平凡解 $x=0$。如何从我们给出的定理推出？

5.含有 n 个线性方程和 n 个未知数的方程组 $Ax=y$ 有解 x，当且仅当增广矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \eta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \eta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & \eta_n \end{pmatrix}$$

和系数矩阵 $A=(\alpha_{jk})$ 有相同的秩。其中 $y=(\eta_j)$。从定理 8.5-1 来推得这个判据。

6.假若式（2）有解 $x\neq0$，并且式（1）是可解的，证明式（1）的解不可能是唯一的；类似地，若式（4）有解 $f\neq0$，并且式（3）是可解的，证明式（3）的解也不能是唯一的。

7.证明：定理 8.6-1 中的第一个断语也可以表述为：$R_\lambda(T)$：$X\to X$ 关于 $\lambda\neq0$ 存在，当且仅当 $Tx=\lambda x$ 蕴含着 $x=0$。

8.对于赋范空间 X 中序列 $(z_1,z_2,\cdots)$ 和对偶空间 X' 中的序列 $(f_1,f_2,\cdots)$，这两个序列若满足

$$f_j(z_k)=\delta_{jk}, \qquad j,k=1,2,\cdots$$

见式（5），则称它们是一个双正交系。给定了 (z_k)，证明：在 X' 中存在一个序列 (f_j) 使得 (z_k) 和 (f_j) 是一个双正交系，当且仅当对一切 $m\in N$ 有 $z_m\notin\overline{A}_m$，其中

$$A_m=\operatorname{span}\{z_k \mid k=1,2,\cdots;\ k\neq m\}$$

9.证明：对于象课文中所定义的有限双正交系，习题 8 中所说的条件是自动满足的。

10.若内积空间中的两组矢量 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots y_n\}$ 满足 $\langle z_k,y_l\rangle=\delta_{kl}$，证明它们中的每一组都是线性无关的。

11.假定在希尔伯特空间，一个双正交系是什么形式？

12.若 X 是一个希尔伯特空间，陈述并证明引理 8.6-2。

13.在 n 个线性方程和 n 个未知数构成的方程组的情况下，定理 8.6-3 又意味着什么？

14.若赋范空间 X 上的线性算子 T：$X\to Y$ 有有限维的值域 $R(T)=T(X)$，证明 T 有形如

$$Tx=f_1(x)y_1+\cdots+f_n(x)y_n$$

的表示，其中 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 和 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 分别是 Y 和 X'（X 的对偶）中的线性无关组。

15. 在我们给出的定理中，若 $\lambda=0$，将会出现令人惊异的情况，分别为

$$(1)\quad Tx=y, \qquad (2)\quad Tx=0$$

对于这些方程，定理 8.6-1 未必成立。要看出这一点，可考察用

$$Tx(s)=\int_0^{\pi} k(s,t)x(t)dt, \qquad k(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin ns\sin nt$$

所定义的算子 T：$C[0,\pi]\longrightarrow C[0,\pi]$。

§8.7 弗雷德霍姆择一性

前两节专门就算子方程的可解性研究了紧线性算子的性态。所得到的结果促使我们提出下面的概念。

8.7-1 定义（弗雷德霍姆择一性） 赋范空间 X 上的有界线性算子 A：$X\rightarrow X$，若不使（Ⅰ）成立便使（Ⅱ）成立，便称 A 是满足弗雷德霍姆择一性的。

（Ⅰ）非齐次方程

$$Ax=y, \qquad A^{\times}f=g$$

（$A^{\times}$：$X'\rightarrow X'$ 是 A 的伴随算子）对每个给定的 $y\in X$ 和 $g\in X'$ 都有唯一的解分别为 x 和 f。对应的齐次方程

$$Ax=0, \qquad A^{\times}f=0$$

分别只有平凡解 $x=0$ 和 $f=0$。

（Ⅱ）齐次方程

$$Ax=0, \qquad A^{\times}f=0$$

分别有同样个数的线性无关解

$$x_1,x_2,\cdots,x_n \text{ 和 } f_1,f_2,\cdots,f_n \qquad n\geqslant 1$$

非齐次方程

$$Ax=y, \qquad A^{\times}f=g$$

不是对所有的 y 和 g 分别都是可解的；当且仅当 y 和 g 分别满足

$$f_k(y)=0, \qquad g(x_k)=0, \qquad k=1,2,\cdots n$$

时，它们是有解的。

有了这个概念，我们能把上两节的结果总结如下：

8.7-2 定理（弗雷德霍姆择一性） 设 T：$X\rightarrow X$ 是赋范空间 X 上的紧线性算子，且 $\lambda\neq 0$。则算子 $T_\lambda=T-\lambda I$ 满足弗雷德霍姆择一性。

这个专有的择一性论述在应用上特别重要，因为避开直接去证明解的存在性，而证明齐次方程只有平凡解往往更简单些。

我们曾指出（§8.5）紧线性算子的黎斯理论是在弗雷德霍姆的第二类的积分方程

$$x(s)-\mu\int_a^b k(s, t)x(t)dt=\tilde{y}(s) \tag{1}$$

的理论的启发下提出的，并推广了弗雷德霍姆的著名结果，这些结果提前了希尔伯特空间和巴拿赫空间理论的开发。紧线性算子的理论在研究方程（1）方面的应用，我们将作一个简短的介绍。

令 $\mu=\lambda^{-1}$，$\tilde{y}(s)=-\lambda^{-1}y(s)$，$\lambda\neq0$，则（1）可写成

$$Tx-\lambda x=y, \qquad \lambda\neq0 \tag{2}$$

其中T被定义为

$$(Tx)(s)=\int_a^b k(s,t)x(t)dt \tag{3}$$

所以由式（1）的一般理论结果能够对式（2）加以解释。事实上，我们有下面的定理。

8.7-3 定理（关于积分方程的弗雷德霍姆择一性） 若方程（1）中的k使得式（2）和（3）中的T：$X\to X$是赋范空间X上的一个紧线性算子，则弗雷德霍姆择一性对于T_λ是成立的；因而要末方程（1）对一切$\tilde{y}\in X$有唯一的解，要末对应于（1）的齐次方程有有限个线性无关的非平凡解（即$x\neq0$的解）。

假定式（2）中的T是紧的（其条件在下面给出）。若λ属于T的预解集$\rho(T)$，则预解算子$R_\lambda(T)=(T-\lambda I)^{-1}$存在，在整个$X$上有定义，并且是有界的〔见8.6-1(a)〕，而且对于每个$y\in X$都给出了式（2）的唯一解

$$x=R_\lambda(T)y$$

由于$R_\lambda(T)$是线性的，故$R_\lambda(T)0=0$，这意味着齐次方程$Tx-\lambda x=0$只有平凡解$x=0$。因此$\lambda\in\rho(T)$给出了弗雷德霍姆择一性中的情况(Ⅰ)。

设$|\lambda|>\|T\|$，并假定X是一个复巴拿赫空间，则据定理7.3-4知$\lambda\in\rho(T)$。此外，§7.3中的式（9）给出

$$R_\lambda(T)=-\lambda^{-1}(I+\lambda^{-1}T+\lambda^{-2}T^2+\cdots) \tag{4}$$

因之，对于解$x=R_\lambda(T)y$有表达式

$$x=-\lambda^{-1}(y+\lambda^{-1}Ty+\lambda^{-2}T^2y+\cdots)$$

并把它叫做一个**诺依曼（Neumann）级数**。

若我们取非零的$\lambda\in\sigma(T)$（如果这样的λ存在的话），$\sigma(T)$表示T的谱集，可得到弗雷德霍姆择一性的情况（Ⅱ）。根据定理8.6-4知λ是一个特征值。据定理8.3-3，其对应的特征空间是有限维的。而据定理8.6-3还知，它的维数等于$T^\times{}_\lambda$的对应的特征空间的维数。

和定理8.7-3相关的特别有意义的两个空间是

$$X=L^2[a, b] \text{ 和 } X=C[a, b]$$

为了能应用这个定理，我们需要对式（1）中的核k施加一定的条件，以保证T是紧的。

若$X=L^2[a, b]$，这个条件是$k\in L^2(J\times J)$，其中$J=[a, b]$。其证明需要测度理论的知识，超出了本书内容的范围。

在$X=C[a,b]$的情况下，其中$[a,b]$是紧的，而k的连续性将保证了T是紧的。

我们将用下面的标准定理（下面的8.7-4）来得到这一结果。

$C[a,b]$中的序列(x_n)，若对每一个$\varepsilon>0$都存在一个只依赖于ε的$\delta>0$，使得对一切x_n和满足$|s_1-s_2|<\delta$的所有$s_1,s_2\in[a,b]$，都有

$$|x_n(s_1)-x_n(s_2)|<\varepsilon$$

则称(x_n)是**等度连续的**（*equicontinuous*）。从这个定义可以看出，每个x_n都是在$[a,b]$上一致连续，并且δ也不依赖于n。

8.7-4 阿斯柯利（Ascoli）定理（等度连续序列） $C[a,b]$中的有界等度连续序列(x_n)有一个（按$C[a,b]$中的范数）收敛的子序列。

关于这个定理的证明，可参看$E.J.$麦克沙恩（$E.J.Mc\ Shane$，1944），$P.336$。用这个定理便能得到所希望的在$X=C[a,b]$情况中的结果如下。

8.7-5 定理（紧积分算子） 设$J=[a,b]$是任一紧区间，并假定k在$J\times J$上连续。则由式（3）所定义的算子$T:X\to X$是紧线性算子，其中$X=C[a,b]$。

证明：显然，T是线性的。从下式

$$\|Tx\|=\max_{s\in J}\left|\int_a^b k(s,t)x(t)dt\right|\leqslant\|x\|\max_{s\in J}\int_a^b|k(s,t)|dt$$

可看出有$\|Tx\|\leqslant\tilde{c}\|x\|$，故$T$是有界的。设$(x_n)$是$X$中的任一有界序列，不妨设对一切$n$都有$\|x_n\|\leqslant c$。令$y_n=Tx_n$，则$\|y_n\|\leqslant\|T\|\ \|x_n\|$。因此$(y_n)$也是有界的。现在来证明$(y_n)$是等度连续的。据假设核$k$在$J\times J$上是连续的，而$J\times J$是紧的，故$k$在$J\times J$上是一致连续的。因此，任给定$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得对一切$t\in J$和所有满足$|s_1-s_2|<\delta$的$s_1,s_2\in J$都有

$$|k(s_1,t)-k(s_2,t)|<\frac{\varepsilon}{(b-a)c}$$

因此，对满足$|s_1-s_2|<\delta$的s_1和s_2，以及每个n可得到

$$|y_n(s_1)-y_n(s_2)|=\left|\int_a^b[k(s_1,t)-k(s_2,t)]\,x_n(t)dt\right|$$

$$<(b-a)\frac{\varepsilon}{(b-a)c}c=\varepsilon$$

这就证明了(y_n)的等度连续性。而阿斯柯利定理意味着(y_n)有收敛的子序列。由于(x_n)是任意的有界序利，而$y_n=Tx_n$，故由定理8.1-3推得T是紧的。

习　题

1.就含有n个线性代数方程和n个未知数的方程组来表述弗雷德霍姆择一性。

2.直接证明，式（1）不可能总是有解的。

3.给出这样一个例子：在式（3）中的核k是不连续的，使得一个连续函数x的象Tx是不连续的。并加以评论。

4.（**诺依曼级数**） 证明，用式（1）中的 $\mu=\lambda^{-1}$ 和 $\tilde{y}$，诺依曼级数（5）取如下形式

$$x=\tilde{y}+\mu T\tilde{y}+\mu^2 T^2\tilde{y}+\cdots$$

在 $C[a, b]$ 中研究方程（1）。若 k 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上是连续的，所以有 $|k(s,t)|<M$，并且若 $|\mu|<1/M(b-a)$，证明诺依曼级数是收敛的。

5.求解下面的积分方程。并把结果与习题4中的诺依曼级数进行比较。

$$x(s)-\mu\int_0^1 x(t)dt=1$$

求出对应齐次方程的所有解。并加以评论。

6.求解下面的方程，并证明：若 $|\mu|<\dfrac{1}{k_0(b-a)}$，对应的诺依曼级数（见习题4）是收敛的。

$$x(s)-\mu\int_a^b k_0 x(t)dt=\tilde{y}(s)$$

其中 k_0 是一个常数。

7.（**迭代核，预解核**）在习题4中的诺依曼级数里，可记

$$(T^n\tilde{y})(s)=\int_a^b k_{(n)}(s,t)\tilde{y}(t)dt, \qquad n=2,3,\cdots$$

而迭代核 $k_{(n)}$ 由下式给出：

$$k_{(n)}(s,t)=\int_a^b\cdots\int_a^b k(s,t)k(t_1,t_2)\cdots k(t_{n-1},t)dt_1\cdots dt_{n-1}$$

所以习题4中的诺依曼级数可写成

$$x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\int_a^b k(s,t)\tilde{y}(t)dt+\mu^2\int_a^b k_{(2)}(s,t)\tilde{y}(t)dt+\cdots$$

证明：这个表达式可以写为积分方程

$$x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\int_a^b \tilde{k}(s,t,\mu)\tilde{y}(t)dt$$

其中预解核① $\tilde{k}$ 由下式给出：

$$\tilde{k}(s,t,\mu)=\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j k_{(j+1)}(s,t), \qquad [k_{(1)}=k]$$

证明：迭代核满足

$$k_n(s,t)=\int_a^b k_{(n-1)}(s,u)k(u,t)du$$

8.在（1）中令 $a=0$，$b=\pi$，并且

$$k(s,t)=a_1\sin s\sin 2t+a_2\sin 2s\sin 3t$$

① 预解核不要与算子的预解式（见§7.2）相混淆。

试确定预解核。

9. 利用习题 4 的诺依曼级数求解式（1），其中 $a=0$，$b=2\pi$，而核

$$k(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin ns\cos nt,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$$

10. 在式（1）中令 $k(s,t)=s(1+t)$，$a=0$，$b=1$。试确定特征值和特征函数。当 $\lambda=\mu^{-1}$ 不是一个特征值时，求解该方程。

11. 在式（1）中，令 $k(s,t)=2e^{s+t}$，$\tilde{y}(s)=e^s$，$a=0$，$b=1$。求特征值和特征函数。

12. 求解

$$x(s)-\mu\int_0^{2\pi}(\sin s\cos t)x(t)dt=\tilde{y}(s)$$

13. 阿斯柯利定理 8.7-4 是说 $C[a,b]$ 中的有界等度连续序列 (x_n) 含有按 $C[a,b]$ 上的范数收敛的子序列。我们知道，这种收敛是 $[a,b]$ 上一致收敛；见1.5-6。举例说明，一个连续函数序列在 $[a,b]$ 的每一点上可以是收敛的，但可能不包含在 $[a,b]$ 上一致收敛的任何子序列。

14.（**退化核**）形如

$$k(s,t)=\sum_{j=1}^{n}a_j(s)\,b_j(t)$$

的核叫做一个退化核。我们可以假定 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 和 $\{b_1,\cdots,b_n\}$ 两个集合都是 $[a,b]$ 上的线性无关组。否则，和式中的项数能进行缩减。若方程（1）对这样的一个核有解 x，证明 x 一定是下面的形式

$$x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\sum_{j=1}^{n}c_ja_j(s),\qquad c_j=\int_a^b b_j(t)x(t)dt$$

而且未知常数一定满足

$$c_j-\mu\sum_{k=1}^{n}a_{jk}c_k=y_j,\qquad a_{jk}=\int_a^b b_j(t)a_k(t)dt$$

其中

$$y_j=\int_a^b b_j(t)\tilde{y}(t)dt,\qquad j=1,2,\cdots,n$$

15. 考虑

$$x(s)-\mu\int_0^1(s+t)x(t)dt=\tilde{y}(s)$$

（a）假定 $\mu^2+12\mu-12\neq0$，并利用习题 14，求解这个方程。（b）求特征值和特征函数。

第九章　有界自伴线性算子的谱论

希尔伯特空间上的有界自伴线性算子曾在§3.10中定义并讨论过。本章专门研究它们的谱理论。由于这些算子在应用中特别的重要，所以它的谱论得到了高度的发展。

本章内容概要

在§9.1，9.2中，我们要讨论有界自伴线性算子的谱性质。在§9.3至§9.8中，我们开发那些不论就其本身，还是为了§9.9和§9.10中建立这些算子的"谱表示"都是很有意义的理论。

有界自伴线性算子T的谱是实数集（见9.1-3），并且落在区间$[m, M]$内，其中

$$m=\inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle, \quad M=\sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$$

（见9.2-1），而且对应于不同特征值的特征矢量是正交的（见9.1-1）。

有界自伴线性算子T能用积分表示（"谱定理"9.9-1和9.10-1），而积分包含了T的谱族$\mathscr{E}$（见9.8-3），所谓谱族或单位分解（见9.7-1）是指具有某些性质的投影算子族。我们还记得，曾在§3.3中利用过投影算子。然而，对现在的研究却需要这些投影算子的各种一般性质（§9.5，9.6），以及正算子的概念（§9.3）和它的平方根（§9.4）。

在§9.11中，我们把有界自伴线性算子的谱族在其预解集的点上，在特征值上和在连续谱点上的性态表征出来。（这些算子的残谱是空集；见9.2-4。）

§9.1　有界自伴线性算子的谱性质

本章所考虑的有界线性算子都是定义在复希尔伯特空间H上，并且是映H到H的。此外，这些算子都是自伴的。我们仅用一点时间回顾第3章中的两个有关的定义。

设$T: H\to H$是复希尔伯特空间H上的有界线性算子，则**希尔伯特-伴随算子**$T^*: H\to H$被定义为对一切$x, y\in H$，满足

$$\langle Tx, y\rangle=\langle x, T^*y\rangle$$

的算子。这就是定义3.9-1（$H_1=H_2=H$），从3.9-2我们知道，T^*作为H上的有界线性算子是存在而唯一的，并且范数$\|T^*\|=\|T\|$。

此外，若$T=T^*$，则称T是**自伴的或是埃尔米特的**[①]。这就是定义3.10-1。则这时$\langle Tx, y\rangle=\langle x, T^*y\rangle$成为

$$\langle Tx, y\rangle=\langle x, Ty\rangle \tag{1}$$

①在无界算子的理论中，这两个术语之间是有区别的——我们提到，T的有界性能从式(1)和关于T在整个H上有定义的假设推出。

若T是自伴的，则$\langle Tx, x\rangle$对一切$x\in H$都是实的。反之，由于H是复的，这一条件意味着T是自伴的。见3.10-3。

这就是我们简短的复习。下面我们开始研究有界自伴线性算子的谱。我们将会看到，这样的谱有一些在实用上很重要的一般性质。

有界自伴线性算子T可能没有特征值（见习题9）；但是若T有特征值，能够很容易建立起下面的基本事实。

9.1-1 定理（特征值，特征矢量） 设$T: H\to H$是复希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子，则：

(a) T的所有特征值（若存在的话）都是实的。

(b) 对应于（数值上）不同特征值的特征矢量是正交的。

证明：(a) 设λ是T的任一特征值，x是相应的特征矢量。则$x\neq 0$且$Tx=\lambda x$。利用T的自伴性，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda\langle x, x\rangle &= \langle \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle\\ &= \langle x, Tx\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle\end{aligned}$$

由于$x\neq 0$，$\langle x, x\rangle=\|x\|^2\neq 0$，用$\langle x, x\rangle$除上式两端便得到$\lambda=\bar{\lambda}$，因此$\lambda$是实的。

(b) 设λ和μ是T的特征值，而x和y是相应的特征矢量。则$Tx=\lambda x$，$Ty=\mu y$。由于T是自伴的，μ是实的，故有

$$\begin{aligned}\lambda\langle x, y\rangle &= \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle\\ &= \langle x, Ty\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

因为$\lambda\neq\mu$，故必有$\langle x, y\rangle=0$，这意味着x和y是正交的。

有界自伴算子T的整个谱甚至是实的。这个值得重视的结果（定理9.1-3）能从下面T的预解集$\rho(T)$的特征推得。

9.1-2 定理（预解集） 设$T: H\to H$是复希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子。则数λ属于T的预解集$\rho(T)$，当且仅当存在$c>0$，使得对每个$x\in H$有

$$\|T_\lambda x\|\geqslant c\|x\|,\qquad T_\lambda=T-\lambda I \tag{2}$$

证明：(a) 若$\lambda\in\rho(T)$，则$R_\lambda=T_\lambda^{-1}: H\to H$存在且是有界的（见7.2-3），不妨设$\|R_\lambda\|=k$，由于$R_\lambda\neq 0$，故$k>0$。因为$I=R_\lambda T_\lambda$，所以对每个$x\in H$都有

$$\|x\|=\|R_\lambda T_\lambda x\|\leqslant\|R_\lambda\|\,\|T_\lambda x\|=k\|T_\lambda x\|$$

这就给出了$\|T_\lambda x\|\geqslant c\|x\|$，其中$c=k^{-1}$。

(b) 反之，假若对一切$x\in H$都有一个$c>0$使式（2）成立，则让我们证明：

(α) $T_\lambda: H\longrightarrow T_\lambda(H)$是对射；

(β) $T_\lambda(H)$在H中稠密；

(γ) $T_\lambda(H)$在H中是闭的；

从而有$T_\lambda(H)=H$，并且据有界逆定理4.12-2知$R_\lambda=T_\lambda^{-1}$是有界的。

(α) 我们必须证明$T_\lambda x_1=T_\lambda x_2$蕴含着$x_1=x_2$。由于$T_\lambda$是线性的，并且从式（2）

可推出

$$0=\|T_\lambda x_1-T_\lambda x_2\|=\|T_\lambda(x_1-x_2)\|\geqslant c\|x_1-x_2\|$$

又 $c>0$，故 $\|x_1-x_2\|=0$，即 $x_1=x_2$。由于 x_1，x_2 是任意的，这就证明了 T_λ: $H\to T_\lambda(H)$ 是对射。

(β) 现在证明：$x_0\perp\overline{T_\lambda(H)}$ 蕴含着 $x_0=0$，从而据投影定理 3.3-4知 $\overline{T_\lambda(H)}=H$。令 $x_0\perp\overline{T_\lambda(H)}$，则 $x_0\perp T_\lambda(H)$。因此，对一切 $x\in H$ 有

$$0=\langle T_\lambda x,\ x_0\rangle=\langle Tx,\ x_0\rangle-\lambda\langle x,\ x_0\rangle$$

由于 T 是自伴的，因而可得到

$$\langle x,\ Tx_0\rangle=\langle Tx,\ x_0\rangle=\langle x,\ \bar\lambda x_0\rangle$$

所以据 3.8-2 有 $Tx_0=\bar\lambda x_0$。这时解只有 $x_0=0$，而 $x_0\neq0$ 是不可能的。否则，将意味着 $\bar\lambda$ 是 T 的特征值，再据 9.1-1 有 $\bar\lambda=\lambda$，从而 $Tx_0-\lambda x_0=T_\lambda x_0=0$，而据式（2）应有

$$0=\|T_\lambda x_0\|\geqslant c\|x_0\|>0,\qquad c>0$$

这就出现了矛盾。由于 x_0 是任一正交于 $\overline{T_\lambda(H)}$ 的矢量，因而 $\overline{T_\lambda(H)}^{\perp}=\{0\}$。据 3.3-4，因此有 $\overline{T_\lambda(H)}=H$，即 $T_\lambda(H)$ 在 H 中是稠密的。

(γ) 最后证明：$y\in\overline{T_\lambda(H)}$ 蕴含着 $y\in T_\lambda(H)$，从而证明 $T_\lambda(H)$ 是闭的，再据 (β) 知 $T_\lambda(H)=H$。任取 $y\in\overline{T_\lambda(H)}$，据1.4-6($a$)知，在 $T_\lambda(H)$ 中存在序列 (y_n) 收敛到 y。由于 $y_n\in T_\lambda(H)$，故对某一 $x_n\in H$ 有 $y_n=T_\lambda x_n$。根据式(2)，

$$\|x_n-x_m\|\leqslant\frac{1}{c}\|T_\lambda(x_n-x_m)\|=\frac{1}{c}\|y_n-y_m\|$$

由于 (y_n) 是收敛的，所以 (x_n) 是柯西序列。而 H 是完备的，所以 (x_n) 是收敛的，不妨设 $x_n\to x$。因为 T 是连续的，所以 T_λ 也是连续的，根据 1.4-8 便有 $y_n=T_\lambda x_n\to T_\lambda x$。据定义，$T_\lambda x\in T_\lambda(H)$。由于这个极限是唯一的，故 $T_\lambda x=y$，从而有 $y\in T_\lambda(H)$。由于 $y\in\overline{T_\lambda(H)}$ 是任取的，因此 $T_\lambda(H)$ 是闭的。从而据 (β) 有 $T_\lambda(H)=H$。这就意味着 $R_\lambda=T_\lambda^{-1}$ 在整个 H 上有定义，并且是有界的，从有界逆定理 4.12-2 或直接从式（2）都可证明这一点。因此 $\lambda\in\rho(T)$。

从这个定理立即可得到下面的基本定理。

9.1-3 定理（谱） 复希尔伯特空间 H 上的有界自伴线性算子 T: $H\to H$ 的谱 $\sigma(T)$ 是实的。

证明：我们利用定理 9.1-2 来证明：$\lambda=\alpha+i\beta$ 一定属于 $\rho(T)$，其中 α，β 是实数且 $\beta\neq0$，从而证明了 $\sigma(T)\subset\mathbf{R}$。

对于 H 中的每一 $x\neq0$，都有

$$\langle T_\lambda x,\ x\rangle=\langle Tx,\ x\rangle-\lambda\langle x,\ x\rangle$$

并且由于 $\langle x,\ x\rangle$ 和 $\langle Tx,\ x\rangle$ 都是实的（见3.10-3），故有

$$\overline{\langle T_\lambda x,\ x\rangle}=\langle Tx,\ x\rangle-\bar\lambda\langle x,\ x\rangle$$

其中 $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$。两式相减得

$$\overline{\langle T_\lambda x,\ x\rangle}-\langle T_\lambda x,\ x\rangle=(\lambda-\bar{\lambda})\langle x,\ x\rangle=2i\beta\|x\|^2$$

等式的左端是 $-2i\ \mathrm{Im}\langle T_\lambda x,\ x\rangle$，其中 Im 表示虚部。由于复数的虚部不能超过其绝对值，故上式两端用 2 除，再取绝对值，并应用许瓦兹不等式，最后便得

$$|\beta|\ \|x\|^2=|\ \mathrm{Im}\langle T_\lambda x,\ x\rangle|\leqslant|\langle T_\lambda x,\ x\rangle|\leqslant\|T_\lambda x\|\ \|x\|$$

再用 $\|x\|\neq0$ 去除便给出 $|\beta|\ \|x\|\leqslant\|T_\lambda x\|$。若 $\beta\neq0$，则据定理 9.1-2 有 $\lambda\in\rho(T)$。因此，对于 $\lambda\in\sigma(T)$ 必定有 $\beta=0$，即 λ 是实的。

习　题

1. 在课文中曾提到，对于自伴线性算子 T，内积 $\langle Tx,\ x\rangle$ 是实的。对于矩阵来讲，这意味着什么？定理 9.1-1 作为其特例包括了矩阵的哪一个熟知的定理？

2. 若在有限维的情况下，自伴线性算子 T 能用对角矩阵表示，证明这个矩阵一定是实的。T 的谱是什么？

3. 证明：在定理 9.1-2 中，R_λ 的有界性也能从式（2）推出。

4. 用一个谱为 $\{\lambda_0\}$ 的算子来说明定理 9.1-2。在这种情况下，最大的 c 是什么？

5. 设 T：$H\to H$ 和 W：$H\to H$ 是复希尔伯特空间 H 上的有界线性算子，若 T 是自伴的，证明 $S=W^*TW$ 也是自伴的。

6. 设 T：$l^2\to l^2$ 是用 $(\xi_1,\xi_2,\cdots)\mapsto(0,0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 定义的。T 是有界的吗？是自伴的吗？试求满足 $T=S^2$ 的 S：$l^2\to l^2$。

7. 设 T：$l^2\to l^2$ 是用 $y=(\eta_j)=Tx$，$x=(\xi_j)$，$\eta_j=\lambda_j\xi_j$ 来定的一个算子，其中 (λ_j) 是 **R** 上的一个有界序列，并且 $a=\inf\lambda_j$，$b=\sup\lambda_j$ 证明每个 λ_j 都是 T 的一个特征值。在什么条件下将有 $\sigma(T)\supset[a,\ b]$？

8. 利用定理 9.1-2 证明习题 7 中算子 T 的谱是特征值集合的闭包。

9. 从 2.2-7 和 3.1-5 我们知道，希尔伯特空间 $L^2[0,\ 1]$ 是内积空间 X 的完备化，而内积空间 X 是由 $[0,\ 1]$ 上的所有连续函数构成，其上的内积定义为

$$\langle x,\ y\rangle=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

证明由

$$y(t)=Tx(t)=tx(t)$$

所定义的 T：$L^2[0,\ 1]\to L^2[0,\ 1]$ 是一个没有特征值的有界自伴线性算子。

10. 值得注意的是：定义在整个复希尔伯特空间 H 上且对一切 $x,y\in H$ 都满足式（1）的线性算子 T 一定是有界的（所以在课文的开始关于有界性的假设不是必要的）。证明这一事实。

§9.2　有界自伴线性算子的其他谱性质

有界自伴线性算子 T 的谱 $\sigma(T)$ 是实的。这个重要的事实在上一节中被证明了。我们将

要看到，这种算子的谱由于有一些在数学上很有意义，而在实用上又很重要的一般性质，所以能够更详细地表征出来。根据7.3-4，很显然 $\sigma(T)$ 一定是紧的，而在目前的情况下，我们可进一步地说：

9.2-1 定理（谱） 复希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子T：$H\to H$的谱 $\sigma(T)$ 落在实轴上的闭区间$[m, M]$内，其中

$$m=\inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle, \qquad M=\sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle \tag{1}$$

证明：$\sigma(T)$落在实轴上（据9.1-3）。现证任一实数 $\lambda=M+c$，$c>0$，都属于预解集 $\rho(T)$。对每个$x\neq 0$，令 $v=\|x\|^{-1}x$，则有 $x=\|x\|v$，并且

$$\langle Tx, x\rangle=\|x\|^2\langle Tv, v\rangle\leqslant\|x\|^2\sup_{\|\tilde{v}\|=1}\langle T\tilde{v}, \tilde{v}\rangle=\langle x, x\rangle M$$

因此，$-\langle Tx, x\rangle\geqslant-\langle x, x\rangle M$据许瓦兹不等式可得

$$\begin{aligned}\|T_\lambda x\|\,\|x\|&\geqslant-\langle T_\lambda x, x\rangle=-\langle Tx, x\rangle+\lambda\langle x, x\rangle\\&\geqslant(-M+\lambda)\langle x, x\rangle\\&=c\|x\|^2\end{aligned}$$

其中 $c=\lambda-M>0$（据假设），两边用$\|x\|$去除便有不等式$\|T_\lambda x\|\geqslant c\|x\|$。因此根据9.1-2有 $\lambda\in\rho(T)$。同样的方法可证明 $\lambda<m$也属于预解集 $\rho(T)$。

式（1）中的m和M以一种有趣的方式与T的范数关联在一起。

9.2-2 定理（范数） 对于复希尔伯特空间H上的任一有界自伴线性算子T，我们有(见式（1））

$$\|T\|=\max(|m|, |M|)=\sup_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle| \tag{2}$$

证明：根据许瓦兹不等式

$$\sup_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\,\|x\|=\|T\|$$

令$K=\sup\limits_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle|$，则有$K\leqslant\|T\|$。现在证明有$\|T\|\leqslant K$。若对一切范数为1的$z$都有$Tz=0$，则$T=0$（为什么？），这时显然有$\|T\|\leqslant K$。否则，对任一满足$Tz\neq 0$且$\|z\|=1$的$z$，我们令$v=\|Tz\|^{1/2}z$，　$w=\|Tz\|^{-1/2}Tz$，　则$\|v\|^2=\|w\|^2=\|Tz\|$。现在令 $y_1=v+w$，$y_2=v-w$。则通过直接计算，消项，利用T的自伴性，可得

$$\begin{aligned}\langle Ty_1, y_1\rangle-\langle Ty_2, y_2\rangle&=2(\langle Tv, w\rangle+\langle Tw, v\rangle)\\&=2(\langle Tz, Tz\rangle+\langle T^2z, z\rangle)\\&=4\|Tz\|^2\end{aligned} \tag{3}$$

对每个 $y\neq 0$，令 $x=\|y\|^{-1}y$，则有 $y=\|y\|x$，并且

$$\begin{aligned}|\langle Ty, y\rangle|&=\|y\|^2|\langle Tx, x\rangle|\leqslant\|y\|^2\sup_{\|\tilde{x}\|=1}|\langle T\tilde{x}, \tilde{x}\rangle|\\&=K\|y\|^2\end{aligned}$$

所以通过三角不等式和直接计算便得到

$$\begin{aligned}|\langle Ty_1, y_1\rangle - \langle Ty_2, y_2\rangle| &\leqslant |\langle Ty_1, y_1\rangle| + |\langle Ty_2, y_2\rangle| \\ &\leqslant K(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2) \\ &= 2K(\|v\|^2 + \|w\|^2) \\ &= 4K\|Tz\|\end{aligned}$$

由此和（3）可以看到 $4\|Tz\|^2 \leqslant 4K\|Tz\|$，因此有 $\|Tz\| \leqslant K$，再关于所有范数为 1 的 z 取上确界，便得到 $\|T\| \leqslant K$。与前面证明的 $K \leqslant \|T\|$ 合在一起便得到式（2）。

实际上，定理 9.2-1 中关于 $\sigma(T)$ 的边界是不能再紧缩的了，这一事实可从下面定理看出。

9.2-3 定理（m和M都是谱值） H 和 T 如同定理 9.2-1 所设，并设 $H \neq \{0\}$。则式（1）中所定义的 m 和 M 都是 T 的谱值。

证明：先证 $M \in \sigma(T)$。根据谱映射定理 7.4-2，可从 T 的平移得到 $T + kI$（k 是一实常数）的谱，并且有

$$M \in \sigma(T) \Longleftrightarrow M + k \in \sigma(T + kI)$$

因此不失一般性，我们可以假定 $0 \leqslant m \leqslant M$。则据前一个定理有

$$M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle = \|T\|$$

根据上确界的定义，存在着序列 (x_n) 满足

$$\|x_n\| = 1, \quad \langle Tx_n, x_n\rangle = M - \delta_n, \quad \delta_n \geqslant 0, \quad \delta_n \to 0$$

则 $\|Tx_n\| \leqslant \|T\|\|x_n\| = \|T\| = M$，而又由于 T 是自伴的，故有

$$\begin{aligned}\|Tx_n - Mx_n\|^2 &= \langle Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n\rangle \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2M\langle Tx_n, x_n\rangle + M^2\|x_n\|^2 \\ &\leqslant M^2 - 2M(M - \delta_n) + M^2 = 2M\delta_n \to 0\end{aligned}$$

因此，不存在正数 c 使得

$$\|T_M x_n\| = \|Tx_n - Mx_n\| \geqslant c = c\|x_n\| \qquad (\|x_n\| = 1)$$

根据定理 9.1-2，这表明 $\lambda = M$ 不能属于 T 的预解集，因此有 $M \in \sigma(T)$。类似地可证 $\lambda = m \in \sigma(T)$。

把线性算子的谱分成点谱和另外一部分似乎是自然的，因为在有限维空间中，点谱以外的另一部分是不存在的，从矩阵理论可以看出这一点（见 §7.1）。现在由于类似的原因可把所谓的另一部分分成连续谱和残谱，因为对于大量而重要的一类自伴线性算子来说，其残谱是空集。

9.2-4 定理（残谱） 复希尔伯特空间 H 上的有界自伴线性算子 $T: H \to H$ 的残谱 $\sigma_r(T)$ 是空集。

证明：我们证明由假设 $\sigma_r(T) \neq \varnothing$ 可导出矛盾。设 $\lambda \in \sigma_r(T)$，根据 $\sigma_r(T)$ 的定义，T_λ 的逆是存在的，但其定义域 $\mathscr{D}(T_\lambda^{-1})$ 在 H 中不是稠密的。因此，根据投影定理 3.3-4，

在H中有 $y \neq 0$正交于$\mathscr{D}(T_\lambda^{-1})$。而$\mathscr{D}(T_\lambda^{-1})$是$T_\lambda$的值域，因此对一切$x \in H$有

$$\langle T_\lambda x, y\rangle = 0$$

又由于λ是实的（见9.1-3）和T是自伴的，因而对一切x有$\langle x, T_\lambda y\rangle = 0$。特别取$x = T_\lambda y$，便得到$\|T_\lambda y\|^2 = 0$，所以有

$$T_\lambda y = Ty - \lambda y = 0$$

由于$y \neq 0$，这表明λ是T的一个特征值。但这与$\lambda \in \sigma_r(T)$矛盾。因此$\sigma_r(T) \neq \varnothing$是不可能的，从而推出$\sigma_r(T) = \varnothing$。

习　题

1. 对于$\lambda < m$，给出定理 9.2-1 的证明。

2. 从定理 9.2-1，关于厄米特矩阵$A = (\alpha_{jk})$的特征值能得到什么定理?

3. 若T是从希尔伯特空间H到其真子空间$Y \neq \{0\}$上的投影算子，求m和M（见定理9.2-1)。

4. 求证在定理 9.2-3 中的$m \in \sigma(T)$。

5. 证明：复希尔伯特空间$H \neq \{0\}$上的有界自伴线性算子的谱是非空的，利用本节定理之一证明。

6. 证明：复希尔伯特空间$H \neq \{0\}$上的紧自伴性算子T：$H \to H$至少有一个特征值。

7. 考虑用$y = Tx$，$x = (\xi_j)$，$y = (\eta_j)$，$\eta_j = \xi_j / j$，$j = 1, 2, \cdots$所定义的算子$T: l^2 \to l^2$。在8.1-6 中曾证明T是紧的。求T的谱。证明$0 \in \sigma_c(T)$，实际上$\sigma_c(T) = \{0\}$。(关于$0 \in \sigma_p(T)$或$0 \in \delta_r(T)$的紧算子T，见§8.4 习题 4.5。)

8. **（瑞利商）** 证明（1）能够写成

$$\sigma(T) \subset [\inf_{x \neq 0} q(x), \sup_{x \neq 0} q(x)], \qquad q(x) = \frac{\langle Tx, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

其中$q(x)$叫做瑞利商。

9. 若$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$是厄米特矩阵$A$的特征值，证明

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} q(x), \quad \lambda_n = \min_{x \neq 0} q(x), \quad q(x) = \frac{\bar{x}^T A x}{\bar{x}^T x}$$

进一步证明

$$\lambda_j = \max_{\substack{x \in Y_j \\ x \neq 0}} q(x), \qquad j = 2, 3, \cdots, n$$

其中Y_j是$\mathbf{C}^n$的、由正交于$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{j-1}$所对应的特征矢量的所有矢量构成的子空间。

10. 证明：所有元皆为正的实对称矩阵$A = (\alpha_{jk})$有一个正特征值。（能够证明这个论断在没有对称性的假设下也是成立的；这是著名的佩龙($Perron$)和弗罗比尼乌斯($Frobenius$)定理的一部分，见甘特马赫尔〔$F.R.Gantmacher$ (1960)，Vol，Ⅰ，pp.53。〕

§9.3 正算子

从§9.1知道，若T是自伴的，$\langle Tx, x\rangle$是实的。因此，我们可以考虑复希尔伯特空间H上的所有有界自伴线性算子的集合，并且通过定义：

$$T_1 \leqslant T_2 \text{当且仅当对一切} x \in H \text{有} \langle T_1x, x\rangle \leqslant \langle T_2x, x\rangle \qquad (1)$$

在这个集合上引入半序$\leqslant$（见§4.1）。有时也把$T_1 \leqslant T_2$写为$T_2 \geqslant T_1$。

一个特别重要的情况是：有界自伴线性算子$T: H \to H$，当且仅当对一切$x \in H$都有$\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$，便称作是**正的**，记为$T \geqslant 0$。因此这个定义可表示为

$$T \geqslant 0, \text{当且仅当对一切} x \in H \text{有} \langle Tx, x\rangle \geqslant 0 \qquad (2)$$

有时也把$T \geqslant 0$写为$0 \leqslant T$。实际上，这样的算子应叫做“非负的”，而“正的”是常见的术语。

要注意在式（1）和式（2）之间有一个简单的关系，即

$$T_1 \leqslant T_2 \Longleftrightarrow 0 \leqslant T_2 - T_1$$

也就是，当且仅当$T_2 - T_1$是正的时式（1）才成立。

这一节和下一节我们专门研究正算子和它的平方根。这个课题不论就其本身，还是作为本章稍后推导有界自伴线性算子的谱表示的工具，都是很有意义的。

正算子之和是正的。

从定义来看这是显然的。我们再来看正算子之积。从3.10-4我们知道，有界自伴线性算子的积（或合成）当且仅当算子可交换时是自伴的。而将会看到，在这种情况下，正性也是保持的。这一事实在我们后面的研究中要经常用到。

9.3-1 定理（正算子之积） 若希尔伯特空间H上的两个有界自伴线性算子S和T都是正的，并且是可交换的（$ST = TS$），则它们的积ST是正的。

证明：我们必须证明对一切$x \in H$有$\langle STx, x\rangle \geqslant 0$。若$S = 0$，这是成立的。设$S \neq 0$。我们分（$a$）和（$b$）两步来处理：

（a）先考虑

$$S_1 = \|S\|^{-1}S, \qquad S_{n+1} = S_n - S_n^2, \qquad n = 1, 2, \cdots \qquad (3)$$

并用归纳法证明

$$0 \leqslant S_n \leqslant I \qquad (4)$$

（b）再证明对一切$x \in H$有$\langle STx, x\rangle \geqslant 0$。

详细证明如下。

（a）对于$n = 1$，不等式（4）是成立的。事实上，假设$0 \leqslant S$蕴含着$0 \leqslant S_1$，用许瓦兹不等式和不等式$\|Sx\| \leqslant \|S\| \|x\|$，可得

$$\langle S_1x, x\rangle = \|S\|^{-1}\langle Sx, x\rangle \leqslant \|S\|^{-1}\|Sx\| \|x\|$$
$$\leqslant \|x\|^2 = \langle Ix, x\rangle$$

从而证明了$S_1 \leqslant I$。现假定（4）对于$n=k$成立，即

$$0 \leqslant S_k \leqslant I, \qquad 0 \leqslant I - S_k \leqslant I$$

则由于S_k是自伴的，故对每个$x \in H$和$y = S_k x$有

$$\begin{aligned}\langle S_k^2 (I - S_k) x, x \rangle &= \langle (I - S_k) S_k x, \ S_k x \rangle \\ &= \langle (I - S_k) y, \ y \rangle \geqslant 0\end{aligned}$$

根据定义这就证明了

$$S_k^2 (I - S_k) \geqslant 0$$

类似地，有

$$S_k (I - S_k)^2 \geqslant 0$$

把两式相加再化简，便有

$$0 \leqslant S_k^2 (I - S_k) + S_k (I - S_k)^2 = S_k - S_k^2 = S_{k+1}$$

因此$0 \leqslant S_{k+1}$。把$S_k^2 \geqslant 0$和$I - S_k \geqslant 0$相加，可推出$S_{k+1} \leqslant I$；事实上有

$$0 \leqslant I - S_k + S_k^2 = I - S_{k+1}$$

这就完成了对（4）的归纳法证明。

（b）现在证明对一切$x \in H$有$\langle STx, \ x \rangle \geqslant 0$。由式（3）可递推出

$$\begin{aligned}S_1 &= S_1^2 + S_2 \\ &= S_1^2 + S_2^2 + S_3 \\ &\cdots\cdots \\ &= S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2 + S_{n+1}\end{aligned}$$

由于$S_{n+1} \geqslant 0$，这就意味着

$$S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2 = S_1 - S_{n+1} \leqslant S_1 \tag{5}$$

据"$\leqslant$"的定义及S_j的自伴性，这就意味着

$$\sum_{j=1}^{n} \| S_j x \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle S_j x, \ S_j x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle S_j^2 x, x \rangle \leqslant \langle S_1 x, x \rangle$$

由于上式对任意的n都成立，故无穷级数$\sum\limits_{j=1}^{\infty} \| S_j x \|^2$是收敛的。因此$\| S_n x \| \to 0$，$S_n x \to 0$。根据式（5）

$$\left(\sum_{j=1}^{n} S_j^2 \right) x = (S_1 - S_{n+1}) x \to S_1 x \qquad (n \to \infty) \tag{6}$$

由于各个S_j都是$S_1 \| S \|^{-1} S$的和及积，而S与T是可交换的，故所有的S_j都与T可交换。利用$S = \| S \| S_1$、公式（6）、$T \geqslant 0$以及内积的连续性，对每个$x \in H$和$y_j = S_j x$可得到

$$\langle STx, x\rangle = \|S\| \langle TS_1x, x\rangle$$
$$= \|S\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle TS_j^2x, x\rangle$$
$$= \|S\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle Ty_j, y_j\rangle \geqslant 0$$

也就是$\langle STx, x\rangle \geqslant 0$。

由式（2）所定义的半序关系还促使我们提出如下的定义：

9.3-2 定义（单调序列） 希尔伯特空间H上的单调自伴线性算子T_n的序列(T_n)是指单调递增的序列

$$T_1 \leqslant T_2 \leqslant \cdots$$

或单调递减的序列

$$T_1 \geqslant T_2 \geqslant \cdots$$

单调递增序列有如下的值得注意的性质。（对单调递减序列也有类似的定理成立。）

9.3-3 定理（单调序列） 设(T_n)是复希尔伯特空间H上的满足关系

$$T_1 \leqslant T_2 \leqslant \cdots \leqslant T_n \leqslant \cdots \leqslant K \qquad (7)$$

的有界自伴线性算子序列，其中K也是H上的一个有界自伴线性算子。假定(T_n)中的每两个都可换且与K可换，则(T_n)是强算子收敛的（对所有的$x\in H$都有$T_nx\to Tx$），且极限算子T是线性、有界和自伴的，并满足$T\leqslant K$。

证明：我们考察$S_n = K - T_n$，并证明：

(*a*) 序列$(\langle S_n^2x, x\rangle)$对每个$x\in H$都是收敛的。

(*b*) $T_nx\to Tx$，其中T是线性、自伴的，并据一致有界性定理知T是有界的。

详细证明如下。

(a) 很显然，S_n是自伴的。并且有

$$S_m^2 - S_nS_m = (S_m - S_n)S_m = (T_n - T_m)(K - T_m)$$

设$m<n$，则据式（7）知$T_n - T_m$和$K - T_m$都是正的。由于这些算子可交换，所以据定理9.3-1知它们的积也是正的。因此，在左端有$S_m^2 - S_nS_m \geqslant 0$，即对于$m<n$有$S_m^2 \geqslant S_nS_m$。类似地有

$$S_nS_m - S_n^2 = S_n(S_m - S_n) = (K - T_n)(T_n - T_m) \geqslant 0$$

所以$S_nS_m \geqslant S_n^2$。合在一起有

$$S_m^2 \geqslant S_nS_m \geqslant S_n^2 \qquad (m<n)$$

根据定义，并利用S_n的自伴性，便有

$$\langle S_m^2x, x\rangle \geqslant \langle S_nS_mx, x\rangle \geqslant \langle S_n^2x, x\rangle$$
$$= \langle S_nx, S_nx\rangle = \|S_nx\|^2 \geqslant 0 \qquad (8)$$

这就证明了：对固定的x，$(\langle S_n^2x, x\rangle)$是一个单调递减的非负的数列。因此它是收敛的。

(b) 现在证明 $(T_n x)$ 收敛。据假设，每个T_m和每个T_n及K都是可换的，因此所有的S_j也都是可换的。这些算子都是自伴的。根据式(8)有 $-2\langle S_m S_n x, x\rangle \leqslant -2\langle S_n^2 x, x\rangle$，其中$m<n$，因而有

$$
\begin{aligned}
\| S_m x - S_n x \|^2 &= \langle (S_m - S_n)x,\ (S_m - S_n)x\rangle \\
&= \langle (S_m - S_n)^2 x,\ x\rangle \\
&= \langle S_m^2 x,\ x\rangle - 2\langle S_m S_n x,\ x\rangle + \langle S_n^2 x,\ x\rangle \\
&\leqslant \langle S_m^2 x,\ x\rangle - \langle S_n^2 x,\ x\rangle
\end{aligned}
$$

由此及 (a) 中所证明的收敛性可以看出 $(S_n x)$ 是一个柯西序列。由于H是完备的，故它是收敛的。因为$T_n = K - S_n$，故 $(T_n x)$ 也是收敛的。很显然收敛的极限与 x 有关，所以我们对每个 $x\in H$能够写为$T_n x \to T x$。这样就定义了一个算子 T：$H\to H$，并且 T 是线性的。由于T_n是自伴的，内积是连续的，所以T 也是自伴的。因为 $(T_n x)$ 收敛，所以对每个 $x\in H$都是有界的。据一致有界性定理 4.7-3 便得出T是有界的结论。最后，从 $T_n \leqslant K$可推出$T\leqslant K$。

习　题

1. 设S和T是复希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子。若$S\leqslant T$且$S\geqslant T$，证明$S=T$。

2. 证明：(1) 在复希尔伯特空间H上的所有有界自伴线性算子集合上定义了一个半序关系（见定义4.1-1），并且对任一这样的算子T有

$$T_1\leqslant T_2 \Longrightarrow T_1 + T \leqslant T_2 + T$$

$$T_1\leqslant T_2 \Longrightarrow \alpha T_1 \leqslant \alpha T_2 \qquad (\alpha\geqslant 0)$$

3. 设A，B，T是复希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子。若$T\geqslant 0$且与A和B可交换，证明

$$A\leqslant B \Longrightarrow AT\leqslant BT$$

4. 若T：$H\to H$是复希尔伯特空间H上的有界线性算子，证明TT^*和T^*T是自伴的，并且是正的。证明TT^*和T^*T的谱是实的且不含有负值。对于方阵A来讲，第二个论断的结论是什么？

5. 证明：复希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子T是正的，当且仅当T的谱只由非负实值组成。对于矩阵这意味着什么？

6. 设T：$H\to H$和W：$H\to H$都是复希尔伯特空间H上的有界线性算子，且设$S=W^*TW$。证明：若T是自伴的和正的，则S也是。

7. 设T_1和T_2是复希尔伯特空间 H 上的有界自伴线性算子，并假定 $T_1T_2=T_2T_1$，$T_2\geqslant 0$。证明$T_1^2T_2$是自伴的和正的。

8. 设S和T是希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子。若$S\geqslant 0$，证明$TST\geqslant 0$。

9. 证明：若$T\geqslant 0$，则 $(I+T)^{-1}$存在。

10. 设T是复希尔伯特空间上的任一有界线性算子。证明 $I+T^*T$ 的逆是存在的。

11. 证明：序列 (P_n) 是说明定理9.3-3的一个例子，其中P_n是l^2到l^2的子空间M_n上的投影，而子空间M_n是由所有满足"$\xi_j=0$，$j>n$"的序列$x=(\xi_j)\in l^2$构成的。

12. 若T是复希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子，证明T^2是正的。对于矩阵意味着什么？

13. 若T是复希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子，证明T^2的谱不能含有负值。它推广了矩阵的哪一个定理？

14. 若T：$H\to H$和S：$H\to H$是有界线性算子并且T是紧的，又$S^*S\leqslant T^*T$，证明S是紧的。

15. 设T：$H\to H$是无穷维复希尔伯特空间H上的有界线性算子。若存在$c>0$使得对一切$x\in H$有$\|Tx\|\geqslant c\|x\|$，证明T不是紧的。

§9.4 正算子的平方根

若T是自伴的，由于$\langle T^2x, x\rangle=\langle Tx, Tx\rangle\geqslant 0$，故$T^2$是正的。我们现在考虑其逆问题：给定一个正算子$T$，求一个自伴算子$A$，要求它满足$A^2=T$。这就建议我们提出如下的概念，它在研究谱表示方面是很基本的。

9.4-1 定义（正平方根） 设T：$H\to H$是复希尔伯特空间H上的正有界自伴线性算子。若有界自伴线性算子A满足

$$A^2=T \tag{1}$$

则称A为T的一个平方根。若还有$A\geqslant 0$，则称A为T的正平方根，并记之为

$$A=T^{1/2}$$

正平方根$T^{1/2}$存在且是唯一的。

9.4-2 定理（正平方根） 复希尔伯特空间H上的每一个正有界自伴线性算子T：$H\to H$都有唯一的正平方根A。H上的与T可交换的每个有界线性算子都与A可交换。

证明：我们把定理的证明分作三步处理。

(a) 首先证明，若在附加的假设$T\leqslant I$之下定理成立，则去掉附加的假设仍成立。

(b) 再从$A_nx\to Ax$得到算子$A=T^{1/2}$的存在性，其中$A_0=0$，并且

$$A_{n+1}=A_n+\frac{1}{2}(T-A_n^2),\quad n=0,1,\cdots, \tag{2}$$

还要证明定理中所说的可交换性。

(c) 最后证明正平方根的唯一性。

详细证明如下。

(a) 若$T=0$，则可取$A=T^{1/2}=0$。设$T\neq 0$。根据许瓦兹不等式，有

$$\langle Tx, x\rangle\leqslant\|Tx\|\,\|x\|\leqslant\|T\|\,\|x\|^2$$

不等式两端用$\|T\|\neq 0$去除，并令$Q=\|T\|^{-1}T$，则得

$$\langle Qx, x\rangle\leqslant\|x\|^2=\langle Ix, x\rangle$$

即$Q\leqslant I$。假若Q有唯一的正平方根$B=Q^{1/2}$，则$B^2=Q$，并且可以看出：由于

$$(\|T\|^{1/2}B)^2=\|T\|B^2=\|T\|Q=T$$

所以$T=\|T\|Q$的一个平方根是$\|T\|^{1/2}B$。而且不难看出，$Q^{1/2}$的唯一性蕴含着T的正平方根的唯一性。

因此，若我们能够在$T\leqslant I$的前提下证明定理成立，则定理9.4-2便告成立。

(b) 存在性。我们来考虑(2)。由于$A_0=0$，故有$A_1=\frac{1}{2}T$，$A_2=T-\frac{1}{8}T^2,\cdots$，每个$A_n$都是$T$的一个多项式。因此$A_n$是自伴的，相互之间是可交换的，并且能与每个和$T$可交换的算子交换。现在来证明

$$A_n\leqslant I,\qquad n=0,1,\cdots \tag{3}$$

$$A_n\leqslant A_{n+1},\ n=0,1,\cdots \tag{4}$$

$$A_nx\rightarrow Ax,\ A=T^{1/2}, \tag{5}$$

$$ST=TS\ \Rightarrow\ AS=SA \tag{6}$$

其中S是H上的有界线性算子。

(3)的证明：

首先有$A_0\leqslant I$。设$n>0$。由于$I-A_{n-1}$是自伴的，所以$(I-A_{n-1})^2\geqslant 0$。而且$T\leqslant I$意味着$I-T\geqslant 0$。由此及(2)便得到(3)：

$$\begin{aligned}0&\leqslant\frac{1}{2}(I-A_{n-1})^2+\frac{1}{2}(I-T)\\&=I-A_{n-1}-\frac{1}{2}(T-A_{n-1}^2)\\&=I-A_n\end{aligned}$$

(4)的证明：

利用归纳法。(2)给出了$0=A_0\leqslant A_1=\frac{1}{2}T$。我们来证明对任一固定的$n$，$A_{n-1}\leqslant A_n$蕴含着$A_n\leqslant A_{n+1}$。由(2)可直接计算出

$$\begin{aligned}A_{n+1}-A_n&=A_n+\frac{1}{2}(T-A_n^2)-A_{n-1}-\frac{1}{2}(T-A_{n-1}^2)\\&=(A_n-A_{n-1})[I-\frac{1}{2}(A_n+A_{n-1})]\end{aligned}$$

据归纳假设$A_n-A_{n-1}\geqslant 0$，根据(3)，$[\cdots]\geqslant 0$。因此据9.3-1有$A_{n+1}-A_n\geqslant 0$。

(5)的证明：

根据(4)知(A_n)是单调的，而据(3)又有$A_n\leqslant I$。因此根据定理9.3-3可推出，存在一个有界自伴线性算子A使得对一切$x\in H$有$A_nx\rightarrow Ax$。由于(A_nx)收敛，故(2)给出了

$$A_{n+1}x - A_n x = \frac{1}{2}(Tx - A_n^2 x) \to 0, \quad n \to \infty$$

因此对一切 $x \in H$ 有 $Tx - A^2 x = 0$，此即 $T = A^2$。根据（4）有 $0 = A_0 \leqslant A_n$，即对每个 $x \in H$ 有 $\langle A_n x, x \rangle \geqslant 0$ 从而据内积的连续性（见3.2-2），可推出对每个 $x \in H$ 有 $\langle Ax, x \rangle \geqslant 0$。这便证明了 $A \geqslant 0$。

（6）的证明：

按照（3）的前面的一段证明，我们知道 $ST = TS$ 意味着 $A_n S = SA_n$，亦即对一切 $x \in H$ 有 $A_n Sx = SA_n x$。令 $n \to \infty$，便得到（6）。

（c）唯一性。设 A 和 B 都是 T 的正平方根。则 $A^2 = B^2 = T$。并且也有 $BT = BB^2 = B^2 B = TB$，所以据（6）有 $AB = BA$。令 $x \in H$ 是任取的，并且 $y = (A - B)x$。则由于 $A \geqslant 0$，$B \geqslant 0$，故有 $\langle Ay, y \rangle \geqslant 0$，$\langle By, y \rangle \geqslant 0$，利用 $AB = BA$，$A^2 = B^2$，便得到：

$$\langle Ay, y \rangle + \langle By, y \rangle = \langle (A + B)y, y \rangle = \langle (A^2 - B^2)x, y \rangle = 0$$

因此 $\langle Ay, y \rangle = \langle By, y \rangle = 0$。由于 $A \geqslant 0$ 且是自伴的，故 A 有一个正平方根 C，即 $C^2 = A$，并且 C 也是自伴的。因而得到

$$0 = \langle Ay, y \rangle = \langle C^2 y, y \rangle = \langle Cy, Cy \rangle = \| Cy \|^2$$

即 $Cy = 0$。并且 $Ay = C^2 y = C(Cy) = 0$。类似地可证明 $By = 0$。因此 $(A - B)y = 0$。利用 $y = (A - B)x$，因而对一切 $x \in H$ 有

$$\| Ax - Bx \|^2 = \langle (A - B)^2 x, x \rangle = \langle (A - B)y, x \rangle = 0$$

这就证明了，对一切 $x \in H$ 有 $Ax - Bx = 0$，此即 $A = B$。

平方根的应用将在§9.8中研究。实际上，在研究有界自伴线性算子的谱表示方面，平方根将起着很基本的作用。

习　题

1.求一个算子 T：$R^2 \to R^2$，它满足 $T^2 = I$，其中 I 为恒等算子。指出哪一个方根是 I 的正平方根。

2.设 T：$L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ 是用 $(Tx)(t) = tx(t)$ 定义的算子（见3.1-5）。证明 T 是自伴的和正的，并求它的正平方根。

3.设 T：$l^2 \to l^2$ 是用 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) \mapsto (0, 0, \xi_3, \xi_4, \cdots)$ 定义的算子。T 是有界的吗？自伴的吗？正的吗？求 T 的平方根。

4.证明：对于定理9.4-2中的平方根有

$$\| T^{1/2} \| = \| T \|^{1/2}$$

5.设 T：$H \to H$ 是复希尔伯特空间 H 上的一个有界正自伴线性算子。利用 T 的正平方根证明，对一切 x，$y \in H$ 有

$$| \langle Tx, y \rangle | \leqslant \langle Tx, x \rangle^{1/2} \langle Ty, y \rangle^{1/2}$$

6. 有趣的是，习题5中的论述不用$T^{1/2}$也是能够证明的。给出这样的一个证明（这个结果和许瓦兹不等式类似）。

7. 证明：在习题5中，对一切$x \in H$有

$$\| Tx \| \leqslant \| T \|^{1/2} \langle Tx, x \rangle^{1/2}$$

所以$\langle Tx, x \rangle = 0$，当且仅当$Tx = 0$。

8. 设B是一个非奇异的n阶实方阵，而且$C = BB^{T}$。证明C有一个非奇异的正平方根A。

9. 设A和B是习题8中的矩阵，证明$D = A^{-1}B$是一个正交矩阵（见3.10-2）。

10. 若S和T是复希尔伯特空间H上的正有界自伴线性算子，并且$S^2 = T^2$，证明$S = T$。

§9.5 投影算子

投影算子P，或简单地叫投影P，曾在§3.3中定义过，在那里希尔伯特空间H被表示为闭子空间Y与其正交补$Y^{\perp}$之直和；因而

$$H = Y \oplus Y^{\perp} \tag{1}$$

$$x = y + z, \qquad y \in Y, \qquad z \in Y^{\perp}$$

由于和是直和，所以对任一给定的$x \in H$，y是唯一的。因此（1）定义了一个线性算子

$$P: H \to H \tag{2}$$

$$x \mapsto y = Px$$

P叫做H上的一个正交投影或**投影**。更明确点说，P叫做H到Y上的投影。因此，对H上的线性算子P：$H \to H$，若存在H的闭子空间Y使得$Y = \mathscr{R}(P)$，$Y^{\perp} = \mathscr{N}(P)$且$P|_Y$是$Y$上的恒等算子，则$P$是$H$上的一个投影。

现在可以看到式（1）中的x能够写为

$$x = y + z = Px + (I - P)x$$

这表明H到$Y^{\perp}$上的投影是$I - P$。

H上的投影还有另外的特征，有时把它当作投影的定义：

9.5-1 定理（投影） 希尔伯特空间H上的有界线性算子P：$H \to H$是一个投影，当且仅当P是自伴的和幂等的（即$P^2 = P$）。

证明：(a) 假定P是H上的一个投影，并用Y表示$P(H) = \mathscr{R}(P)$。则因为对每个$x \in H$和$Px = y \in Y$有

$$P^2 x = Py = y = Px$$

故$P^2 = P$。此外，设$x_1 = y_1 + z_1$，$x_2 = y_2 + z_2$，其中$y_1, y_2 \in Y$，$z_1, z_2 \in Y^{\perp}$，则因为$Y \perp Y^{\perp}$，故有$\langle y_1, z_2 \rangle = \langle y_2, z_1 \rangle = 0$，而从

$$\langle Px_1, x_2\rangle = \langle y_1, y_2 + z_2\rangle = \langle y_1, y_2\rangle$$
$$= \langle y_1 + z_1, y_2\rangle = \langle x_1, Px_2\rangle$$

可看出P是自伴的。

(b) 反过来，假定$P^2 = P = P^*$，并用Y表示$P(H)$。则对每个$x\in H$，

$$x = Px + (I-P)x$$

从下式

$$\langle Px, (I-P)v\rangle = \langle x, P(I-P)v\rangle = \langle x, Pv - P^2v\rangle$$
$$= \langle x, 0\rangle = 0$$

可推得正交性：$Y = P(H)\perp(I-P)(H)$。因为从

$$(I-P)Px = Px - P^2x = 0$$

可以看出$Y\subset\mathcal{N}(I-P)$，而$(I-P)x = 0$意味着$x = Px$表明$Y\supset\mathcal{N}(I-P)$，从而说明Y是$I-P$的零空间$\mathcal{N}(I-P)$。根据2.7-10(*b*)，Y是闭的。最后，由于记$y = Px$，便有$Py = P^2x = Px = y$，说明$P|_Y$是Y上的恒等算子。

我们将会看到，相对来说投影有简单而明晰的性质。这就促使我们用这样的简单算子去表示希尔伯特空间上的更为复杂的线性算子。因为我们还会看到，为此所使用的投影与算子的谱关联在一起，所以得到的表示又叫做算子的谱表示。而谱表示也说明了投影的极大重要性。

我们将在§9.9中给出有界自伴线性算子的谱表示。为达到这一目标需要做的第一步工作是研究投影的一般性质。这就是本节和下一节要做的工作。而第二步工作是要对投影下一个合适的定义，即定义一个所谓谱族的单参数投影族（§9.7）。第三步工作是要针对给定的有界自伴线性算子T，以唯一的方式给出它的谱族（§9.8），又叫做T的谱族。在§9.9中用这个谱族给出我们所希望的T的谱表示。在§9.10中讨论这种谱表示的一个推广。最后，在§9.11中讨论谱族在不同的谱点上的特性。以上就是本章余下的几节的研究计划。

象上面指出的那样，让我们从研究投影的基本性质开始。首先让我们证明投影总是正算子。

9.5-2 定理（正性，范数） 对希尔伯特空间H上的每个投影P都有

$$\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2 \tag{3}$$

$$P\geqslant 0 \tag{4}$$

$$\|P\|\leqslant 1,\ 若P(H)\neq\{0\},\ 则\|P\| = 1 \tag{5}$$

证明：从下式

$$\langle Px, x\rangle = \langle P^2x, x\rangle = \langle Px, Px\rangle = \|Px\|^2\geqslant 0$$

可推式（3）和式（4）。再据许瓦兹不等式有

$$\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle\leqslant\|Px\|\|x\|$$

所以对每个$x\neq 0$有$\|Px\|/\|x\|\leqslant 1$，故$\|P\|\leqslant 1$。并且若$x\in P(H)$，又$x\neq 0$，便有$\|Px\|/\|x\| = 1$，这就证明了式（5）。

投影算子之积，未必是一个投影，但有如下的基本定理。

9.5-3 定理（投影之积） 对于希尔伯特空间H上的投影算子之积（合成），有如下两个论断成立。

（a）$P=P_1P_2$是H上的一个投影，当且仅当投影P_1和P_2是可换的，即$P_1P_2=P_2P_1$。并且P把H投影到$Y=Y_1\cap Y_2$上，其中$Y_j=P_j(H)$。

（b）H的两个闭子空间Y和V是正交的，当且仅当对应的投影满足$P_YP_V=0$。

证明：(a) 假若$P_1P_2=P_2P_1$，则据定理3.10-4，P是自伴的。又由于

$$P^2=(P_1P_2)(P_1P_2)=P_1{}^2P_2{}^2=P_1P_2=P$$

故P是幂等的。因此，据9.5-1知P是一个投影，并且对每个$x\in H$有

$$Px=P_1(P_2x)=P_2(P_1x)$$

由于P_1把H投影到Y_1上，所以必有$P_1(P_2x)\in Y_1$。类似地有$P_2(P_1x)\in Y_2$。合在一起有$Px\in Y_1\cap Y_2$。由于$x\in H$是任意的，这就证明了P把H投影到$Y=Y_1\cap Y_2$中。精确地讲，P把H投影到Y上。事实上，若$y\in Y$，则$y\in Y_1$，$y\in Y_2$，并且

$$Py=P_1P_2y=P_1y=y$$

反之，若$P=P_1P_2$是定义在H上的一个投影，则据9.5-1，P是自伴的，并且从定理3.10-4可推出$P_1P_2=P_2P_1$。

（b）若$Y\perp V$，则$Y\cap V=\{0\}$，并且据（a)对一切$x\in H$有$P_YP_Vx=0$，所以$P_YP_V=0$。

反过来，若$P_YP_V=0$，则对每个$y\in Y$和$v\in V$可得到

$$\langle y,v\rangle=\langle P_Yy,P_Vv\rangle=\langle y,P_YP_Vv\rangle=\langle y,0\rangle=0$$

因此$Y\perp V$。

类似地，投影之和未必是一个投影，但有

9.5-4 定理（投影之和） 设P_1和P_2是希尔伯特空间H上的投影，则

（a）和$P=P_1+P_2$是H上的投影，当且仅当$Y_1=P_1(H)$与$Y_2=P_2(H)$是正交的。

（b）若$P=P_1+P_2$是一个投影，则P把H投影到$Y=Y_1\oplus Y_2$上。

证明：(a) 若$P=P_1+P_2$是一个投影，据9.5-1，$P=P^2$，写出来有

$$P_1+P_2=(P_1+P_2)^2=P_1{}^2+P_1P_2+P_2P_1+P_2{}^2$$

根据9.5-1，在右端有$P_1{}^2=P_1$，$P_2{}^2=P_2$，消项后有

$$P_1P_2+P_2P_1=0 \tag{6}$$

上式左乘P_2便得

$$P_2P_1P_2+P_2P_1=0 \tag{7}$$

上式再右乘P_2，便得$2P_2P_1P_2=0$，所以根据式（7）得到$P_2P_1=0$，再据9.5-3(b)有$Y_1\perp Y_2$。

反之，若$Y_1\perp Y_2$，则据9.5-3(b)有$P_1P_2=P_2P_1=0$这就给出了（6），它意味着

$P^2=P$。由于P_1和P_2是自伴的，所以$P=P_1+P_2$也是自伴的。因此根据9.5-1，P是一个投影。

(b) 我们来确定闭子空间$Y\subset H$，使得P把H投影到Y上。由于$P=P_1+P_2$，所以对每个$x\in H$都有

$$y=Px=P_1x+P_2x$$

这里$P_1x\in Y_1$，$P_2x\in Y_2$。因此$y\in Y_1\oplus Y_2$，从而有$Y\subset Y_1\oplus Y_2$。

现在证明$Y\supset Y_1\oplus Y_2$。任取$v\in Y_1\oplus Y_2$，则有$v=y_1+y_2$，其中$y_1\in Y_1$，$y_2\in Y_2$。用P作用，再利用$Y_1\perp Y_2$，便得到

$$Pv=P_1(y_1+y_2)+P_2(y_1+y_2)=P_1y_1+P_2y_2=y_1+y_2=v$$

因此$v\in Y$，从而$Y\supset Y_1\oplus Y_2$。合在一起，便证明了$Y=Y_1\oplus Y_2$。

习　题

1. 证明：希尔伯特空间H上的投影P满足

$$0\leqslant P\leqslant I$$

在什么条件下将有 (i) $P=0$，(ii) $P=I$？

2. 设$Q=S^{-1}PS$：$H\to H$，其中S和P是有界和线性的。若P是一个投影，S是一个酉算子，证明Q是一个投影。

3. 找出线性算子T：$R^2\to R^2$，它是等幂的，但不是自伴的(所以不是投影；见9.5-1)。

4. 举出$\mathbf{R}^3$中的投影P_1, P_2的例子来说明定理 9.5-3，使得P_1P_2既不是P_1，也不是P_2。

5. 把定理 9.5-4 推广到和$P=P_1+P_2+\cdots+P_m$。

6. 在习题5中，设$Y_j=P_j(H)$，$j=1,2,\cdots,m$，并设$Y=P(H)$。证明每个$x\in Y$都有表示

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_m,\qquad x_j=P_jx\in Y_j$$

并且，反过来若$x\in H$能表成这种形式，则$x\in Y$，而且这个表示是唯一的。

7. 给出一个简单例子，它能说明两个投影之和未必是一个投影。

8. 若投影P_j：$H\to H$之和$P_1+P_2+\cdots+P_k$是一个投影，其中H是希尔伯特空间。证明

$$\|P_1x\|^2+\|P_2x\|^2+\cdots+\|P_kx\|^2\leqslant\|x\|^2$$

9. 从本节的定理如何得到贝塞尔不等式 (§3.4)。

10. 设P_1和P_2分别是希尔伯特空间H到Y_1和Y_2上的投影，并且$P_1P_2=P_2P_1$。证明

$$P_1+P_2-P_1P_2$$

是一个投影，即H到Y_1+Y_2上的投影。

§9.6 投影的其它性质

鉴于上节一开始所阐明的理由，我们要研究投影的其他性质，这些性质后面将要用到。

我们的第一个定理要涉及到用$P_1 \leqslant P_2$（见§9.3）在给定的希尔伯特空间上的所有投影集合上定义的半序关系。这个定理是下面三节中的基本工具。

9.6-1 定理（半序） 设P_1和P_2是定义在希尔伯特空间H上的投影，P_1和P_2分别把H投影到两个子空间$Y_1=P_1(H)$和$Y_2=P_2(H)$上，而$\mathscr{N}(P_1)$和$\mathscr{N}(P_2)$是这两个投影的零空间。则下述条件是等价的。

$$P_2P_1=P_1P_2=P_1 \tag{1}$$

$$Y_1 \subset Y_2 \tag{2}$$

$$\mathscr{N}(P_1) \supset \mathscr{N}(P_2) \tag{3}$$

$$\|P_1x\| \leqslant \|P_2x\|, \text{ 对一切 } x \in H \tag{4}$$

$$P_1 \leqslant P_2 \tag{5}$$

证明：(1)⟹(4)

据9.5-2有$\|P_1\| \leqslant 1$。因此对一切$x \in H$，式(1)给出了

$$\|P_1x\|=\|P_1P_2x\| \leqslant \|P_1\| \, \|P_2x\| \leqslant \|P_2x\|$$

(4)⟹(5)

从§9.5中的式(3)和本定理中的式(4)，对一切$x \in H$有

$$\langle P_1x,x\rangle=\|P_1x\|^2 \leqslant \|P_2x\|^2=\langle P_2x,x\rangle$$

根据定义，这就证明了$P_1 \leqslant P_2$。

(5)⟹(3)

任取$x \in \mathscr{N}(P_2)$，则$P_2x=0$。据§9.5中的式(3)和本定理中的式(5)，有

$$\|P_1x\|^2=\langle P_1x,x\rangle \leqslant \langle P_2x,x\rangle=0$$

因为$x \in \mathscr{N}(P_2)$是任意的，因此$P_1x=0$，即$x \in \mathscr{N}(P_1)$，从而有$\mathscr{N}(P_1) \supset \mathscr{N}(P_2)$。

(3)⟹(2)

由于$\mathscr{N}(P_i)$是Y_i在H中的正交补，所以据引理3.3-5，这是显然的。

(2)⟹(1)

对每个$x \in H$有$P_1x \in Y_1$。据式(2) $P_1x \in Y_2$，所以$P_2(P_1x)=P_1x$，此即$P_2P_1=P_1$。据9.5-1，P_1是自伴的，定理3.10-4便意味着$P_1=P_2P_1=P_1P_2$。

上一节研究了投影算子之和，现在可以讨论投影之差。这是刚才证明的定理的第一个应用。

9.6-2 定理（投影之差） 设P_1和P_2是希尔伯特空间H上的投影，则

(a) 差$P = P_2 - P_1$是H上的投影，当且仅当$Y_1 \subset Y_2$，其中$Y_j = P_j(H)$。

(b) 若$P = P_2 - P_1$是一个投影，则P把H投影到Y上，其中Y是Y_1在Y_2中的正交补。

证明：(a) 若$P = P_2 - P_1$是一个投影，则据 9.5-1 有$P = P^2$，写出来是

$$P_2 - P_1 = (P_2 - P_1)^2 = P_2^2 - P_2 P_1 - P_1 P_2 + P_1^2$$

据9.5-1，在右端有$P_2^2 = P_2$，$P_1^2 = P_1$。因此有

$$P_1 P_2 + P_2 P_1 = 2P_1 \tag{6}$$

上式左乘和右乘P_2便得到

$$P_2 P_1 P_2 + P_2 P_1 = 2P_2 P_1$$

$$P_1 P_2 + P_2 P_1 P_2 = 2P_1 P_2$$

因此有$P_2 P_1 P_2 = P_2 P_1$，$P_2 P_1 P_2 = P_1 P_2$而据式（6）便得

$$P_2 P_1 = P_1 P_2 = P_1 \tag{7}$$

再由定理 9.6-1 便推出$Y_1 \subset Y_2$。

反之，若$Y_1 \subset Y_2$，定理 9.6-1 便给出式(7)，这就意味着式(6)成立，从而证明了P是幂等的。由于P_1和P_2是自伴的，所以$P = P_2 - P_1$也是自伴的，据 9.5-1，P是一个投影。

(b) $Y = P(H)$是由形如

$$y = Px = P_2 x - P_1 x, \qquad x \in H \tag{8}$$

的所有矢量组成。根据 (a) 有$Y_1 \subset Y_2$，所以根据式(1)有$P_2 P_1 = P_1$，因而从式（8）可得到

$$P_2 y = P_2^2 x - P_2 P_1 x = P_2 x - P_1 x = y$$

这表明 $y \in Y_2$。从式（8）和式（1）还得到

$$P_1 y = P_1 P_2 x - P_1^2 x = P_1 x - P_1 x = 0$$

这表明 $y \in \mathcal{N}(P_1) = Y_1^{\perp}$；见 3.3-5。合在一起，便知 $y \in V = Y_2 \cap Y_1^{\perp}$。由于 y 是任意的，故$Y \subset V$。

再证明$Y \supset V$。由于H到$Y_1^{\perp}$上的投影是$I - P_1$（见 §9.5），故每个 $v \in V$ 都具有如下形式：

$$v = (I - P_1) y_2, \qquad y_2 \in Y_2 \tag{9}$$

再利用$P_2 P_1 = P_1$，并由于$P_2 y_2 = y_2$，便从式（9）得到

$$\begin{aligned} Pv &= (P_2 - P_1)(I - P_1) y_2 \\ &= (P_2 - P_2 P_1 - P_1 + P_1^2) y_2 \end{aligned}$$

$$= y_2 - P_1 y_2 = v$$

这就证明了 $v \in Y$。由于 $v \in V$ 是任意的，故 $Y \supset V$。合在一起，便有 $Y = P(H) = V = Y_2 \cap Y_1^{\perp}$。

由这个定理和前一个定理，我们能够推广单调递增投影序列的收敛性这一基本结果。（对于单调递减投影序列也有类似的定理成立。）

9.6-3 定理（单调递增序列） 设 (P_n) 是定义在希尔伯特空间 H 上的一个单调递增投影序列。则：

（a）(P_n) 是强算子收敛的，也就是说，对每个 $x \in H$，$P_n x \to Px$，并且极限算子 P 也是定义在 H 上的一个投影。

（b）P 把 H 投影到

$$P(H) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(H)}$$

上。

（c）P 的零空间为

$$\mathcal{N}(P) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}(P_n)$$

证明：（a）设 $m < n$。据假设，$P_m \leqslant P_n$，所以据 9.6-1 有 $P_m(H) \subset P_n(H)$，并根据 9.6-2，$P_n - P_m$ 是一个投影。因此，根据 9.5-2 对每个固定的 $x \in H$ 有

$$\begin{aligned} \| P_n x - P_m x \|^2 &= \| (P_n - P_m) x \|^2 \\ &= \langle (P_n - P_m) x, x \rangle \\ &= \langle P_n x, x \rangle - \langle P_m x, x \rangle \\ &= \| P_n x \|^2 - \| P_m x \|^2 \end{aligned} \tag{10}$$

据 9.5-2 有 $\| P_n \| \leqslant 1$，所以对每个 n 都有 $\| P_n x \| \leqslant \| x \|$。因此，$(\| P_n x \|)$ 是一个有界数列。由于 (P_n) 是单调的，据 9.6-1（$\| P_n x \|$）也是单调的。因此（$\| P_n x \|$）是收敛的。由此及式（10）便看出 $(P_n x)$ 是一个柯西序列。由于 H 是完备的，故 $(P_n x)$ 收敛，其极限依赖于 x，不妨设 $P_n x \longrightarrow Px$。这样就在 H 上定义了一个算子 P。显然 P 是线性的。由于有 $P_n x \longrightarrow Px$，并且 P_n 是有界的，自伴的和幂等的，故 P 也有相同的性质。因此据 9.5-1 知 P 是一个投影。

（b）现在来确定 $P(H)$。设 $m < n$，则 $P_m \leqslant P_n$。即 $P_n - P_m \geqslant 0$，据定义 $\langle (P_n - P_m)x, x \rangle \geqslant 0$。令 $n \to \infty$，根据内积的连续性（见 3.2-2）可得 $\langle (P - P_m)x, x \rangle \geqslant 0$，即 $P_m \leqslant P$。而据 9.6-1，对每个 m 都有 $P_m(H) \subset P(H)$。因此

$$\bigcup P_m(H) \subset P(H)$$

此外，对每个 m 和每个 $x \in H$ 还有

$$P_m x \in P_m(H) \subset \bigcup P_m(H)$$

由于 $P_m x \to Px$，从 1.4-6(a) 可看出 $Px \in \overline{\bigcup P_m(H)}$。这表明 $P(H) \subset \overline{\bigcup P_m(H)}$。合在一起，便有

$$\bigcup P_n(H) \subset P(H) \subset \overline{\bigcup P_n(H)}$$

而从 3.3-5 又知$P(H) = \mathscr{N}(I-P)$，所以据2.7-10(b)知$P(H)$是闭的。这就证明了(b)。

(c) 最后确定$\mathscr{N}(P)$。利用引理 3.3-5，并根据 (b) 中证明的$P(H) \supset P_n(H)$，所以对每个 n 都有$\mathscr{N}(P) = P(H)^{\perp} \subset P_n(H)^{\perp}$。因此有

$$\mathscr{N}(P) \subset \bigcap P_n(H)^{\perp} = \bigcap \mathscr{N}(P_n)$$

另一方面，若 $x \in \bigcap \mathscr{N}(P_n)$，则对每个 n 都有 $x \in \mathscr{N}(P_n)$，所以$P_n x = 0$，并由 $P_n x \to P x$ 可推知$Px = 0$，此即 $x \in \mathscr{N}(P)$。由于 $x \in \bigcap \mathscr{N}(P_n)$ 是任意的，故有$\bigcap \mathscr{N}(P_n) \subset \mathscr{N}(P)$。合在一起便得$\mathscr{N}(P) = \bigcap \mathscr{N}(P_n)$。

习　　题

1. 用欧几里德空间$\mathbf{R}^3$中的简单的投影例子来说明定理 9.6-1 中各种等价的论述。

2. 证明：希尔伯特空间H上的两个投影之差$P = P_2 - P_1$是H上的一个投影，当且仅当$P_1 \leqslant P_2$。

3. 为了更好地理解定理 9.6-2，考虑$H = \mathbf{R}^3$，并设P_2是到 $\xi_1\xi_2$-平面上的投影，而P_1是 $\xi_1\xi_2$-平面内到直线 $\xi_2 = \xi_1$ 上的投影。粗略地画出Y_1，Y_2，$Y_1^{\perp}$，$Y_2^{\perp}$和Y_1在Y_2中的正交补。当 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$时，定出$(P_2 - P_1)x$ 的坐标。试问$P_1 + P_2$是一个投影吗？

4. **(投影的极限)** 若(P_n)是定义在希尔伯特空间H上的一个投影序列，并且$P_n \to P$，证明P 也是H上的一个投影。

5. 设定理 9.6-3 中的$P_n(H)$ 对每个 n 都是有限维的。证明：虽然如此，$P(H)$ 仍可能是无穷维的。

6. 设(P_n)是强算子收敛到极限P，其中 P_n 是希尔伯特空间H上的投影。假定$P_n(H)$ 是无穷维的。用一个例子说明，尽管如此，$P(H)$仍可能是有限维的。（顺便指出，这里和习题 5 中的这种不规则的现象在一致算子收敛的情况下，是不可能出现的。）

7. 在单调递减序列(P_n)的情况下，定理 9.6-3中的$P(H)$是什么？

8. 若Q_1，Q_2，…是希尔伯特空间H上的投影，且满足 $Q_j(H) \perp Q_k(H)$ $(j \neq k)$，证明对每个 $x \in H$ 级数

$$Qx = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j x$$

都是（按H上的范数）收敛的，并且Q是一个投影。Q把H影投到哪一个子空间上？

9. **(不变子空间)** 设T：$H \to H$是一个有界线性算子，Y是H的一个子空间。若$T(Y) \subset Y$，则称Y是在T之下不变的。证明：闭子空间$Y \subset H$在T之下不变，当且仅当$Y^{\perp}$在T^*之下不变。

10. **(算子的约化)** Y是希尔伯特空间H的一个闭子空间，$T: H \to H$是一个线性算子。若$T(Y) \subset Y$且$T(Y^{\perp}) \subset Y^{\perp}$，也就是说$Y$与$Y^{\perp}$都是在$T$之下不变的，则说$Y$可约化线性算子$T$。（这时对$T$的研究简化为分别对$T|_Y$和$T|_{Y^{\perp}}$的研究。）若$P_1$是$H$到$Y$上的投影且$P_1 T = T P_1$，证明$Y$可约化$T$。

11.若习题10中有 $\dim H<\infty$ 且Y可约化T，试问关于表示T的矩阵能够简化成什么形式？

12.求证习题10中论述的逆，也就是若Y可约化T，则$P_1T=TP_1$。

13.若习题10中的Y可约化T，证明$TP_2=P_2T$，其中P_2是H到$Y^\perp$上的投影。

14.设(e_k)是可分希尔伯特空间H中的一个完全标准正交序列。并设$T: H\to H$是用$Te_k=e_{k+1}$，$k=1,2,\cdots$,先在e_k上定义而后再把它连续地延拓到H上的一个线性算子。又设Y_n是$\mathrm{span}\{e_n, e_{n+1}\cdots\}$的闭包，其中$n>1$。证明：$T$不是自伴的；$Y_n$不能约化$T$。$(a)$利用习题12，$(b)$给出一个直接的证明。

15.设$T: H\to H$是希尔伯特空间H上的有界线性算子，Y是满足$T(Y)\subset Y$的一个闭子空间。若T是自伴的，证明$T(Y^\perp)\subset Y^\perp$，所以在这种情况下，$Y$是可约化$T$的。（注意，习题14中的$T$不是自伴的。）

§9.7 谱族

从§9.5我们回想起，我们目前的主要目的是要用很简单的算子（投影）去表示希尔伯特空间上的有界自伴线性算子，为了要获得这些较为复杂的算子的有关信息，我们就可以直接去研究那些简单的算子的性质。这样的表示将称作为算子的谱表示。有界自伴线性算子$T: H\to H$一经给出，我们便可用一个适当的投影族给出它的谱表示，这个投影族又叫做T的谱族。在本节中，我们诱导并定义一般意义下的谱族的概念，也就是说，不涉及具体给定的算子T。针对具体给出的算子T的适当的谱族，将在下一节单独考虑，而T的谱表示放在§9.9中讨论。

从有限维的情况我们能够看出谱族产生的背景。设$T: H\to H$是酉空间$H=\mathbf{C}^n$（见3.10-2)上的自伴线性算子。则T是有界的（据2.7-8)，并且可以选定H的一个基，用一个厄米特矩阵来表示T，为简单起见，仍用T记这个矩阵。算子T的谱由矩阵T的特征值组成（见§§7.1，7.2)，并且据9.1-1知它们都是实数。为简便计，我们假定矩阵T有n个不同的特征值$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$，则定理9.1-1$(b)$意味着$T$有$n$个标准正交的特征矢量：

$$x_1, \ x_2, \cdots, x_n$$

其中x_j对应于λ_j，并且它们都是列矢量。这组矢量也构成了H的一个标准正交基。所以对每个$x\in H$都有唯一的表示

$$x=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j x_j \qquad (1)$$

$$\gamma_j=\langle x, \ x_j\rangle = x^{\mathrm{T}}\bar{x}_j$$

在式（1）中，第一个等式两端与固定的x_k取内积，再利用正交性，便能得到第二个等式。在式(1)中最根本的一点是，x_j是T的特征矢量，所以有$Tx_j=\lambda_j x_j$。因而若用T作用到（1）的两端，便直接得到

$$Tx=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\gamma_j x_j \qquad (2)$$

从而可以看出：虽然T可能以一种比较复杂的方式作用在x上，但它却以一种十分简单的方式作用在（1）中和式的每一项上。这就证实了用特征矢量研究$H=\mathbf{C}^n$上的线性算子是极为方便的。

对式（1）进一步的观察便可看出，我们能够定义算子

$$P_j:\ H\to H \qquad (3)$$
$$x\mapsto \gamma_j x_j$$

显然，P_j是H到T的对应于λ_j的特征空间上的一个（正交）投影。这时式（1）可以写成

$$x=\sum_{j=1}^{n}P_jx,\quad 因此\ I=\sum_{j=1}^{n}P_j \qquad (4)$$

其中I是H上的恒等算子。式（2）变成

$$Tx=\sum_{j=1}^{n}\lambda_jP_jx,\quad 因此\ T=\sum_{j=1}^{n}\lambda_jP_j \qquad (5)$$

这就是用投影给出的T的一个表示。它说明了使用T的谱以十分简单的算子可得到T的一个表示（即（5））。

利用投影算子P_j似乎是很自然的，并且在几何上是很明了的。遗憾的是，上面的公式对于直接推广到无穷维的希尔伯特空间H还是不合适的，因为在无穷维的情况下，有界自伴线性算子的谱可能比较复杂。现在我们来描述另外一种途径，虽然有点不太直观，但对于推广到无穷维的情况却是很方便的。

代替投影$P_1,P_2,\cdots,P_n$，我们取这些投影之和。精确一点说，对任一实数λ我们定义算子

$$E_\lambda=\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}P_j,\qquad \lambda\in\mathbf{R} \qquad (6)$$

这是一个单参数投影族，λ是一个参数。从式（6）可以看出，对任一的λ，算子E_λ是H到子空间V_λ上的投影，V_λ是由$\lambda_j\leqslant\lambda$的所有特征矢量$x_j$张成的$H$的子空间。由此可知

$$V_\lambda\subset V_\mu,\qquad \lambda\leqslant\mu$$

粗略地讲，随着λ从小到大遍历$\mathbf{R}$，E_λ从0增长到I，E_λ只在T的特征值上增长，而对于不含特征值的任何区间中的λ，E_λ保持不变。因此可看出E_λ有如下性质：

$$E_\lambda E_\mu=E_\mu E_\lambda=E_\lambda,\ 当\ \lambda<\mu\ 时$$
$$E_\lambda=0\qquad ,\ 当\ \lambda<\lambda_1 时$$
$$E_\lambda=I\qquad ,\ 当\ \lambda\geqslant\lambda_n 时$$
$$E_{\lambda+0}=\lim_{\mu\to\lambda+0}E_\mu=E_\lambda$$

其中$\mu\to\lambda+0$指μ从右侧逼近λ。这就促使我们提出如下的定义。

9.7-1 定义（谱族或单位分解） 所谓实谱族（或实单位分解）是指一个单参数的投影E_λ的族$\mathscr{E}=(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$，$E_\lambda$是定义在（任意维的）希尔伯特空间$H$上的依赖于实参数的投

影，且满足

$$E_\lambda \leqslant E_\mu, \text{ 因此} E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda, \qquad \lambda<\mu \tag{7}$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda x = 0 \tag{8a}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} E_\lambda x = x \tag{8b}$$

$$E_{\lambda+0}x = \lim_{\mu\to\lambda+0} E_\mu x = E_\lambda x, \qquad x\in H \tag{9}$$

从定义我们可以看出，一个实谱族可以看作一个映射

$$\mathbf{R} \to B(H,\ H)$$
$$\lambda \mapsto E_\lambda$$

对每个 $\lambda\in\mathbf{R}$，都有一个投影$E_\lambda\in B(H,H)$与之对应，其中$B(H,H)$是所有从H到H的有界线性算子构成的空间。

要注意，据 9.6-1 ，式(7)中的两个条件是等价的。

如果有

$$E_\lambda = 0, \text{ 当 } \lambda<a \text{ 时}; \ E_\lambda = I, \text{ 当 } \lambda\geqslant b \text{ 时} \tag{8*}$$

则称$\mathscr{E}$是**区间〔a,b〕上的一个谱族**。由于有界自伴线性算子的谱落在实直线上的一个有限区间内，所以这样的谱族对我们来说是特别的有意义。显然，(8*)蕴含着(8)。

式(9)中的 $\mu\to\lambda+0$ 指出，在求极限的过程中我们只考虑值 $\mu>\lambda$，而式(9)意味着$\lambda\mapsto E_\lambda$是从右侧强算子连续的（或强算子右连续)。实际上，左连续同样可以定义。在定义中我们完全可以不强加这样的条件，不过在我们不得不研究极限$E_{\lambda+0}$和$E_{\lambda-0}$时，将会带来不必要的麻烦。

后面（在下面两节中）将会看到，针对在任一希尔伯特空间上任一给定的有界自伴线性算子T，我们都能够有一个谱族，通过黎曼-斯蒂杰积分表示T。这就是我们前面所提到的谱表示。

此外，我们还会看到对于本节开始所考虑的有限维的情况，积分表示简化到有限和的形式，即用谱族(6)所写成的(5)。暂且让我们来说明，(5)是如何能够用(6)来写出的。为简单起见，首先让我假定T的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是互不相同的，并且$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$。则便有

$$E_{\lambda_1} = P_1$$
$$E_{\lambda_2} = P_1 + P_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$E_{\lambda_n} = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

因此，反过来有

$$P_1 = E_{\lambda_1}$$
$$P_j = E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}, \qquad j=2,3,\cdots,n$$

因为对于区间$〔\lambda_{j-1},\ \lambda_j)$中的$\lambda$，$E_\lambda$保持不变，所以上式又可写为

$$P_j = E_{\lambda_j} - E_{\lambda_j - 0}$$

而式(4)成为

$$x = \sum_{j=1}^{n} P_j x = \sum_{j=1}^{n} (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_j - 0}) x$$

式(5)变成

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_j - 0}) x$$

若去掉x并记

$$\delta E_\lambda = E_\lambda - E_{\lambda - 0}$$

则便得到

$$T = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta E_{\lambda_j} \tag{10}$$

这就是n维希尔伯特空间H上的具有特征值$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$的自伴线性算子$T$的谱表示。而这个谱表示也证明了，对任意的$x, y \in H$有

$$\langle Tx, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \delta E_{\lambda_j} x, y \rangle \tag{11}$$

我们注意到上式能够写成一个黎曼-斯蒂杰积分

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dw(\lambda) \tag{12}$$

其中$w(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle$。

我们上面的讨论虽然是针对着有限维空间上的自伴线性算子，但它却为下一节要考虑的任意的希尔伯特空间的情况铺平了道路。本节的习题与下一节的习题合在一起放在下节之末。

§9.8 有界自伴线性算子的谱族

针对复希尔伯特空间H上的一个给定的有界自伴线性算子T: $H \to H$，我们都有一个用来给出T的谱表示的谱族$\mathscr{E}$（在下一节给出谱表示）。

为了定义$\mathscr{E}$，我们需要算子

$$T_\lambda = T - \lambda I \tag{1}$$

T_λ^2的正平方根，记为B_λ①，因而

$$B_\lambda = (T_\lambda^2)^{1/2} \tag{2}$$

而把算子

① 在文献中也把B_λ记为$|T_\lambda|$。

$$T_\lambda^+ = \frac{1}{2}(B_\lambda + T_\lambda) \tag{3}$$

叫做T_λ的**正部**。

然后用$\mathscr{E} = (E_\lambda)_{\lambda \in R}$定义$T$的**谱族**$\mathscr{E}$，其中$E_\lambda$是$H$到$\mathscr{N}(T_\lambda^+)$上的投影，$\mathscr{N}(T_\lambda^+)$为$T_\lambda^+$的零空间。

本节所留下的工作就是要证明$\mathscr{E}$确实是一个谱族，也就是要证明，$\mathscr{E}$有定义 9.7-1 中所表征谱族的全部性质。这要求我们有一定的耐性。但是，由于为下一节推导谱表示而造出一个基本工具（不等式(18)），所以我们的忍耐也算得到了报赏。

下面逐步地处理。首先考虑算子

$$B = (T^2)^{1/2} \qquad (T^2\text{的正平方根})$$

$$T^+ = \frac{1}{2}(B + T) \qquad (T\text{的正部})$$

$$T^- = \frac{1}{2}(B - T) \qquad (T\text{的负部})$$

并考虑H到T^+的零空间上的投影E，即

$$E: H \to Y = \mathscr{N}(T^+)$$

通过相减和相加可以看出

$$T = T^+ - T^- \tag{4}$$

$$B = T^+ + T^- \tag{5}$$

此外，还有

9.8-1 引理（与T有关的算子） 上面所定义的算子有如下性质。

(a) B，T^+和T^-都是有界自伴的。

(b) 与T可换的每个有界线性算子都与B，T^+，T^-可换，特别是

$$BT = TB, \quad T^+T = TT^+, \quad T^-T = TT^-, \quad T^+T^- = T^-T^+ \tag{6}$$

(c) 与T可换的每个有界自伴线性算子都与E可换，特别是

$$ET = TE, \quad EB = BE \tag{7}$$

(d) 还有

$$X^+T^- = 0, \qquad T^-T^+ = 0 \tag{8}$$

$$T^+E = ET^+ = 0, \qquad T^-E = ET^- = T^- \tag{9}$$

$$TE = -T^-, \qquad T(I-E) = T^+ \tag{10}$$

$$T^+ \geqslant 0, \qquad T^- \geqslant 0 \tag{11}$$

证明：(a) 是显然的，因为T和B都是有界和自伴的。

(b) 假定$TS = ST$，则$T^2S = TST = ST^2$，并且把定理 9.4-2 应用到T^2可推出$BS = SB$。因此有

$$T^+S=\frac{1}{2}(BS+TS)=\frac{1}{2}(SB+ST)=ST^+$$

类似地可证明$T^-S=ST^-$。

(c) 对每个 $x\in H$，我们有$y=Ex\in Y=\mathscr{N}(T^+)$。因此$T^+y=0$，$ST^+y=S0=0$。从$TS=ST$和(b)可得$ST^+=T^+S$和

$$T^+SEx=T^+Sy=ST^+y=0$$

因此$SEx\in Y$。由于E把H投影到Y上，因而对每个 $x\in H$ 有$ESEx=SEx$，即$ESE=SE$。据 9.5-1，投影是自伴的，据假设S也是自伴的。因而利用 §3.9 中(6g) 可得

$$ES=E^*S^*=(SE)^*=(ESE)^*=E^*S^*E^*=ESE=SE$$

(d) 现在证明(8)—(11)。

(8)的证明：

由$B=(T^2)^{1/2}$我们有$B^2=T^2$。并且据式(6)有$BT=TB$。因此，再据式(6)有

$$T^+T^-=T^-T^+=\frac{1}{2}(B-T)\frac{1}{2}(B+T)$$

$$=\frac{1}{4}(B^2+BT-TB-T^2)=0$$

(9)的证明：

据定义，$Ex\in\mathscr{N}(T^+)$，所以对一切 $x\in H$都有$T^+Ex=0$。由于 T^+是自伴的，据式(6)和(c)便有$ET^+x=T^+Ex=0$，即$ET^+=T^+E=0$。

此外，据式(8)有$T^+T^-x=0$，所以$T^-x\in\mathscr{N}(T^+)$。因此有$ET^-x=T^-x$。又由于T^-是自伴的，根据(c)对一切$x\in H$都有$T^-Ex=ET^-x=T^-x$，即$T^-E=ET^-=T^-$。

(10)的证明：

从式(4)和式(9)可得$TE=(T^+-T^-)E=-T^-$，再由此并根据式(4)便得

$$T(I-E)=T-TE=T+T^-=T^+$$

(11)的证明：

根据式(9)、(5)和定理9.3-1，有

$$T^-=ET^-+ET^+=E(T^-+T^+)=EB\geqslant 0$$

因为E和B是自伴的、可换的，再据 9.5-2 知$E\geqslant 0$，据B的定义知$B\geqslant 0$，这样便可应用定理 9.3-1，从而证明了$T^-=EB\geqslant 0$。类似地可推出

$$T^+=B-T^-=B-EB=(I-E)B\geqslant 0$$

因为由 9.5-2 知$I-E\geqslant 0$。

这是第一步要做的工作。在第二步的工作中，用我们要考虑的 $T_\lambda=T-\lambda I$ 取代前一步中的T；代替B,T^+,T^-和E，我们必须取$B_\lambda=(T_\lambda^2)^{1/2}$〔见式(2)〕，$T_\lambda$的正部和负部定义为

$$T_\lambda^+ = \frac{1}{2}(B_\lambda + T_\lambda)$$

$$T_\lambda^- = \frac{1}{2}(B_\lambda - T_\lambda)$$

〔见式(3)〕，H到T_λ^+的零空间$Y_\lambda = \mathscr{N}(T_\lambda^+)$上的投影为

$$E_\lambda: H \to Y_\lambda = \mathscr{N}(T_\lambda^+)$$

这时我们有如下的结果。

9.8-2 引理（与T_λ有关的算子） 若我们分别用$T_\lambda, B_\lambda, T_\lambda^+, T_\lambda^-, E_\lambda$代替$T, B, T^+, T^-, E$，则前面的引理仍然是成立的，其中$\lambda$是一个实数。进而，对任意的实数$k, \lambda, \mu, \nu, \tau$，下面的算子

$$T_k, \ B_\lambda, \ T_\mu^+, \ T_\nu^-, \ E_\tau$$

都是可换的。

证明：第一个论断是明显的。为了证明第二个论断，只要注意到有$IS = SI$和

$$T_\lambda = T - \lambda I = T - \mu I + (\mu - \lambda)I = T_\mu + (\mu - \lambda)I \tag{12}$$

便有

$$ST = TS \Rightarrow ST_\mu = T_\mu S \Rightarrow ST_\lambda = T_\lambda S \Rightarrow SB_\lambda = B_\lambda S, \quad SB_\mu = B_\mu S$$

等等。对于$S = T_k$，它就给出了$T_k B_\lambda = B_\lambda T_k$等等。

有了这样一个准备，我们就能够证明：对于给定的一个有界自伴线性算子T，可以用唯一的方式来定义一个谱族$\mathscr{E} = (E_\lambda)$。这个$\mathscr{E}$叫做算子**T所生成的谱族**，简称$T$的谱族。在下一节将会看到，利用$\mathscr{E}$可得到所希望的$T$的谱表示，从而达到我们真正的目的。

9.8-3 定理（算子的谱族） 设$T: H \to H$是复希尔伯特空间H上的一个有界自伴线性算子。并且E_λ（λ是实数）是H到$T_\lambda = T - \lambda I$的正部$T_\lambda^+$的零空间$Y_\lambda = \mathscr{N}(T_\lambda^+)$上的投影。则$\mathscr{E} = (E_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$是区间$[m, M] \subset \mathbf{R}$上的一个谱族，其中$m$和$M$为§9.2中式(1)所定义。

证明：我们将证明

$$\lambda < \mu \quad \Rightarrow \quad E_\lambda \leqslant E_\mu \tag{13}$$

$$\lambda < m \quad \Rightarrow \quad E_\lambda = 0 \tag{14}$$

$$\lambda \geqslant M \quad \Rightarrow \quad E_\lambda = I \tag{15}$$

$$\mu \to \lambda + 0 \quad \Rightarrow \quad E_\mu x \to E_\lambda x \tag{16}$$

在证明中，我们要利用引理9.8-1把T, T^+等换成$T_\lambda, T_\mu, T_\lambda^+$等以后所得到的部分结论，也就是

$$T_\mu^+ T_\mu^- = 0 \tag{8*}$$

$$T_\lambda E_\lambda = -T_\lambda^-, \quad T_\lambda(I - E_\lambda) = T_\lambda^+, \quad T_\mu E_\mu = -T_\mu^- \tag{10*}$$

$$T_\lambda^+ \geqslant 0, \quad T_\lambda^- \geqslant 0, \quad T_\mu^+ \geqslant 0, \quad T_\mu^- \geqslant 0 \tag{11*}$$

式(13)的证明：

设 $\lambda<\mu$。因为据式(11*)有 $-T^-\leqslant 0$，所以有 $T_\lambda=T_\lambda^+-T_\lambda^-\leqslant T_\lambda^+$。从而有

$$T_\lambda^+-T_\mu\geqslant T_\lambda-T_\mu=(\mu-\lambda)I\geqslant 0$$

据 9.8-2，$T_\lambda^+-T_\mu$ 是自伴的并且与 T_μ^+ 可换，据(11*)有 $T_\mu^+\geqslant 0$，因而从定理 9.3-1可推得

$$T_\mu^+(T_\lambda^+-T_\mu)=T_\mu^+(T_\lambda^+-T_\mu^++T_\mu^-)\geqslant 0$$

根据式(8*)，其中的 $T_\mu^+T_\mu^-=0$，所以从上式推得 $T_\mu^+T_\lambda^+\geqslant T_\mu^{+2}$，也就是对一切 $x\in H$ 有

$$\langle T_\mu^+T_\lambda^+x,x\rangle \geqslant \langle T_\mu^{+2}x,x\rangle = \|T_\mu^+x\|^2\geqslant 0$$

这就证明了 $T_\lambda^+x=0$ 蕴含着 $T_\mu^+x=0$。因此 $\mathscr{N}(T_\lambda^+)\subset\mathscr{N}(T_\mu^+)$，所以据 9.6-1 推出，当 $\lambda<\mu$ 时有 $E_\lambda\leqslant E_\mu$。

式(14)的证明：

设 $\lambda<m$，但是还假定 $E_\lambda\neq 0$。则对某一 z 有 $E_\lambda z\neq 0$。令 $x=E_\lambda z$，则 $E_\lambda x=E_\lambda^2z=E_\lambda z=x$，不失一般性，可以假定 $\|x\|=1$。从而有

$$\begin{aligned}\langle T_\lambda E_\lambda x,x\rangle &= \langle T_\lambda x,x\rangle\\ &= \langle Tx,x\rangle-\lambda\\ &\geqslant \inf_{\|\tilde{x}\|=1}\langle T\tilde{x},\ \tilde{x}\rangle-\lambda\\ &=m-\lambda>0\end{aligned}$$

但这与 $T_\lambda E_\lambda=-T_\lambda^-\leqslant 0$〔从(10*)和(11*)可得到这一结果〕是矛盾的。故 $E_\lambda=0$。

式(15)的证明：

假定 $\lambda>M$，并设 $E_\lambda\neq I$，则 $I-E_\lambda\neq 0$，从而对某一范数为 1 的 x 有 $(I-E_\lambda)x=x$。因此有

$$\begin{aligned}\langle T_\lambda(I-E_\lambda)x,x\rangle &= \langle T_\lambda x,x\rangle\\ &= \langle Tx,x\rangle-\lambda\\ &\leqslant \sup_{\|\tilde{x}\|=1}\langle T\tilde{x},\tilde{x}\rangle-\lambda\\ &=M-\lambda<0\end{aligned}$$

但这与从(10*)和(11*)可得到的结论 $T_\lambda(I-E_\lambda)=T_\lambda^+\geqslant 0$ 相矛盾。从下面要证明的右连续性还可得到 $E_M=I$。

式(16)的证明：

针对区间 $\Delta=(\lambda,\mu]$，我们有算子

$$E(\Delta)=E_\mu-E_\lambda$$

由于 $\lambda<\mu$，据(13)有 $E_\lambda\leqslant E_\mu$，因此据 9.6-1 有 $E_\lambda(H)\subset E_\mu(H)$，并且据9.6-2知 $E(\Delta)$ 是一个投影。据 9.5-2 还有 $E(\Delta)\geqslant 0$。再根据 9.6-1，有

$$
\begin{aligned}
&E_\mu E(\triangle)=E_\mu^2-E_\mu E_\lambda=E_\mu-E_\lambda=E(\triangle)\\
&(I-E_\lambda)E(\triangle)=E(\triangle)-E_\lambda(E_\mu-E_\lambda)=E(\triangle)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

由于$E(\triangle)$，T_μ^-，T_λ^+是正的〔见(11*)〕，并且据9.8-2知它们是可换的，所以据9.3-1知算子之积$T_\mu^-E(\triangle)$和$T_\lambda^+E(\triangle)$都是正的。因此据式(17)和式(10*)有

$$T_\mu E(\triangle)=T_\mu E_\mu E(\triangle)=-T_\mu^-E(\triangle)\leqslant 0$$

$$T_\lambda E(\triangle)=T_\lambda(I-E_\lambda)E(\triangle)=T_\lambda^+E(\triangle)\geqslant 0$$

这就意味着$TE(\triangle)\leqslant\mu E(\triangle)$和$TE(\triangle)\geqslant\lambda E(\triangle)$。合在一起，便得到

$$\lambda E(\triangle)\leqslant TE(\triangle)\leqslant\mu E(\triangle),\quad E(\triangle)=E_\mu-E_\lambda \tag{18}$$

这是一个很重要的不等式，在下一节和§9.11中我们都要用到。

令λ保持不变，且让μ从λ的右侧单调地趋近于λ，则用类似于定理9.3-3关于递减序列的证明，可得到$E(\triangle)x\to P(\lambda)x$。其中$P(\lambda)$是有界和自伴的。由于$E(\triangle)$是幂等的，所以$P(\lambda)$也是幂等的。因此$P(\lambda)$是一个投影。根据式(18)还有$\lambda P(\lambda)=TP(\lambda)$，即$T_\lambda P(\lambda)=0$。由此，并用(10*)和9.8-2，便得到

$$T_\lambda^+P(\lambda)=T_\lambda(I-E_\lambda)P(\lambda)=(I-E_\lambda)T_\lambda P(\lambda)=0$$

因此，对所有的$x\in H$有$T_\lambda^+P(\lambda)x=0$，这就证明了$P(\lambda)x\in\mathscr{N}(T_\lambda^+)$。据定义，$E_\lambda$把$H$投影到$\mathscr{N}(T_\lambda^+)$上。因此有$E_\lambda P(\lambda)x=P(\lambda)x$，即$E_\lambda P(\lambda)=P(\lambda)$。另一方面，若在式(17)中令$\mu\to\lambda+0$，则有

$$(I-E_\lambda)P(\lambda)=P(\lambda)$$

合在一起，便有$P(\lambda)=0$。前边已证明$E(\triangle)x\to P(\lambda)x$，这就证明了式(16)；即$\mathscr{E}$是右连续的。

以上完全证明了定理中所给出的$\mathscr{E}=(E_\lambda)$具有$[m,M]$上的谱族应有的一切性质。

习　　题

1.在一些情况中，谱族的左连续性比右连续性更方便（而某些书就是这样来定义谱族的）。为了看出两者之间没有多少差别，我们可以从定义9.7-1中的E_λ得到一个左连续的F_λ。

2.假定E_λ满足除了式(9)以外的定义9.7-1中的所有条件。求满足包括式(9)在内的所有条件的$\tilde{E}_\lambda$。

3.求证$T^-T=TT^-$（见式(6)）。

4.若

$$T=\begin{bmatrix}2&0\\0&-3\end{bmatrix}$$

求T^+,T^-，$(T^2)^{1/2}$以及T^2的其它方根。

5.在有限维的情况下，若线性算子T能用一个实对角阵$\mathscr{T}$表示，试问T的谱是什么？我

们怎样从矩阵$\tilde{T}$去求？(a)$\tilde{T}^+$（T^+的矩阵表示），(b)$\tilde{T}^-$（T^-的矩阵表示），(c) $\tilde{B}$（B的矩阵表示）。

6.在习题5中，如何得到从H到(a)$\mathcal{N}(T^+)$上，和到(b)$\mathcal{N}(T_\lambda^+)$上的投影的矩阵表示。

7.在习题5中，从$\tilde{T}$求得(a)T_λ，(b)T_λ^+，(c)T_λ^-，(d)B_λ的矩阵表示。

8.证明：若有界自伴线性算子T：$H\to H$是正的，则$T=T^+$，$T^-=0$。

9.求零算子$T=0$：$H\to H$的谱族，其中$H\neq\{0\}$。

10.设$T=I$：$H\to H$，求$B_\lambda=(T_\lambda^2)^{1/2}$，$T_\lambda^+$，$\mathcal{N}(T_\lambda^+)$和$E_\lambda$。

§9.9 有界自伴线性算子的谱表示

从上一节我们知道，复希尔伯特空间H上的每一个有界自伴线性算子T都有其生成的谱族$\mathscr{E}=(E_\lambda)$。我们打算证明可用$\mathscr{E}$给出T的一个谱表示；这就是下面的包含$\mathscr{E}$的积分表示（1）并且使得$\langle Tx, y\rangle$能用通常的黎曼-斯蒂杰积分（见§4.4）表示。

出现在定理中的记法$m-0$，将在定理之末，证明之前给出解释。

9.9-1 有界自伴线性算子的谱定理 设T：$H\to H$是复希尔伯特空间H上的一个有界自伴线性算子。则

(a) T有谱表示

$$T=\int_{m-0}^{M}\lambda dE_\lambda \tag{1}$$

其中$\mathscr{E}=(E_\lambda)$是T的谱族（见9.8-3）；这个积分是在一致算子收敛的意义下来理解的〔即按$B(H,H)$上的范数收敛来理解〕，并且对所有的$x,y\in H$都有

$$\langle Tx, y\rangle=\int_{m-0}^{M}\lambda dw(\lambda),\quad w(\lambda)=\langle E_\lambda x, y\rangle \tag{1*}$$

其中的积分是一个通常的黎曼-斯蒂杰积分（§4.4）。

(b) 更为一般地，若p是λ的一个实系数多项式，例如

$$p(\lambda)=\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_0$$

则由

$$p(T)=\alpha_nT^n+\alpha_{n-1}T^{n-1}+\cdots+\alpha_0I$$

所定义的算子$p(T)$有谱表示

$$p(T)=\int_{m-0}^{M}p(\lambda)dE_\lambda \tag{2}$$

并且对所有的$x,y\in H$有

$$\langle p(T)x, y\rangle=\int_{m-0}^{M}p(\lambda)dw(\lambda),\quad w(\lambda)=\langle E_\lambda x, y\rangle \tag{2*}$$

（在后面的定理9.10-1中，它可推广到连续函数。）

附注：积分下限之所以写为 $m-0$ 是为了指出，在 $E_m \neq 0$（且 $m \neq 0$）时我们必须考虑在 $\lambda=m$ 的 E_m；因而，对任意的 $a<m$，我们都能够写为

$$\int_a^M \lambda\, d E_\lambda = \int_{m-0}^M \lambda d E_\lambda = mE_m + \int_m^M \lambda d E_\lambda$$

类似地，也有

$$\int_a^M p(\lambda) d E_\lambda = \int_{m-0}^M p(\lambda)\, d E_\lambda = p(m) E_m + \int_m^M p(\lambda) d E_\lambda$$

定理 9.9-1 的证明。

(a) 我们选取 $(a,b]$ 的一个划分序列 $(\mathscr{P}_n)$，其中 $a<m$，$M<b$。每个 $\mathscr{P}_n$ 都是把 $(a,b]$ 分成区间

$$\triangle_{nj} = (\lambda_{nj}, \ \mu_{nj}], \qquad j=1,2,\cdots,n$$

的一个划分，且 $\triangle_{nj}$ 的长度为 $l(\triangle_{nj}) = \mu_{nj} - \lambda_{nj}$。要注意，对于 $j=1, 2, \cdots, n-1$，$\mu_{nj} = \lambda_{n,j+1}$。我们还假定该序列 $(\mathscr{P}_n)$ 满足

$$\eta(\mathscr{P}_n) = \max_j l(\triangle_{nj}) \to 0, \text{ 当 } n\to\infty \text{时} \tag{3}$$

在 § 9.8中的式(18)取 $\triangle = \triangle_{nj}$，便有

$$\lambda_{nj} E(\Delta_{nj}) \leqslant T E(\Delta_{nj}) \leqslant \mu_{nj} E(\Delta_{nj})$$

关于 j 从 1 到 n 取和式，对每个 n 便得到

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{nj}\, E(\Delta_{nj}) \leqslant \sum_{j=1}^n T\, E(\Delta_{nj}) \leqslant \sum_{j=1}^n \mu_{nj} E(\Delta_{nj}) \tag{4}$$

由于对 $j=1,2,\cdots,n-1$，有 $\mu_{nj} = \lambda_{n,j+1}$，利用 § 9.8 中的式(14)和(15)便有

$$T \sum_{j=1}^n E(\Delta_{nj}) = T \sum_{j=1}^n (E_{\mu_{nj}} - E_{\lambda_{nj}}) = T(I-0) = T$$

式(3)意味着，对每个 $\varepsilon>0$ 都存在一个 n，使得 $\eta(\mathscr{P}_n)<\varepsilon$；因此有

$$\sum_{j=1}^n \mu_{nj}\, E(\Delta_{nj}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}\, E(\Delta_{nj}) = \sum_{j=1}^n (\mu_{nj} - \lambda_{nj}) E(\Delta_{nj}) < \varepsilon I$$

由此及式(4)便推出，给定任一 $\varepsilon>0$，都存在 N，使得对每个 $n>N$ 和每个选定的 $\hat{\lambda}_{nj} \in \Delta_{nj}$，都有

$$\| T - \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_{nj} E(\Delta_{nj}) \| < \varepsilon \tag{5}$$

由于对于 $\lambda<m$ 和 $\lambda \geqslant M$，E_λ 都是保持不变的，所以对 $a<m$ 和 $b>M$ 的具体选取是无关重要的。这就证明了式(1)。式(5)表明，积分是按一致算子收敛的意义来理解的。一致算子收敛蕴含着强算子收敛（见 § 4.9），内积是连续的，式(5)中的和是斯蒂杰型的，因此对任意选取的 $x, y \in H$，从式(1)可推出式(1*)。

(b) 现在关于多项式来证明定理，首先从 $p(\lambda)=\lambda^r$ 开始，其中 $r \in N$。对于任意的 $k<$

$\lambda\leqslant\mu<\nu$，从§9.7中的式(7)可知。

$$(E_\lambda-E_k)(E_\mu-E_\nu)=E_\lambda E_\mu-E_\lambda E_\nu-E_k E_\mu+E_k E_\nu$$
$$=E_\lambda-E_\lambda-E_k+E_k=0$$

这表明对 $j\neq k$，有$E(\Delta_{nj})E(\Delta_{nk})=0$。由于$E(\Delta_{nj})$是一个投影，所以对每个 $s=1,2,\cdots$，还有$E(\Delta_{nj})^s=E(\Delta_{nj})$。因此便得到

$$\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_{nj}E(\Delta_{nj})\right]^r=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{nj}^r E(\Delta_{nj}) \tag{6}$$

如果式（5）中的和式接近于T，则由于有界线性算子的乘法（合成）是连续的，故式(6)中左端的表达式接近于T^r。因此，根据式(6)对给定的$\varepsilon>0$，存在着N使得对一切$n>N$有

$$\left\| T^r-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{nj}^r E(\Delta_{nj})\right\|<\varepsilon$$

这就关于 $p(\lambda)=\lambda^r$ 的情况证明了式（2）和（2*）。由此，很容易就任意的实系数多项式 $p(\lambda)$证明式(2)和(2*)也是成立的。

对于给定的有界自伴线性算子，要真正的确定它的谱族，一般来说是不容易的。对某些相对简单的情况，从式(1)可以推测出它的谱族。而在其它的情况下，我们能够采用系统而有规则的手段加以处理，不过要基于更高深的方法；见邓福德（*N. Dunford*）和施瓦兹（*J. T. Schwartz*）(1958-71)，2卷，*pp*.920-921。

最后，我们列出算子 $p(T)$的一些性质，以作为本节的结束。这些性质不仅本身很有意义，并且对把谱定理推广到一般的连续函数也是很有帮助的。

9.9-2 定理（p(T)的性质） T如定理9.9-1所设，又设 p, p_1和p_2是实系数多项式。则

(a) $p(T)$是自伴的。

(b) 若 $p(\lambda)=\alpha p_1(\lambda)+\beta p_2(\lambda)$，则 $p(T)=\alpha p_1(T)+\beta p_2(T)$。

(c) 若 $p(\lambda)=p_1(\lambda)p_2(\lambda)$，则 $p(T)=p_1(T)p_2(T)$。

(d) 若对一切 $\lambda\in[m, M]$有 $p(\lambda)\geqslant 0$，则 $p(T)\geqslant 0$。

(e) 若对一切 $\lambda\in[m, M]$有 $p_1(\lambda)\leqslant p_2(\lambda)$，则 $p_1(T)\leqslant p_2(T)$。

(f) $\|p(T)\|\leqslant\max\limits_{\lambda\in J}|p(\lambda)|$，其中 $J=[m, M]$。

(g)若一个有界线性算子与T可换，则它与 $p(T)$也可换。

证明：(a)由于T是自伴的，p是实系数的多项式，所以$(\alpha_j T^j)^*=\alpha_j T^j$，从而(*a*)成立。

(b) 根据算子多项式的定义，(*b*)是明显的。

(c) 根据定义，(*c*)也是明显成立的。

(d) 由于p是实系数的，所以在它有复根（或零点）的情况下，一定共轭成对地出现。若λ通过 $p(\lambda)$的奇数重数的零点时，$p(\lambda)$要改变符号，但在$[m, M]$上有$p(\lambda)\geqslant 0$，所以$p(\lambda)$在$[m, M]$中的零点都必须是偶数重的。因此能够把$p(\lambda)$写成

$$p(\lambda)=\alpha\prod_j(\lambda-\beta_j)\prod_k(\gamma_k-\lambda)\prod_l[(\lambda-\mu_l)^2+\nu_l^2] \tag{7}$$

其中 $\beta_j \leqslant m$ 和 $\gamma_k \geqslant M$，二次因子对应于(m, M)中的复共轭零点和实零点。下面在 $p \neq 0$ 的前提下证明 $\alpha > 0$。对一切充分大的 λ，比如说，对一切 $\lambda \geqslant \lambda_0$，我们有

$$\operatorname{sgn} p(\lambda) = \operatorname{sgn} \alpha_n \lambda^n = \operatorname{sgn} \alpha_n$$

其中 n 是 p 的次数。因此 $\alpha_n > 0$ 意味着 $p(\lambda_0) > 0$，并且 γ_k 的个数（按它的重数计算）必须是偶数才使在(m, M)内$p(\lambda) \geqslant 0$。这样式（7）中的三个乘积在 λ_0 都是正的，因此要使 $p(\lambda_0) > 0$ 必须有 $\alpha > 0$。若 $\alpha_n < 0$，则 $p(\lambda_0) < 0$，要使得在(m, M)上有$p(\lambda) \geqslant 0$，γ_k 的个数应是奇数。象前一样，这就推出了式（7）中的第二个乘积在 λ_0 是负的，和 $\alpha > 0$。

我们用T代替 λ，则式（7）中的每个因子都是正算子。事实上，对每个 $x \neq 0$，置 $v = \|x\|^{-1} x$，则有 $x = \|x\| v$，并且由于 $-\beta_j \geqslant -m$，故有

$$\begin{aligned}\langle (T - \beta_j I)x, x \rangle &= \langle Tx, x \rangle - \beta_j \langle x, x \rangle \\ &\geqslant \|x\|^2 \langle Tv, v \rangle - m\|x\|^2 \\ &\geqslant \|x\|^2 \inf_{\|\tilde{v}\|=1} \langle T\tilde{v}, \tilde{v} \rangle - m\|x\|^2 = 0\end{aligned}$$

此即$T - \beta_j I \geqslant 0$。类似地可证明 $\gamma_k I - T \geqslant 0$。并且由于$T - \mu_l I$ 是自伴的，所以它的平方是正的及

$$(T - \mu_l I)^2 + \nu_l^2 I \geqslant 0$$

由于这些算子都可交换，据 9.3-1 它们的积是正的，并且由于 $\alpha > 0$，故 $p(T) \geqslant 0$。

（e）从(d)立即可以推出。

（f）令 k 表示 $|p(\lambda)|$ 在 J 上的最大值，则对于 $\lambda \in J$ 有 $0 \leqslant p(\lambda)^2 \leqslant k^2$。因此由（$e$）得到$p(T)^2 \leqslant k^2 I$，也就是，由于 $p(T)$是自伴的，故对一切 x 有

$$\langle p(T)x, p(T)x \rangle = \langle p(T)^2 x, x \rangle \leqslant k^2 \langle x, x \rangle$$

如果我们取上式两端的方根，再关于所有范数为 1 的 x 取上确界，便推出(f)中的不等式。

（g）直接从 $p(T)$的定义便可推出。

在下一节推广谱定理 9.9-1 时，将把这个定理当作主要的工具使用。

习　　题

1. 关于零算子$T = 0$：$H \to H$来验证式（1）。

2. 考虑实数 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ 和希尔伯特空间H到它的 n 个两两互相正交的子空间上的投影 $P_1, P_2, \cdots P_n$。假定$P_1 + P_2 + \cdots + P_n = I$，证明

$$E_\lambda = \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} P_k$$

定义了一个谱族。请列出相应的算子

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$$

的某些性质。

3. 若$T=I$：$H\to H$，验证式(1)。

4. 若算子T：$\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$相对于$\mathbf{R}^3$的一个标准正交基的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

试问T的谱族是什么？利用所得的结果就算子T验证式(1)。

5. 对应于n阶厄米特矩阵的谱族(E_λ)是什么？就这一情况验证式(1)。

6. 如果再假定式(1)中的自伴算子T是紧的，证明(1)将取无穷级数或有限和的形式。

7. 考虑用$y(t)=Tx(t)=tx(t)$所定义的乘法算子T：$L^2[0,1]\to L^2[0,1]$。从§9.1的习题9和定理9.2-4可得到$\sigma(T)=\sigma_c(T)=[0,1]$的结论。证明相应的谱族被定义为

$$E_\lambda x=\begin{cases} 0 & \lambda<0 \\ v_\lambda & 0\leqslant\lambda\leqslant 1 \\ x & \lambda>1 \end{cases}$$

其中

$$v_\lambda(t)=\begin{cases} x(t) & 0\leqslant t\leqslant\lambda \\ 0 & \lambda<t\leqslant 1 \end{cases}$$

(它对描绘诸如$x(t)=t^2$，$x(t)=\sin 2\pi t$的简单情况下的投影可能是有帮助的。)

8. 求用$(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\mapsto(\xi_1/1,\ \xi_2/2,\ \xi_3/3,\cdots)$所定义的算子$T$：$l^2\to l^2$的谱族。求一个标准正交的特征矢量组。在这种情况下式(1)取什么形式？

9. 求证在习题8中有

$$T=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}P_j$$

其中P_j是l^2到由$e_j=(\delta_{jn})$张成的子空间上的投影并且该级数按$B(l^2,\ l^2)$的范数是收敛的。

10. 怎样把习题9解答中的证明思想用于具有无穷多不同的非零特征值的任意紧自伴线性算子T？

§9.10 谱定理到连续函数的推广

若T是有界自伴线性算子，p是实系数多项式，则定理9.9-1关于$p(T)$是成立的。现在我们要把这个定理推广到算子$f(T)$，T仍是有界自伴线性算子，而f是一个连续实值函数。显然，我们首先必须确定$f(T)$的含义。

设T：$H\to H$是复希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子，f是$[m,M]$上的连续实值函数，其中

$$m=\inf_{\|x\|=1}\langle Tx,\ x\rangle,\qquad M=\sup_{\|x\|=1}\langle Tx,\ x\rangle \tag{1}$$

则由维尔斯特拉斯定理 4.11-5 知，存在一个实系数多项式序列(p_n)，使得

$$p_n(\lambda) \to f(\lambda) \tag{2}$$

在 $[m, M]$ 上一致收敛。相应于它，我们也有一个有界自伴线性算子 $p_n(T)$的序列。根据定理 9.9-2(f)

$$\| p_n(T) - p_r(T) \| \leqslant \max_{\lambda \in J} |p_n(\lambda) - p_r(\lambda)|$$

其中 $J = [m, M]$。由于 $p_n(\lambda) \to f(\lambda)$，所以对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在有N使得上式的右端对一切 $n, r > N$都小于 ε。因此，$(p_n(T))$是一个柯西序列，并且由于$B(H, H)$ 是完备的（见2.10-2)，故该序列在$B(H,H)$中有极限。我们就把 $f(T)$定义为这一极限；因而

$$p_n(T) \to f(T) \tag{3}$$

当然，要证明 $f(T)$的定义的合理性，我们必须证明 $f(T)$仅依赖于 f(当然也依赖于T)，而与一致收敛到 f 的多项式序列的具体选取无关。

证明：设$(\tilde{p}_n)$是另一个在 $[m,M]$ 上一致收敛到 f 的实系数多项式序列。则据前面的论述有$\tilde{p}_n(T) \to \tilde{f}(T)$。我们现在来证明 $\tilde{f}(T) = f(T)$。显然据 9.9-2(f)有

$$\tilde{p}(\lambda) - p_n(\lambda) \to 0, \text{ 因此 } \tilde{p}_n(T) - p_n(T) \to 0$$

因而，对给定的 $\varepsilon > 0$，存在着N使得对于$n > N$有

$$\| \tilde{f}(T) - \tilde{p}_n(T) \| < \varepsilon/3$$

$$\| \tilde{p}_n(T) - p_n(T) \| < \varepsilon/3$$

$$\| p_n(T) - f(T) \| < \varepsilon/3$$

从而根据三角不等式推出

$$\| \tilde{f}(T) - f(T) \| \leqslant \| \tilde{f}(T) - \tilde{p}_n(T) \| + \| \tilde{p}_n(T) - p_n(T) \| + \| p_n(T) - f(T) \| < \varepsilon$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，故 $\tilde{f}(T) - f(T) = 0$，即 $\tilde{f}(T) = f(T)$。

有了这些准备，我们就能够把定理 9.9-1 从多项式 p 推广到连续实值函数f。

9.10-1 谱定理 设T：$H \to H$是复希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子，f是$[m,M]$上的连续实值函数，参见(1)。则 $f(T)$有谱表示①

$$f(T) = \int_{m-0}^{M} f(\lambda) d E_\lambda \tag{4}$$

其中$\mathscr{E} = (E_\lambda)$ 是算子T 的谱族（见 9.8-3)；积分是按一致算子收敛意义来理解，并且对一切 $x, y \in H$有

$$\langle f(T)x, y \rangle = \int_{m-0}^{M} f(\lambda) dw(\lambda), \quad w(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle \tag{4*}$$

① 附注m－0已在定理 9.9-1 中阐明过。

其中的积分是一个通常的黎曼-斯蒂杰积分（§4.4）。

证明：我们采用定理 9.9-1 证明中的记法。对每一个 $\varepsilon>0$，存在有实系数多项式p，使得对一切 $\lambda\in[m, M]$有

$$-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant f(\lambda)-p(\lambda)\leqslant\frac{\varepsilon}{3} \tag{5}$$

并且有

$$\| f(T)-p(T)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

此外，注意到$\sum E(\Delta_{jn})=I$并利用式（5），对任一划分可得到

$$-\frac{\varepsilon}{3}I\leqslant\sum_{j=1}^{n}[f(\lambda_{nj})-p(\lambda_{nj})]E(\Delta_{nj})\leqslant\frac{\varepsilon}{3}I$$

这就推出了

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}[f(\lambda_{nj})-p(\lambda_{nj})]E(\Delta_{nj})\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

最后，由于$p(T)$用9.9的式（2）表示，所以存在N使得对每个$n>N$有

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}p(\lambda_{nj})E(\Delta_{nj})-p(T)\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

利用这些不等式，我们便能够估计$f(T)$与对应于式（4）中积分的黎曼-斯蒂杰和式之差的范数；对于$n>N$，利用三角不等式可得到

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{n}f(\lambda_{nj})E(\Delta_{nj})-f(T)\right\|\leqslant&\left\|\sum_{j=1}^{n}[f(\lambda_{nj})-p(\lambda_{nj})]E(\Delta_{nj})\right\|\\&+\left\|\sum_{j=1}^{n}p(\lambda_{nj})E(\Delta_{nj})-p(T)\right\|\\&+\| p(T)-f(T)\|\leqslant\varepsilon\end{aligned}$$

由于ε是任意的，这就证实了式（4）和（4*），从而完成了证明。

我们谈谈下述唯一性性质。

$\mathscr{E}=(E_\lambda)$是$[m, M]$上的给出表示式（4）和（4*）的唯一的谱族。

如果我们观察到式（4*）对$[m, M]$上的每一连续实值函数f都成立，而式（4*）的左端又以与$\mathscr{E}$无关的方式加以定义，上述的结论似乎是说得通的。从斯蒂杰积分的唯一性定理也可以证明它〔参见黎斯和纳吉（1953），p. 111〕；这个定理是说：对于任意固定的x和y，表达式$w(\lambda)=\langle E_\lambda x, y\rangle$由（4*）在它的连续点和在$m-0$及$M$上所确定，直到一个附加常数。由于$E_M=I$，因此$\langle E_M x, y\rangle=\langle x, y\rangle$，又由于$(E_\lambda)$是右连续的，所以我们得出$w(\lambda)$处处被唯一地确定的结论。

不难看出，定理 9.9-2 中所列出的$p(T)$的性质可推广到$f(T)$；为了后面的利用，我们把这个简单的事实陈述为下面的定理。

9.10-2 定理（f(T)的性质） 若把定理 9.9-2 中的实系数多项式p，p_1，p_2换成$[m, M]$

上的连续实值函数f，f_1，f_2，则定理仍然是成立的。

§9.11 有界自伴线性算子谱族的性质

有趣的是，希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子T的谱族$\mathscr{E}=(E_\lambda)$，直接而明显地反映出谱的性质。我们将结合着§9.9的谱表示，从$\mathscr{E}$的定义（见§9.8）推导出这类结果。

从§9.7我们知道，若H是有限维的，谱族$\mathscr{E}=(E_\lambda)$恰好在T的特征值上有（不连续的，跳跃的）"增长点"。事实上，当且仅当λ_0是T的特征值方有$E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0}\neq 0$。虽说这一事实并非意外，但值得注意的是，在无穷维的情况中仍有这个性质。

9.11-1 定理（特征值） 设$T: H\to H$是复希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子，$\mathscr{E}=(E_\lambda)$是T的谱族。则当且仅当λ_0是T的特征值，映射$\lambda\mapsto E_\lambda$在$\lambda=\lambda_0$处是不连续的（即$E_{\lambda_0}\neq E_{\lambda_0-0}$）。在这种情况下，对应的特征空间为

$$\mathscr{N}(T-\lambda_0 I)=(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0})(H) \tag{1}$$

证明：λ_0是T的特征值，当且仅当$\mathscr{N}(T-\lambda_0 I)\neq\{0\}$，所以定理的第一个论断直接从式（1）可以推出。因此，只要证明式（1）便够了。我们简单地记

$$F_0=E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0}$$

首先证明

$$F_0(H)\subset\mathscr{N}(T-\lambda_0 I) \tag{2}$$

然后再证明

$$F_0(H)\supset\mathscr{N}(T-\lambda_0 I) \tag{3}$$

从而便证明了式（1）。

式（2）的证明：

在§9.8的不等式(18)中，取$\lambda=\lambda_0-\frac{1}{n}$，$\mu=\lambda_0$，则得到

$$\left(\lambda_0-\frac{1}{n}\right)E(\Delta_0)\leqslant TE(\Delta_0)\leqslant\lambda_0 E(\Delta_0) \tag{4}$$

其中$\Delta_0=(\lambda_0-\frac{1}{n},\ \lambda_0]$。令$n\to\infty$，则$E(\Delta_0)\to F_0$，所以（4）给出了

$$\lambda_0 F_0\leqslant TF_0\leqslant\lambda_0 F_0$$

因此$TF_0=\lambda_0 F_0$，即$(T-\lambda_0 I)F_0=0$。这就证明了（2）。

式（3）的证明：

设$x\in\mathscr{N}(T-\lambda_0 I)$，我们来证明$x\in F_0(H)$。由于$F_0$是一个投影，所以只须证$F_0 x=x$。

如果$\lambda_0\notin[m, M]$，则据9.2-1有$\lambda_0\in\rho(T)$。在这种情况下，由于$F_0(H)$是一个矢量空间，因此有$\mathscr{N}(T-\lambda_0 I)=\{0\}\subset F_0(H)$。设$\lambda_0\in[m,M]$，据假设有$(T-\lambda_0 I)x=0$，这就推出了$(T-\lambda_0 I)^2x=0$，而根据9.9-1，此即

$$\int_a^b (\lambda-\lambda_0)^2 dw(\lambda)=0, \quad w(\lambda)=\langle E_\lambda x, x\rangle$$

其中 $a<m$，$b>M$。这里$(\lambda-\lambda_0)^2\geqslant 0$ 并且 $\lambda\longmapsto\langle E_\lambda x,x\rangle$ 根据 9.7-1 是单调递增的。因此在任一正长度的子区间上的积分一定是零。特别是对每一 $\varepsilon>0$ 必定有

$$0=\int_a^{\lambda_0-\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)^2 dw(\lambda)\geqslant\varepsilon^2\int_a^{\lambda_0-\varepsilon}dw(\lambda)=\varepsilon^2\langle E_{\lambda_0-\varepsilon}x,x\rangle$$

和

$$0=\int_{\lambda_0+\varepsilon}^b(\lambda-\lambda_0)^2 dw(\lambda)\geqslant\varepsilon^2\int_{\lambda_0+\varepsilon}^b dw(\lambda)$$

$$=\varepsilon^2\langle Ix,x\rangle-\varepsilon^2\langle E_{\lambda_0+\varepsilon}x,x\rangle$$

由于 $\varepsilon>0$，由此和 9.5-2 可得

$$\langle E_{\lambda_0-\varepsilon}x,x\rangle=0，\text{因此}E_{\lambda_0-\varepsilon}x=0$$

和

$$\langle x-E_{\lambda_0+\varepsilon}x,x\rangle=0，\text{因此 }x-E_{\lambda_0+\varepsilon}x=0$$

因而可以写成

$$x=(E_{\lambda_0+\varepsilon}-E_{\lambda_0-\varepsilon})x$$

若令 $\varepsilon\longmapsto 0$，则因为 $\lambda\longmapsto E_\lambda$ 是右连续的，故得到 $x=F_0x$。象前面所说明的，这就意味着式(3)。

我们知道，有界自伴线性算子T的谱落在复平面的实轴上；见 9.1-3。当然，实轴也包含有预解集 $\rho(T)$的点。例如，若 λ 是实的且 $\lambda<m$ 或 $\lambda>M$，则便有 $\lambda\in\rho(T)$；见9.2-1。特别值得注意的是，能够以非常简单的方式用谱族的性态把所有的实$\lambda\in\rho(T)$表征出来。这个定理也将立即给出T的连续谱点的特征。据 9.2-4，T的残谱是空集，从而也就完成了我们目前的讨论。

9.11-2 定理（预解集） T和$\mathscr{E}=(E_\lambda)$如定理9.11-1所设。则实数 λ_0 属于T的预解集 $\rho(T)$，当且仅当存在 $\gamma>0$，使得$\mathscr{E}=(E_\lambda)$在区间 $[\lambda_0-\gamma, \lambda_0+\gamma]$ 上是不变的。

证明：在(a)中，我们证明给定的条件对于 $\lambda_0\in\rho(T)$ 是充分的；而在(b)中，证明条件是必要的。在证明中我们要用到定理 9.1-2，这个定理是说：$\lambda_0\in\rho(T)$当且仅当存在$\gamma>0$，使得对一切 $x\in H$ 有

$$\|(T-\lambda_0 I)x\|\geqslant\gamma\|x\| \tag{5}$$

(a) 假定 λ_0 是实数，并且对某一个 $\gamma>0$ 使得$\mathscr{E}$在$J=[\lambda_0-\gamma, \lambda_0+\gamma]$ 上是不变的。则据定理 9.9-1

$$\|(T-\lambda_0 I)x\|^2=\langle(T-\lambda_0 I)^2x, x\rangle=\int_{m-0}^M(\lambda-\lambda_0)^2 d\langle E_\lambda x,x\rangle \tag{6}$$

由于$\mathscr{E}$在J上不变，所以积分在J上的值为零，并且对于 $\lambda\notin J$，有$(\lambda-\lambda_0)^2\geqslant\gamma^2$，所以(6)意味着

$$\|(T-\lambda_0 I)x\|^2\geqslant\gamma^2\int_{m-0}^M d\langle E_\lambda x,x\rangle=\gamma^2\langle x,x\rangle$$

两边取平方根，便得到式（5）。因此据9.1-2 有$\lambda_0\in\rho(T)$。

（b）反之，假定$\lambda_0\in\rho(T)$，则对某一$\gamma>0$和一切$x\in H$，式（5）是成立的。所以据式（6）和9.9-1有

$$\int_{m-0}^{M}(\lambda-\lambda_0)^2 d\langle E_\lambda x,x\rangle\geqslant\gamma^2\int_{m-0}^{M}d\langle E_\lambda x,x\rangle \qquad (7)$$

现在采取反证法：若$\mathscr{E}$在区间$[\lambda_0-\gamma,\lambda_0+\gamma]$是变化的，将会导出矛盾。事实上，这时我们能够找到一个正数$\eta<\gamma$，使得$E_{\lambda_0+\eta}-E_{\lambda_0-\eta}\neq0$，因为对于$\lambda<\mu$有$E_\lambda\leqslant E_\mu$（见9.7-1）。因此存在$y\in H$使得

$$x=(E_{\lambda_0+\eta}-E_{\lambda_0-\eta})y\neq0$$

在（7）中我们利用这个x。则

$$E_\lambda x=E_\lambda(E_{\lambda_0+\eta}-E_{\lambda_0-\eta})y$$

§9.7 中的公式（7）表明，当$\lambda<\lambda_0-\eta$时，上式为$(E_\lambda-E_\lambda)y=0$，而当$\lambda>\lambda_0+\eta$时，上式为$(E_{\lambda_0+\eta}-E_{\lambda_0-\eta})y$，因此与$\lambda$无关。因而我们可以把$K=[\lambda_0-\eta,\lambda_0+\eta]$取为式（7）中的积分区间。若$\lambda\in K$，直接计算，利用§9.7 中的式（7），便得到$\langle E_\lambda x,x\rangle=\langle(E_\lambda-E_{\lambda_0-\eta})y,y\rangle$。因此式（7）便给出

$$\int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta}(\lambda-\lambda_0)^2 d\langle E_\lambda y,y\rangle\geqslant\gamma^2\int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta}d\langle E_\lambda y,y\rangle$$

因为在$\lambda\in K$时，上式右端的积分是正的，并且$(\lambda-\lambda_0)^2\leqslant\eta^2<\gamma^2$，所以上式是不可能成立的。这说明我们关于$\mathscr{E}$在$[\lambda_0-\gamma,\lambda_0+r]$上是变化的假设不真。从而完成了证明。

这个定理也说明了，$\lambda_0\in\sigma(T)$当且仅当$\mathscr{E}$在λ_0（在$\mathbf{R}$上）的任一邻域内是变化的。据9.2-4，$\sigma_r(T)=\varnothing$，$\sigma_p(T)$的点对应于$\mathscr{E}$的不连续性（见9.11-1），因此我们有如下定理，这个定理也使得我们的讨论完整结束。

9.11-3 定理（连续谱） T和$\mathscr{E}=(E_\lambda)$如定理9.11-1所设。则实数λ_0属于T的连续谱$\sigma_c(T)$，当且仅当$\mathscr{E}$在λ_0是连续的（因而$E_{\lambda_0}=E_{\lambda_0-0}$），并且在$\lambda_0$（在$\mathbf{R}$上）的任一邻域内是变化的。

习　　题

1.对于厄米特矩阵的情况，从定理9.11-1我们能够得出什么结论？

2.定理9.11-1中的T如果是紧的并且有无穷多个特征值，关于(E_λ)从定理9.11-1和9.11-2我们能够得出什么结论？

3.验证§9.9习题7中的谱族满足本节中的三个定理。

4.我们知道，若定理9.2-1中的m是正的，则T是正的。从§9.9的谱表示式（1）如何推出这一事实？

5.我们知道，有界自伴线性算子的谱是闭的。从本节中的定理如何推出这一事实。

6.设$T: l^2\to l^2$是用“$y=(\eta_j)=Tx$，$x=(\xi_j)$，$\eta_j=\alpha_j\xi_j$，(α_j)是有限区间$[a,b]$中的任一实数序列，”定义的一个算子。证明T的谱族(E_λ)是用

$$\langle E_\lambda x, y\rangle = \sum_{\alpha_j<\lambda} \xi_j \bar{\eta}_j$$

定义的。

7.（纯点谱） 对于希尔伯特空间$H\neq\{0\}$上的有界自伴线性算子T：$H\to H$，若T有一个在H中完全的标准正交特征矢量组，则称T有纯点谱或纯离散谱。举例说明，这并不意味着$\sigma_c(T)=\varnothing$（所以通常所采用的这一术语，对初学者暂时可能会引起混乱）。

8.给出紧自伴线性算子T：$l^2\to l^2$的例子，它有纯点谱，并且使非零特征值的集合（a）是有限点集，（b）是无穷点集且对应的特征矢量集合在l^2中稠密，（c）是无穷点集且对应的特征矢量张成l^2的的子空间的闭包的正交补是有限维的，（d）与c一样，但正交补是无穷维的。在每种情况中，求一个完全标准正交特征矢量组。

9.（纯连续谱） 对于希尔伯特空间$H\neq\{0\}$上的有界自伴线性算子T：$H\to H$，若T没有特征值，则称T有纯连续谱。若T是H上的任一有界自伴线性算子，证明存在一个闭子空间$Y\subset H$，它可约化T（见§9.6习题10），并且使得$T_1=T|_Y$有纯点谱，而$T_2=T|_{Y^\perp}$有纯连续谱。（这种约化能简化对T的研究；见§9.6习题10的注释。）

10.关于习题9中T_1和T_2的谱族$(E_{\lambda 1})$和$(E_{\lambda 2})$利用T的谱族(E_λ)，我们能够作何解释？

第十章　希尔伯特空间中的无界线性算子

无界线性算子出现在很多应用之中，特别是在微分方程和量子力学方面。其理论要比有界算子的理论复杂。

在这一章我们仅限于希尔伯特空间中的无界算子；这也是在物理中最有意义的情况。事实上，在本世纪20年代后期，为了把量子力学建立在严格的数学基础之上才刺激了无界算子理论的发展。这一理论的系统开发应归功于冯·诺依曼（1929-30，1936）和 M·H· 斯通（1932）。

这一理论在微分方程中的应用为处理各种不同的问题提供了一个统一的方法，并使问题得到了极大的简化。

本章是选学内容。

本章内容概要

对于无界算子来说，定义域和延拓问题的研究变得最为重要。要使线性算子 T 的希尔伯特伴随算子 T^* 存在，T 在 H 中必须是稠定的，也就是说，其定义域 $\mathscr{D}(T)$ 在 H 中必须是稠密的（见§10.1））。另一方面，若 T 恒满足关系

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

并且是无界的，则其定义域不可能是整个 H(见10.1-1)。(倘若 T 在 H 中是稠定的)这一关系等价于 $T\subset T^*$，并且把 T 叫做是对称的（见§10.2)。自伴线性算子($T=T^*$；见10.2-5)是对称的，但在无界的情况下，其逆一般不真。

实际问题中出现的绝大多数无界线性算子都是闭的或者有闭的线性延拓（§10.3)。

自伴线性算子的谱是实的，在无界的情况下也是如此（见 10.4-2)。这种算子 T 的谱表示（见10.6-3)，通过 T 的凯莱变换

$$U=(T-iI)(T+iI)^{-1}$$

(见§10.6）和酉算子的谱定理 10.5-4 可以得到。

§10.7专门研究乘法算子和微分算子，它们是特别具有实际意义的两个无界线性算子。(这些算子在关于量子力学的第十一章中起着关键性的作用。）

在这一章,为叙述方便,我们作如下约定：我们说 T 是 H 上的算子，是指 T 的定义域为整个 H；我们说 T 是 H **内**的算子，是指 T 的定义域落在 H 中，但可以不是整个 H。此外，记法

$$S\subset T$$

将意味着 T 是 S 的一个延拓。

§10.1 无界线性算子及其希尔伯特伴随算子

整个这一章我们都将研究线性算子T：$\mathscr{D}(T)\to H$，其定义域$\mathscr{D}(T)$落在复希尔伯特空间H中。我们允许这样的算子T可以是无界的，即T可以不是有界的。

我们还记得在§2.7中曾讨论过，T是有界的当且仅当存在实数c，使得对一切$x\in\mathscr{D}(T)$有

$$\|Tx\|\leqslant c\|x\|$$

一个重要的无界线性算子是§4.13中考虑过的微分算子。

我们当然希望在各个方面能把无界线性算子和有界线性算子区别开来，而问题是我们的注意力应该集中在什么性质上。一个著名的结果（定理10.1-1）提示了我们：算子的定义域和算子的延拓问题将起着特殊的作用。事实上，我们将会看到算子的很多性质都与其定义域有关，并且在延拓和限制下，这些性质可能发生变化。

当E·海林格和O·托普里兹（E·Hellinger，O·Toeplitz，1910）发现这个定理时，曾引起人们的赞叹和迷惑，因为这个定理在两种不同的性质之间，即算子处处有定义的性质和算子有界的性质之间建立起关系。

对于希尔伯特空间H上的有界线性算子T，其自伴性是用

$$\langle Tx,\ y\rangle=\langle x,\ Ty\rangle \tag{1}$$

定义的（见§3.10-1）。这是一个很重要的性质。而下述定理表明，满足式（1）的无界线性算子T不能够定义在整个H上。

10.1-1 海林格-托普里兹定理（有界性） 如果线性算子T定义在整个复希尔伯特空间H上，并且对所有$x,y\in H$都满足式（1），则T是有界的。

证明：如果结论不真，则H将含有序列(y_n)满足

$$\|y_n\|=1,\qquad \|Ty_n\|\to\infty$$

我们考虑用

$$f_n(x)=\langle Tx,y_n\rangle=\langle x,Ty_n\rangle,\qquad n=1,2,\cdots$$

所定义的泛函f_n，其中用到了式（1）。每个f_n都定义在整个H上，并且是线性的。对每个固定的n，许瓦兹不等式给出了

$$|f_n(x)|=|\langle x,Ty_n\rangle|\leqslant\|Ty_n\|\,\|x\|$$

故泛函f_n是有界的。进而，对每个固定的$x\in H$，序列$(f_n(x))$是有界的。实际上，据许瓦兹不等式有

$$|f_n(x)|=|\langle Tx,y_n\rangle|\leqslant\|Tx\|\,\|y_n\|=\|Tx\|$$

由此和一致有界性定理4.7-3，我们得出$(\|f_n\|)$是有界的结论，不妨设对一切n有$\|f_n\|\leqslant k$。这就意味着对每个$x\in H$有

$$|f_n(x)|\leqslant\|f_n\|\,\|x\|\leqslant k\|x\|$$

而取 $x=\tilde{T}y_n$，则得到

$$\|Ty_n\|^2=\langle Ty_n,\ \tilde{T}y_n\rangle=|f_n(\tilde{T}y_n)|\leqslant k\|\tilde{T}y_n\|$$

因此有 $\|Ty_n\|\leqslant k$，这与我们原来的假设 $\|Ty_n\|\to\infty$ 矛盾。从而证明了定理。

根据这个定理，对于满足式(1)的无界线性算子 T，$\mathscr{D}(T)=H$ 是不可能的。从而我们面临着确定适当的定义域和进行延拓的问题。我们将采用方便的记法

$$S\subset T$$

据定义，T 是 S 的一个**延拓**；因而

$$\mathscr{D}(S)\subset\mathscr{D}(T)\quad 且\quad S=T|_{\mathscr{D}(S)}$$

若 $\mathscr{D}(S)$ 是 $\mathscr{D}(T)$ 的真子集，即 $\mathscr{D}(T)-\mathscr{D}(S)\neq\varnothing$，则把 T 叫做 S 的真延拓。

在有界算子的理论中，算子 T 的希尔伯特伴随算子 T^* 起着基本的作用。所以首先让我们把这个重要的概念推广到无界算子。

对于有界算子 T，算子 T^* 被定义为

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$$

（见3.9-1），我们能够把它写成

$$(a)\quad\langle Tx,y\rangle=\langle x,y^*\rangle,\qquad(b)\quad y^*=T^*y \tag{2}$$

T^* 在 H 上存在，并且是具有范数 $\|T^*\|=\|T\|$ 的有界线性算子；见 3.9-2。

在一般情况下，我们仍打算利用式(2)。很显然，T^* 则只能对于这样的 $y\in H$ 来定义，关于 y 有一个 y^* 使得式(2)对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$ 都成立。

重要的一点是，要使 T^* 是一个算子（映射），对于假定为属于 T^* 的定义域 $\mathscr{D}(T^*)$ 的每一个 y，所对应的 $y^*=T^*y$ 应该是唯一的。而要使这一点成立，当且仅当

T 在 H 中是**稠定的**，即 $\mathscr{D}(T)$ 在 H 中是稠密的。

实际上，若 $\mathscr{D}(T)$ 在 H 中不是稠密的，则有 $\overline{\mathscr{D}(T)}\neq H$，$\overline{\mathscr{D}(T)}$ 在 H 中的正交补（§3.3）含有一个非零元 y_1，且 $y_1\perp x$ 对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$ 成立，亦即 $\langle x,y_1\rangle=0$。则在式(2)中又可得到

$$\langle x,y^*\rangle=\langle x,y^*\rangle+\langle x,y_1\rangle=\langle x,y^*+y_1\rangle$$

这表明对应于 y 的 y^* 不是唯一的。另一方面，若 $\mathscr{D}(T)$ 在 H 中是稠密的，则据3.3-7 $\mathscr{D}(T)^\perp=\{0\}$。因此对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$ 有 $\langle x,y_1\rangle=0$ 便意味着 $y_1=0$，所以 $y^*+y_1=y^*$，这就是所希望的唯一性。

若 $\mathscr{D}(T)$ 是整个 H，我们把 T 叫做 H **上**的算子，若 $\mathscr{D}(T)$ 落在 H 内，但可以不是整个 H，便把 T 叫做 H **内**的算子。这一约定对后面的叙述是方便的。

鉴于上述情况，提出如下定义：

10.1.2 定义（希尔伯特-伴随算子） 设 $T:\mathscr{D}(T)\to H$ 是复希尔伯特空间 H 中的一个（可能无界的）稠定线性算子。则 T 的希尔伯特-伴随算子 $T^*:\mathscr{D}(T^*)\to H$ 被定义如下：T^* 的定义域 $\mathscr{D}(T^*)$ 是由所有这样的 $y\in H$ 构成，对于该 y，有一个 $y^*\in H$ 存在，对一

切 $x \in \mathscr{D}(T)$ 都满足

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle \tag{2a}$$

对于每个这样的 $y \in \mathscr{D}(T^*)$，通过

$$y^* = T^*y \tag{2b}$$

则可用 y^*来定义希尔伯特伴随算子T^*。

换句话说，一个元 $y \in H$属于 $\mathscr{D}(T^*)$当（且仅当）把内积 $\langle Tx, y\rangle$ 看作为 x 的函数时，对一切 $x \in \mathscr{D}(T)$，它能够表示为 $\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$。并且对于这个 y，公式(2)唯一地确定了所对应的y^*，因为根据假设$\mathscr{D}(T)$在H中是稠密的。

读者可以证明T^*是一个线性算子。

在我们下面的研究中需要用到算子的和及积（合成）。因为不同的算子可以有不同的定义域，特别是对于无界的情况，所以我们应该非常细心。因此，我们首先应该定义，在这种更为一般的情形下，算子的和与积是什么意思。下面的处理是相当自然的。

设S：$\mathscr{D}(S) \to H$和T：$\mathscr{D}(T) \to H$是两个线性算子，其中$\mathscr{D}(S) \subset H$，$\mathscr{D}(T) \subset H$。则S与T之和$S+T$是这样一个线性算子，其定义域为

$$\mathscr{D}(S+T) = \mathscr{D}(S) \cap \mathscr{D}(T)$$

对每个 $x \in \mathscr{D}(S+T)$定义其象为

$$(S+T)x = Sx + Tx$$

注意，$\mathscr{D}(S+T)$是使S和T同时都有意义的最大集合，并且是一个矢量空间。

进一步还会注意到，总有$0 \in \mathscr{D}(S+T)$，所以$\mathscr{D}(S+T)$不会是空集。显然，我们真正希望的是$\mathscr{D}(S+T)$还含有另外的元。

让我们来定义积TS，其中S与T如前所设。设M是$\mathscr{D}(S)$中的且其在S作用下的象落在$\mathscr{D}(T)$中的最大子集；因而有

$$S(M) = \mathscr{R}(S) \cap \mathscr{D}(T)$$

其中$\mathscr{R}(S)$是S的值域；见图65。则算子S与T之积TS被定义为这样的一个算子：其定义域$\mathscr{D}(TS) = M$且使得对一切$x \in \mathscr{D}(TS)$都有

$$(TS)x = T(Sx)$$

在定义中把S与T的位置交换，则可看到积ST是这样一个算子；对一切 $x \in \mathscr{D}(ST)$有

$$(ST)x = S(Tx)$$

其中$\mathscr{D}(ST) = \tilde{M}$是$\mathscr{D}(T)$的且其在$T$作用下的象落在$\mathscr{D}(S)$中的最大子集；因而有

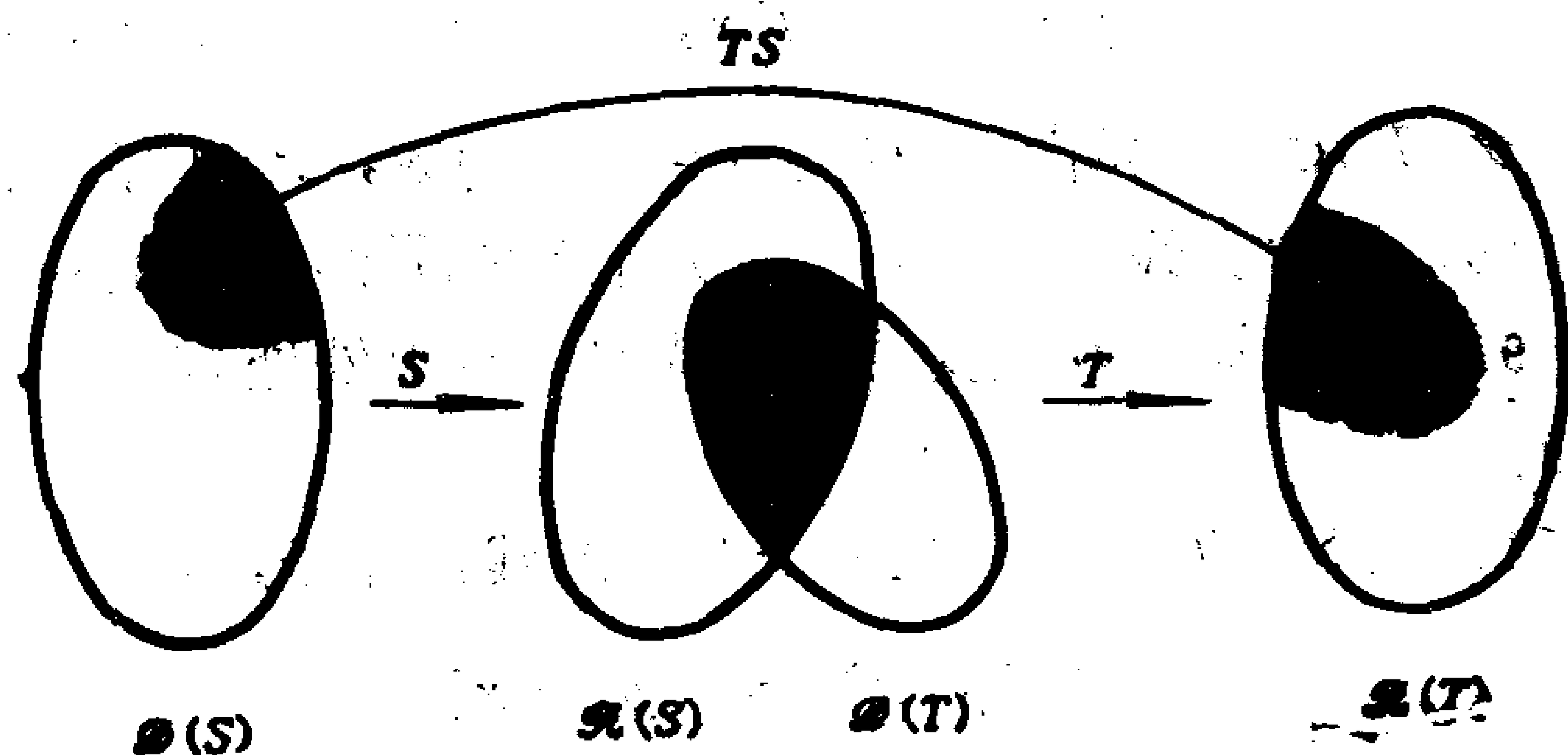


图65 线性算子之积

$$T(\tilde{M}) = \mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(S)$$

TS和ST都是线性算子，这是很容易验证的。要特别注意，据2.6-9 $\mathscr{R}(S)$是一个矢量空间，所以$S(M)$也是一个矢量空间，由于S是线性的，这意味着M是一个矢量空间。同理可证$\tilde{M}$也是一个矢量空间。

习　　题

1. 求证：线性算子T的希尔伯特-伴随算子T^*也是线性的。

2. 证明：对于有界线性算子，我们这里关于希尔伯特-伴随算子的定义也给出了定义3.9-1，其中$H_1 = H_2 = H$。

3. 证明：对于无界的算子

$$(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$$

仍然是成立的。

4. 证明：

$$(T_1 + T_2) T_3 = T_1 T_3 + T_2 T_3$$

$$T_1 (T_2 + T_3) \supset T_1 T_2 + T_1 T_3$$

给出使第二个公式为等式的充分条件。

5. 证明：

$$(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$$

$$(S + T)^* \supset S^* + T^*$$

要使第二个关系式有意义，我们应要求什么条件？

6. 证明：如果习题5中的S在整个H上有定义且是有界的，则

$$(S + T)^* = S^* + T^*$$

7. 证明：其定义域在H中不稠密的有界线性算子T：$\mathscr{D}(T) \to H$总有一个到H的有界线性延拓，且延拓算子的范数仍等于$\|T\|$。

8. 设T：$\mathscr{D}(T) \to l^2$被定义为

$$y = (\eta_j) = Tx, \quad \eta_j = j\xi_j, \quad x = (\xi_j)$$

其中$\mathscr{D}(T) \subset l^2$由所有这样的$x = (\xi_j)$构成，$x$只有有限多个非零项$\xi_j$。(a) 证明$T$是无界的，(b) T有真线性延拓吗？(c) 能够把T线性延拓到整个空间l^2吗？

9. 若线性算子T在复希尔伯特空间H上处处有定义，证明其希尔伯特-伴随算子T^*是有界的。

10. 设S和T是定义在整个H上的线性算子，且对所有的$x, y \in H$都满足

$$\langle Ty, x \rangle = \langle y, Sx \rangle$$

证明：T是有界的且S为T的希尔伯特-伴随算子。

§10.2 希尔伯特-伴随算子，对称和自伴线性算子

在下面两个定理中，我们将陈述希尔伯特-伴随算子的某些基本性质。在这里，根据定义

$$T^{**}=(T^*)^*$$

10.2-1 定理（希尔伯特-伴随算子） 设S：$\mathscr{D}(S)\to H$和T：$\mathscr{D}(T)\to H$是在复希尔伯特空间H中稠定的线性算子。则

(a) 若$S\subset T$，则$T^*\subset S^*$。

(b) 若$\mathscr{D}(T^*)$在H中稠密，则$T\subset T^{**}$。

证明：(a)据T^*的定义，对一切$x\in\mathscr{D}(T)$和一切$y\in\mathscr{D}(T^*)$有

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle \tag{1}$$

由于$S\subset T$，这就意味着对一切$x\in\mathscr{D}(S)$和$y\in\mathscr{D}(T^*)$有

$$\langle Sx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle \tag{2}$$

而据S^*的定义，对一切$x\in\mathscr{D}(S)$和一切$y\in\mathscr{D}(S^*)$有

$$\langle Sx,y\rangle=\langle x,S^*y\rangle \tag{3}$$

由此和式(2)我们将推出$\mathscr{D}(T^*)\subset\mathscr{D}(S^*)$。由于后面将出现类似的结论，所以我们详细地阐明这一步。根据希尔伯特-伴随算子S^*的定义，其定义域$\mathscr{D}(S^*)$包括了所有这样的y，对于它，当x在$\mathscr{D}(S)$上取遍时，$\langle Sx, y\rangle$有表示式(3)。由于当x在$\mathscr{D}(S)$上取遍时，式(2)也以同样的形式表示$\langle Sx,y\rangle$，所以使式(2)有效的y的集合必须是使式(3)成立的y的集合的(真或假)子集，也就是必有$\mathscr{D}(T^*)\subset\mathscr{D}(S^*)$。再由式(2)和(3)容易推出，对一切$y\in\mathscr{D}(T^*)$都有$S^*y=T^*y$，从而据定义得到$T^*\subset S^*$。

(b) 在式(1)中取复共轭，对一切$y\in\mathscr{D}(T^*)$和一切$x\in\mathscr{D}(T)$有

$$\langle T^*y,x\rangle=\langle y,Tx\rangle \tag{4}$$

由于$\mathscr{D}(T^*)$在H中是稠密的，所以T^{**}存在，并且据定义对一切$y\in\mathscr{D}(T^*)$和一切$x\in\mathscr{D}(T^{**})$有

$$\langle T^*y,x\rangle=\langle y,T^{**}x\rangle$$

由此和式(4)，基于和(a)一样的理由，可看出$x\in\mathscr{D}(T)$也是属于$\mathscr{D}(T^{**})$的，并且对于该x有$T^{**}x=Tx$。这意味着$T\subset T^{**}$。

我们的第二个定理是讲：在怎样的条件下，伴随算子的逆等于逆算子的伴随。（注意，这就把§3.9中习题2推广到可以是无界的线性算子上。）

10.2-2 定理（希尔伯特-伴随算子的逆） T如定理10.2-1所设。此外，还假定T是内射（*injective*）且其值域$\mathscr{R}(T)$在H中稠密。则T^*是内射，并且

$$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^* \tag{5}$$

证明：由于T在H中是稠定的，故T^*存在。由于T是内射，所以T^{-1}也存在。由于

$\mathscr{D}(T^{-1})=\mathscr{R}(T)$在$H$在中是稠密的，所以$(T^{-1})^*$存在。我们必须证明$(T^*)^{-1}$存在且满足式(5)。

令 $y\in\mathscr{D}(T^*)$，则对一切 $x\in\mathscr{D}(T^{-1})$有$T^{-1}x\in\mathscr{D}(T)$，并且

$$\langle T^{-1}x,\ T^*y\rangle=\langle TT^{-1}x,y\rangle=\langle x,y\rangle \tag{6}$$

另一方面，据T^{-1}的希尔伯特-伴随算子的定义，对一切 $x\in\mathscr{D}(T^{-1})$有

$$\langle T^{-1}x,\ T^*y\rangle=\langle x,(T^{-1})^*T^*y\rangle$$

这表明$T^*y\in\mathscr{D}((T^{-1})^*)$。进而将上式与式(6)比较，可得到

$$(T^{-1})^*T^*y=y,\qquad y\in\mathscr{D}(T^*) \tag{7}$$

我们看到，$T^*y=0$ 蕴含着 $y=0$。因此$(T^*)^{-1}$：$\mathscr{R}(T^*)\rightarrow\mathscr{D}(T^*)$ 据2.6-10是存在的。此外，由于$(T^*)^{-1}T^*$是$\mathscr{D}(T^*)$上的恒等算子，与式(7)比较说明

$$(T^*)^{-1}\subset(T^{-1})^* \tag{8}$$

为了证明式(5)，我们只须证明

$$(T^*)^{-1}\supset(T^{-1})^* \tag{9}$$

为此我们考虑任一 $x\in\mathscr{D}(T)$ 和 $y\in\mathscr{D}((T^{-1})^*)$。则有 $Tx\in\mathscr{R}(T)=\mathscr{D}(T^{-1})$，并且

$$\langle Tx,(T^{-1})^*y\rangle=\langle T^{-1}Tx,y\rangle=\langle x,y\rangle \tag{10}$$

另一方面，据T的希尔伯特-伴随算子的定义，对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$有

$$\langle Tx,(T^{-1})^*y\rangle=\langle x,T^*(T^{-1})^*y\rangle$$

由此和式(10)可推得$(T^{-1})^*y\in\mathscr{D}(T^*)$，并且

$$T^*(T^{-1})^*y=y,\qquad y\in\mathscr{D}((T^{-1})^*) \tag{11}$$

而根据逆的定义，$T^*(T^*)^{-1}$ 是 $\mathscr{D}((T^*)^{-1})=\mathscr{R}(T^*)$ 上的恒等算子，并且 $(T^*)^{-1}$：$\mathscr{R}(T^*)\rightarrow\mathscr{D}(T^*)$ 是满射。因此与式 (11) 比较可得 $\mathscr{D}((T^*)^{-1})\supset\mathscr{D}((T^{-1})^*)$，从而有$(T^*)^{-1}\supset(T^{-1})^*$，这就是要证明的式(9)。与式(8)合在一起便给出式(5)。

在研究有界线性算子时，曾用希尔伯特-伴随算子定义自伴性（见§3.10)。由于自伴性在理论上和应用中都是一个极为重要的概念，因此我们希望知道能否将它推广到包括无界线性算子的情况；如果能的话，又如何加以推广。为此，我们首先介绍下面的概念。

10.2-3 **定义（对称线性算子）** 设T：$\mathscr{D}(T)\rightarrow H$是在复希尔伯特空间$H$中稠定的线性算子。如果对一切 $x,y\in\mathscr{D}(T)$都有，

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle$$

则称T是对称的线性算子。

值得注意的是：对称性能够以简单的方式用希尔伯特-伴随算子来表述。在我们进一步的研究中，这种表述是很有用的。这也促使我们在定义10.2-3中做出T是稠定的假设。

10.2-4 **引理（对称算子）** 在复希尔伯特空间H中稠定的线性算子T是对称的，当且仅

当

$$T \subset T^* \tag{12}$$

证明：T^*所定义的关系是对一切 $x \in \mathscr{D}(T)$和一切 $y \in \mathscr{D}(T^*)$有

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \tag{13}$$

成立。假定$T \subset T^*$，则对于 $y \in \mathscr{D}(T)$有$T^*y = Ty$，所以对 $x, y \in \mathscr{D}(T)$，式(13)变成

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \tag{14}$$

因此T是对称的。

反过来，假定对一切 $x, y \in \mathscr{D}(T)$式 (14) 是成立的，则与式 (13) 比较说明，$\mathscr{D}(T) \subset \mathscr{D}(T^*)$且$T = T^*|_{\mathscr{D}(T)}$。据定义，这就意味着$T^*$是$T$的一个延拓。

现在可把自伴性定义如下：

10-2.5 定义（自伴线性算子） 设T：$\mathscr{D}(T) \to H$是一个在复希尔伯特空间H中稠定的线性算子。如果

$$T = T^* \tag{15}$$

则称T是一个自伴线性算子。

每一个自伴线性算子都是对称的。

另一方面，对称线性算子未必是自伴的。因为T^*可以是T的一个真延拓，也就是$\mathscr{D}(T) \neq \mathscr{D}(T^*)$。很显然，如果$\mathscr{D}(T) = H$，则这种情况不可能出现。因此，我们有：

对于复希尔伯特空间H上的线性算子T：$H \to H$来说，对称性和自伴性这两个概念是等同的。

要注意：在这种情况下，T是有界的（见10.1-1），这也在前面阐明了，比如在§3.10中，为什么没有出现对称性的概念。

此外，还有一个与 3.10-3 类似的结论：

在复希尔伯特空间H中稠定的线性算子T是对称的，当且仅当对所有的 $x \in \mathscr{D}(T)$，$\langle Tx, x\rangle$ 都是实数。

习　　题

1.证明：自伴线性算子是对称的。

2.若S和T使得ST在H中是稠定的，证明

$$(ST)^* \supset T^*S^*$$

而若S定义在整个H上且是有界的，则有

$$(ST)^* = T^*S^*$$

3.设H是一个复希尔伯特空间，T：$\mathscr{D}(T) \to H$是在H中稠定的线性算子。证明：T是对称的，当且仅当对一切 $x \in \mathscr{D}(T)$，$\langle Tx, x\rangle$ 都是实的。

4.若T是对称的，证明T^{**}也是对称的。

5.若线性算子T在H中是稠定的且其伴随算子在整个H上有定义，证明T是有界的。

6.证明：$y=(\eta_j)=Tx=(\xi_j/j)$定义了一个有界自伴线性算子T：$l^2\to l^2$，且T有一个无界自伴的逆。

7.设T：$\mathscr{D}(T)\to H$是一个有界对称线性算子。证明T有一个到$\overline{\mathscr{D}(T)}$上的有界对称线性延拓$\tilde{T}$。

8.若T是对称的且$\tilde{T}$是T的一个对称延拓，证明$\tilde{T}\subset T^*$。

9.一个对称线性算子若没有真正对称延拓，则称之为**最大的对称**线性算子。证明自伴线性算子T是最大的对称线性算子。

10.若自伴线性算子T：$\mathscr{D}(T)\to H$是内射，证明：(a) $\overline{\mathscr{R}(T)}=H$，且(b) T^{-1}是自伴的。

§10.3 闭线性算子和闭包

在应用中可以导出无界的线性算子。但其中很多是闭的或至少有一个闭的线性延拓。这表明了闭线性算子在无界算子的理论中起着重要的作用。在这一节我们将考虑闭线性延拓及其某些性质。

我们先复习闭线性算子的定义和§4.13中的一些结果，把这些系统的讲述用于希尔伯特空间是合适的。

10.3-1 **定义（闭线性算子）** 设T：$\mathscr{D}(T)\to H$是一个线性算子，其中$\mathscr{D}(T)\subset H$，而H是一个复希尔伯特空间。若T的图

$$\mathscr{G}(T)=\{(x,y)\mid x\in\mathscr{D}(T),\ y=Tx\}$$

在$H\times H$中是闭的，则把T叫做闭线性算子，其中$H\times H$上的范数定义为

$$\|(x,y)\|=(\|x\|^2+\|y\|^2)^{1/2}$$

而它是从内积

$$\langle(x_1,y_1),\ (x_2,y_2)\rangle=\langle x_1,x_2\rangle+\langle y_1,y_2\rangle$$

导出的。

10.3-2**定理（闭线性算子）** 设T：$\mathscr{D}(T)\to H$是一个线性算子，其中$\mathscr{D}(T)\subset H$，H是一个复希尔伯特空间。则：

(a) T是闭的，当且仅当

$$x_n\to x\quad [x_n\in\mathscr{D}(T)]\quad 且\quad Tx_n\to y$$

合在一起意味着$x\in\mathscr{D}(T)$且$Tx=y$（见4.13-3）。

(b) 若T是闭的且$\mathscr{D}(T)$也是闭的，则T是有界的（见4.13-2）。

(c) 设T是有界的。则T是闭的，当且仅当$\mathscr{D}(T)$是闭的（见4.13-5）。

不管T是否闭的，我们总有如下值得重视的定理。

10.3-3 **定理（希尔伯特-伴随算子）** 在10.1-2中所定义的希尔伯特-伴随算子T^*是闭的。

证明：我们把定理10.3-2(a)应用到T^*，来证明该定理；也就是说，我们考察$\mathscr{D}(T^*)$

中的任一满足

$$y_n \to y_0 \quad 且 \quad T^* y_n \to z_0$$

的序列(y_n)，并证明 $y_0 \in \mathscr{D}(T^*)$和 $z_0 = T^* y_0$。

据T^*的定义，对每个 $y \in \mathscr{D}(T)$我们都有

$$\langle Ty, y_n \rangle = \langle y, T^* y_n \rangle$$

由于内积是连续的，两端令 $n \to \infty$便得到对每个 $y \in \mathscr{D}(T)$都成立的等式

$$\langle Ty, y_0 \rangle = \langle y, z_0 \rangle$$

据T^*的定义，这就证明了 $y_0 \in \mathscr{D}(T^*)$且 $z_0 = T^* y_0$。把定理 10.3-2(*a*)应用到T^*，便得到T^*是闭的结论。

经常会出现这种情况：一个算子不是闭的，但它有一个闭的延拓。为了讨论这种情况，首先来陈述一些有关的概念。

10.3-4 定义（可闭算子，闭包） 若线性算子T有一个延拓T_1，且T_1是一个闭线性算子，则称T是可闭的，并且把T_1叫做T的一个闭线性延拓。

若$\boldsymbol{T}$是可闭线性算子T的一个闭线性延拓，并且T的每一个闭线性延拓T_1都也是$\boldsymbol{T}$的一个闭线性延拓，则称$\boldsymbol{T}$是T的最小（的闭线性）延拓。如果T的最小延拓$\boldsymbol{T}$存在的话，则又把$\boldsymbol{T}$叫做T的闭包。

若$\boldsymbol{T}$存在，则它是唯一的。（为什么？）

T若不是闭的，T是否有闭的延拓？

例如，量子力学中的所有无界线性算子实际上都是可闭的。

对于对称线性算子（见10.2-3），情形是非常的简单。

10.3-5 定理(闭包) 设T：$\mathscr{D}(T) \to H$是一个在复希尔伯特空间H中稠定的线性算子。若T是对称的，则其闭包$\boldsymbol{T}$存在且是唯一的。

证明：为了定义一个$\boldsymbol{T}$，我们首先定义其定义域$M = \mathscr{D}(\boldsymbol{T})$，然后再定义$\boldsymbol{T}$本身。最后再证明所定义的$\boldsymbol{T}$的确是$T$的闭包。

设M是所有这种 $x \in H$的集合：对于该 x，在$\mathscr{D}(T)$中存在一个序列(x_n)，并且存在一个 $y \in H$使得

$$x_n \to x \quad 且 \quad Tx_n \to y \tag{1}$$

不难看出M是一个矢量空间。显然有$\mathscr{D}(T) \subset M$。

根据式(1)，我们令

$$y = \boldsymbol{T} x, \quad (x \in M) \tag{2}$$

便在M上定义了$\boldsymbol{T}$。为了证明$\boldsymbol{T}$是T的闭包，我们必须证明$\boldsymbol{T}$具有闭包定义中的一切性质。

很明显，$\mathscr{D}(\boldsymbol{T}) = M$。此外，还要证明：

(*a*) 对每个 $x \in \mathscr{D}(\boldsymbol{T})$有唯一的 y 与之对应。

(*b*) $\boldsymbol{T}$是T的一个对称线性延拓。

(*c*) $\boldsymbol{T}$是闭的且是T的闭包。

详细证明如下：

(a) y关于每个 $x\in\mathscr{D}(\bar{T})$的唯一性。除了式(1)中的(x_n)之外，设$(\tilde{x}_n)$是$\mathscr{D}(T)$中满足

$$\tilde{x}_n\to x \qquad \text{且} \qquad T\tilde{x}_n\to\tilde{y}$$

的另一序列。由于T是线性的，故$Tx_n-T_n\tilde{x}=T(x_n-\tilde{x}_n)$。又由于$T$是对称的，因而对每个 $v\in\mathscr{D}(T)$有

$$\langle v,\ Tx_n-T\tilde{x}_n\rangle=\langle Tv,\ x_n-\tilde{x}_n\rangle$$

令 $n\to\infty$，利用内积的连续性便得到

$$\langle v,\ y-\tilde{y}\rangle=\langle Tv,\ x-x\rangle=0$$

即 $y-\tilde{y}\perp\mathscr{D}(T)$。因为$\mathscr{D}(T)$在$H$中稠密，据 3.3-7 有$\mathscr{D}(T)^{\perp}=\{0\}$，并且$y-\tilde{y}=0$。

(b) 关于$\bar{T}$是T的对称线性延拓的证明。由于T是线性的，据式(1)和式(2)知$\bar{T}$也是线性的，同时也表明了$\bar{T}$是T的一个延拓。下面来证明T的对称性蕴含着$\bar{T}$的对称性。据(1)和(2)，对所有的 $x,z\in\mathscr{D}(\bar{T})$，在$\mathscr{D}(T)$中有序列$(x_n)$和$(z_n)$满足

$$x_n\to x,\qquad Tx_n\to\bar{T}x$$

$$z_n\to z,\qquad Tz_n\to\bar{T}z$$

由于T是对称的，故$\langle z_n, Tx_n\rangle=\langle Tz_n, x_n\rangle$。令$n\to\infty$，则有$\langle z,\bar{T}x\rangle=\langle\bar{T}z, x\rangle$，其中用到内积的连续性。由于 $x,z\in\mathscr{D}(\bar{T})$是任意的，故证明了$\bar{T}$是对称的。

(c) 关于$\bar{T}$是闭的和是T的闭包的证明。我们用定理 10.3-2(a) 来证明$\bar{T}$的闭性，也就是通过考察$\mathscr{D}(\bar{T})$中的任一满足

$$w_m\to x \quad \text{且} \quad \bar{T}w_m\to y \tag{3}$$

的序列(w_m)来证明 $x\in\mathscr{D}(\bar{T})$和$\bar{T}x=y$。

每个 w_m (m固定) 都属于$\mathscr{D}(\bar{T})$。据$\mathscr{D}(\bar{T})$的定义，在$\mathscr{D}(T)$中有一个收敛于w_m的序列，并且该序列在 T 之下的象序列收敛于 $\bar{T}w_m$。因此，对每个固定的 m，存在一个 $v_m\in\mathscr{D}(T)$满足

$$\|w_m-v_m\|<\frac{1}{m} \qquad \text{和} \qquad \|\bar{T}w_m-Tv_m\|<\frac{1}{m}$$

由此和式(3)可以推得

$$v_m\to x \quad \text{和} \quad Tv_m\to y$$

再根据$\mathscr{D}(\bar{T})$和$\bar{T}$的定义，便证明了 $x\in\mathscr{D}(\bar{T})$和 $y=\bar{T}x$。这就是我们要证明的关系。因此据10.3-2(a)知$\bar{T}$是闭的。

根据定理10.3-2(a)和$\mathscr{D}(\bar{T})$的定义可以看出，$\mathscr{D}(\bar{T})$的每个点也一定属于T的每一个闭线性延拓的定义域。这就证明了$\bar{T}$是T的闭包，同时也蕴含了T的闭包是唯一的。

不难看出，对称线性算子的闭包的希尔伯特-伴随算子等于该算子的希尔伯特-伴随算子，这是很有意义的一个结果。

10.3-6 定理（闭包的希尔伯特-伴随算子） 对于上面定理中的对称线性算子T，有

$$(\overline{T})^* = T^* \tag{4}$$

证明：由于$T \subset \overline{T}$，据定理 10.2-1(a) 有$(\overline{T})^* \subset T^*$。因此$\mathscr{D}((\overline{T})^*) \subset \mathscr{D}(T^*)$。如果还能证明

$$y \in \mathscr{D}(T^*) \quad \Rightarrow \quad y \in \mathscr{D}((\overline{T})^*) \tag{5}$$

则便有$\mathscr{D}(T^*) \subset \mathscr{D}((\overline{T})^*)$，从而有$\mathscr{D}(T^*) = \mathscr{D}((\overline{T})^*)$，这就证明了式(4)。

设 $y \in \mathscr{D}(T^*)$，据希尔伯特-伴随算子的定义，欲证明式(5)，我们必须证明对每个$x \in \mathscr{D}(\overline{T})$有

$$\langle \overline{T}x, y \rangle = \langle x, (\overline{T})^* y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \tag{6}$$

其中第二个等式是从$(\overline{T})^* \subset T^*$推得的。

根据前面证明中对$\mathscr{D}(\overline{T})$和$\overline{T}$的定义〔见式(1)和(2)〕，对每个$x \in \mathscr{D}(\overline{T})$，在$\mathscr{D}(T)$中存在序列$(x_n)$满足

$$x_n \to x \quad 和 \quad Tx_n \to y_0 = \overline{T}x$$

因为根据设有 $y \in \mathscr{D}(T^*)$，而且 $x_n \in \mathscr{D}(T)$，所以根据希尔伯特-伴随算子的定义有

$$\langle Tx_n, y \rangle = \langle x_n, T^* y \rangle$$

若令$n \to \infty$，并利用内积的连续性，便得到

$$\langle \overline{T}x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \qquad x \in \mathscr{D}(\overline{T})$$

这就是我们要证明的关系(6)。

习　　题

1. 设T：$\mathscr{D}(T) \to l^2$，其中$\mathscr{D}(T) \subset l^2$是由所有的这种 $x = (\xi_j)$构成，它只有有限多个非零项 ξ_j，并且 $y = (\eta_j) = Tx = (j\xi_j)$。这个算子$T$是无界的（见§10.1 习题8）。证明$T$不是闭的。

2. 显然，任一线性算子T：$\mathscr{D}(T) \to H$的图$\mathscr{G}(T)$都有一个闭包$\overline{\mathscr{G}(T)} \subset H \times H$。为什么这并不意味着每个线性算子都是可闭的？

3. 证明：按定义 10.3-1 中给出的内积，$H \times H$是一个希尔伯特空间。

4. 设T：$\mathscr{D}(T) \to H$是一个闭线性算子。若T是内射，证明T^{-1}是闭的。

5. 证明：习题1中的T有一个到

$$\mathscr{D}(T_1) = \left\{ x = (\xi_j) \in l^2 \,\middle|\, \sum_{j=1}^{\infty} j^2 |\xi_j|^2 < \infty \right\}$$

上的闭线性延拓T_1，它是用$T_1 x = (j\xi_j)$定义的。（利用习题4。）

6. 若T是一个对称线性算子，证明T^{**}是T的一个闭对称线性延拓。

7. 证明：线性算子T的希尔伯特-伴随算子的图$\mathscr{G}(T^*)$是通过

$$\mathscr{G}(T^*)=[U(\mathscr{G}(T))]^{\perp}$$

与$\mathscr{G}(T)$联系在一起的，其中U：$H\times H\to H\times H$是用$(x,y)\mapsto(y,-x)$来定义的。

8. 若T：$\mathscr{D}(T)\to H$是一个稠定的闭线性算子，证明T^*是稠定的，并且$T^{**}=T$（利用习题7）。

9.（**闭图定理**）证明：复希尔伯特空间H上的闭线性算子T：$H\to H$是有界的。（利用习题8，当然不用4.13-2，给出一个独立的证明。）

10. 若T是闭的，证明$T_\lambda=T-\lambda I$是闭的，若T_λ^{-1}存在，则T_λ^{-1}是闭的。

§10.4 自伴线性算子的谱性质

有界自伴线性算子的一般谱性质曾在§9.1和§9.2中讨论过。其中的一些性质对于无界自伴线性算子仍然是成立的。特别是，特征值都是实的，其证明与定理9.1-1的证明一样。

更为一般地说，整个谱仍然是实的，并且是闭的，虽然不再是有界的。为了证明谱是实的，首先让我们把表征预解集$\rho(T)$的定理9.1-2加以推广。其证明几乎与以前一样。

10.4-1 定理（正则值） 设T：$\mathscr{D}(T)\to H$是一个在复希尔伯特空间H中稠定的自伴线性算子。则λ属T的预解集$\rho(T)$的充分必要条件是：存在$c>0$使得对每个$x\in\mathscr{D}(T)$有

$$\|T_\lambda x\|\geqslant c\|x\| \tag{1}$$

其中$T_\lambda=T-\lambda I$。

证明：(a)设$\lambda\in\rho(T)$。则据定义7.2-1，预解算子$R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}$存在且有界，不妨设，$\|R_\lambda\|=k>0$。因此，由于对$x\in\mathscr{D}(T)$有$R_\lambda T_\lambda x=x$，故

$$\|x\|=\|R_\lambda T_\lambda x\|\leqslant\|R_\lambda\|\ \|T_\lambda x\|=k\|T_\lambda x\|$$

两端用k去除，便得到$\|T_\lambda x\|\geqslant c\|x\|$，其中$c=1/k$。

(b) 反之，假定式(1)对某一$c>0$和一切$x\in\mathscr{D}(T)$成立。我们来考察矢量空间，即T_λ的值域：

$$Y=\{y\mid y=T_\lambda x,\ x\in\mathscr{D}(T)\}$$

并证明

(α) T_λ：$\mathscr{D}(T)\to Y$是对射；

(β) Y在H中是稠密的；

(γ) Y是闭的。

合在一起便推出预解算子$R_\lambda=T_\lambda^{-1}$定义在整个H上。而R_λ的有界性则容易从式(1)推出，从而证明了$\lambda\in\rho(T)$。详细证明如下：

(α) 考虑满足$T_\lambda x_1=T_\lambda x_2$的任意两个元$x_1$，$x_2\in\mathscr{D}(T)$，则由于$T_\lambda$是线性的，故由式(1)得到

$$0=\|T_\lambda x_1-T_\lambda x_2\|=\|T_\lambda(x_1-x_2)\|\geqslant c\|x_1-x_2\|$$

因为$c>0$，这就得到$\|x_1-x_2\|=0$。因此$x_1=x_2$，所以算子T_λ：$\mathscr{D}(T)\to Y$是对射。

(β) 我们通过证明“$x_0\perp Y$ 蕴含着 $x_0=0$”来证明$\bar{Y}=H$。设 $x_0\perp \bar{Y}$，则对每个$y=T_\lambda x\in Y$有

$$0=\langle T_\lambda x, x_0\rangle=\langle Tx, x_0\rangle-\lambda\langle x, x_0\rangle$$

因此对所有的 $x\in\mathscr{D}(T)$有

$$\langle Tx,\ x_0\rangle=\langle x,\ \bar{\lambda}x_0\rangle$$

据希尔伯特-伴随算子的定义，这表明 $x_0\in\mathscr{D}(T^*)$且

$$T^*x_0=\bar{\lambda}x_0$$

由于T是自伴的，故$\mathscr{D}(T^*)=\mathscr{D}(T)$且$T^*=T$；因而有

$$Tx_0=\bar{\lambda}x_0$$

若 $x_0\neq 0$，将意味着 $\bar{\lambda}$ 是T的一个特征值，并且 $\bar{\lambda}=\lambda$ 一定是实的。因此 $Tx_0=\lambda x_0$，即 $T_\lambda x_0=0$。但是由式(1)又产生

$$0=\|T_\lambda x_0\|\geqslant c\|x_0\| \quad\Rightarrow\quad \|x_0\|=0$$

故出现了矛盾。这就推出了$\bar{Y}^\perp=\{0\}$，从而据 3.3-4 有$\bar{Y}=H$。

(γ) 现在来证明Y是闭的。设 $y_0\in\bar{Y}$，则在Y中有一序列(y_n)使得 $y_n\to y_0$。由于$y_n\in Y$，故对某一$x_n\in\mathscr{D}(T_\lambda)=\mathscr{D}(T)$有 $y_n=T_\lambda x_n$。而据式(1)有

$$\|x_n-x_m\|\leqslant\frac{1}{c}\|T_\lambda(x_n-x_m)\|=\frac{1}{c}\|y_n-y_m\|$$

因为(y_n)是收敛的，所以上式表明(x_n)是柯西序列。由于H是完备的，故(x_n)收敛，设 $x_n\to x_0$。因为T是自伴的，据 10.3-3T是闭的。因而定理 10.3-2(a)意味着$x_0\in\mathscr{D}(T)$且$T_\lambda x_0=y_0$。这就证明了 $y_0\in Y$。由于 $y_0\in\bar{Y}$是任意的，所以Y是闭的。

(β)它和(γ)意味着$Y=H$。由此和(α)可以看出，预解算子存在且定义在整个H上：

$$R_\lambda=T_\lambda^{-1}:\ H\to\mathscr{D}(T)$$

据 2.6-10，R_λ 是线性的，因为对每个 $y\in H$ 和所对应的 $x=R_\lambda y$ 有 $y=T_\lambda x$，并且据式(1)有

$$\|R_\lambda y\|=\|x\|\leqslant\frac{1}{c}\|T_\lambda x\|=\frac{1}{c}\|y\|$$

所以$\|R_\lambda\|\leqslant\frac{1}{c}$，这就从式(1)推出了$R_\lambda$的有界性。根据定义，这就证明了 $\lambda\in\rho(T)$。

利用刚才证明过的定理，把定理 9.1-3 加以推广，就能够证明自伴线性算子（可能是无界的）的谱是实的。

10.4-2 定理（谱）

自伴线性算子T：$\mathscr{D}(T)\to H$的谱$\sigma(T)$是实的和闭的。其中H是复希尔伯特空间，$\mathscr{D}(T)$在H中稠密。

证明：(a) $\sigma(T)$是实的。对每个 $0\neq x\in\mathscr{D}(T)$，我们有

$$\langle T_\lambda x, x\rangle=\langle Tx, x\rangle-\lambda\langle x, x\rangle$$

并且由于 $\langle x,x\rangle$ 和 $\langle Tx,x\rangle$ 都是实的（见§10.2），所以有

$$\overline{\langle T_{\lambda}x,\ x\rangle}=\langle Tx,\ x\rangle-\bar{\lambda}\langle x,\ x\rangle$$

记 $\lambda=\alpha+i\beta$，α,β 都是实数，则 $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$。上面两式相减得到

$$\overline{\langle T_{\lambda}x,\ x\rangle}-\langle T_{\lambda}x,x\rangle=(\lambda-\bar{\lambda})\langle x,x\rangle=2i\beta\|x\|^{2}$$

等式的左端为 $-2iI_m\langle T_{\lambda}x,x\rangle$。由于任何复数的虚部不能超过其绝对值，据许瓦兹不等式有

$$|\beta|\ \|x\|^{2}\leqslant|\langle T_{\lambda}x,x\rangle|\leqslant\|T_{\lambda}x\|\ \|x\|$$

两端用 $\|x\|\neq0$ 去除，便得到 $|\beta|\ \|x\|\leqslant\|T_{\lambda}x\|$。注意这个不等式对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$ 都成立。如果 λ 不是实的，则 $\beta\neq0$，据前边的定理便有 $\lambda\in\rho(T)$。因此 $\sigma(T)$ 必须是实的。

(b) $\sigma(T)$ 是闭的。我们通过证明预解集 $\rho(T)$ 是开的来证明 $\sigma(T)$ 是闭的。为此我们考虑任一 $\lambda_0\in\rho(T)$，并证明充分接近 λ_0 的每一个 λ 也都属于 $\rho(T)$。

据三角不等式有

$$\begin{aligned}\|Tx-\lambda_0x\|&=\|Tx-\lambda x+(\lambda-\lambda_0)x\|\\&\leqslant\|Tx-\lambda x\|+|\lambda-\lambda_0|\ \|x\|\end{aligned}$$

这个不等式还能写为

$$\|Tx-\lambda x\|\geqslant\|Tx-\lambda_0x\|-|\lambda-\lambda_0|\ \|x\| \tag{2}$$

由于 $\lambda_0\in\rho(T)$，据定理 10.4-1 存在 $c>0$ 使得对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$ 有

$$\|Tx-\lambda_0x\|\geqslant c\|x\| \tag{3}$$

现假定 λ 是充分接近 λ_0，不妨设 $|\lambda-\lambda_0|\leqslant c/2$，则由(2)和(3)可推出，对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$ 有

$$\|Tx-\lambda x\|\geqslant c\|x\|-\frac{1}{2}c\|x\|=\frac{1}{2}c\|x\|$$

因此据定理 10.4-1 知 $\lambda\in\rho(T)$。由于 λ 是满足 $|\lambda-\lambda_0|\leqslant c/2$ 的任意的复数，这表明 λ_0 有一个邻域整个属于 $\rho(T)$。又由于 $\lambda_0\in\rho(T)$ 是任意的，这就证明了 $\rho(T)$ 是一个开集。因此 $\sigma(T)=\mathbf{C}-\rho(T)$ 是闭的。

习　　题

1. 不用定理 10.4-2，证明自伴线性算子（可能是无界的）的特征值是实的。

2. 证明：对应于自伴线性算子的不同特征值的特征矢量是正交的。

3. **（近似特征值）** 设 $T:\mathscr{D}(T)\to H$ 是一个线性算子。若对复数 λ 有 $\mathscr{D}(T)$ 中的序列 (x_n) 满足 $\|x_n\|=1$ 和

$$(T-\lambda I)x_n\to0\qquad(n\to\infty)$$

则常常把 λ 叫做 T 的近似特征值。证明：自伴线性算子 T 的谱全部由近似特征值构成。

4. 设 $T:\mathscr{D}(T)\to H$ 是一个线性算子。试用下述性质：(A) T_{λ} 不是内射，(B) $\mathscr{R}(T_{\lambda})$

在H中不是稠密的，(C) λ是一个近似特征值（见习题3），分别表征λ落在$\rho(T)$，$\sigma_p(T)$，$\sigma_c(T)$和$\sigma_r(T)$中的事实。

5.设T：$\mathscr{D}(T)\to H$是一个线性算子，且其希尔伯特-伴随算子T^*存在。若$\lambda\in\sigma_r(T)$证明$\bar{\lambda}\in\sigma_p(T^*)$。

6.若习题5中$\bar{\lambda}\in\sigma_p(T^*)$，证明$\lambda\in\sigma_r(T)\cup\sigma_p(T)$。

7.（残谱）利用习题5，证明：自伴线性算子T：$\mathscr{D}(T)\to H$的残谱$\sigma_r(T)$是空集。注意，这意味着定理9.2-4对于无界的情况仍然成立。

8.若T_1是线性算子T：$\mathscr{D}(T)\to H$的一个线性延拓，证明

$$\sigma_p(T)\subset\sigma_p(T_1)$$

$$\sigma_r(T)\supset\sigma_r(T_1)$$

$$\sigma_c(T)\subset\sigma_c(T_1)\cup\sigma_p(T_1)$$

9.证明：对称线性算子T：$\mathscr{D}(T)\to H$的点谱$\sigma_p(T)$是实的。若H是可分的，证明$\sigma_p(T)$是可数的（或许是有限的，甚或空集）。

10.若T：$\mathscr{D}(T)\to H$是对称线性算子且λ不是实数，证明T的预解算子R_λ是存在的，且是对每个$y\in\mathscr{R}(T_\lambda)$都满足

$$\| R_\lambda y\| \leqslant \| y\|/|\beta|, \qquad \lambda=\alpha+i\beta$$

的有界线性算子，所以$\lambda\in\rho(T)\cup\sigma_r(T)$。

§10.5 酉算子的谱表示

我们的目标是自伴线性算子（可以是无界的）的谱表示。这个表示将从酉算子的谱表示获得。而从§3.10我们知道，酉算子是有界线性算子。按这一途径，我们首先必须推导酉算子的谱定理。

我们从证明酉算子的谱（参考3.10-1定义）落在复平面中的单位圆上（中心为0而半径为1的圆；见图66）入手。

10.5-1 定理（谱） 若U：$H\to H$是复希尔伯特空间$H\neq\{0\}$上的酉线性算子，则其谱$\sigma(U)$是单位圆的一个闭子集；因而对每个$\lambda\in\sigma(U)$有

$$|\lambda|=1$$

证明：据定理3.10-6(b)有$\|U\|=1$。因此据定理7.3-4，对所有的$\lambda\in\sigma(U)$都有$|\lambda|\leqslant 1$。因为对于$\lambda=0$，U的预解算子是$U^{-1}=U^*$，故有$0\in\rho(U)$。根据定理3.10-6(c)，算子U^{-1}是酉算子，因此$\|U^{-1}\|=1$。在定理7.3-3中令$T=U$且$\lambda_0=0$，便推出满足$|\lambda|<1/\|U^{-1}\|=1$的每一个λ都属于$\rho(U)$。因此U的谱必定落在单位圆上。据定理7.3-2$\sigma(U)$是闭的。

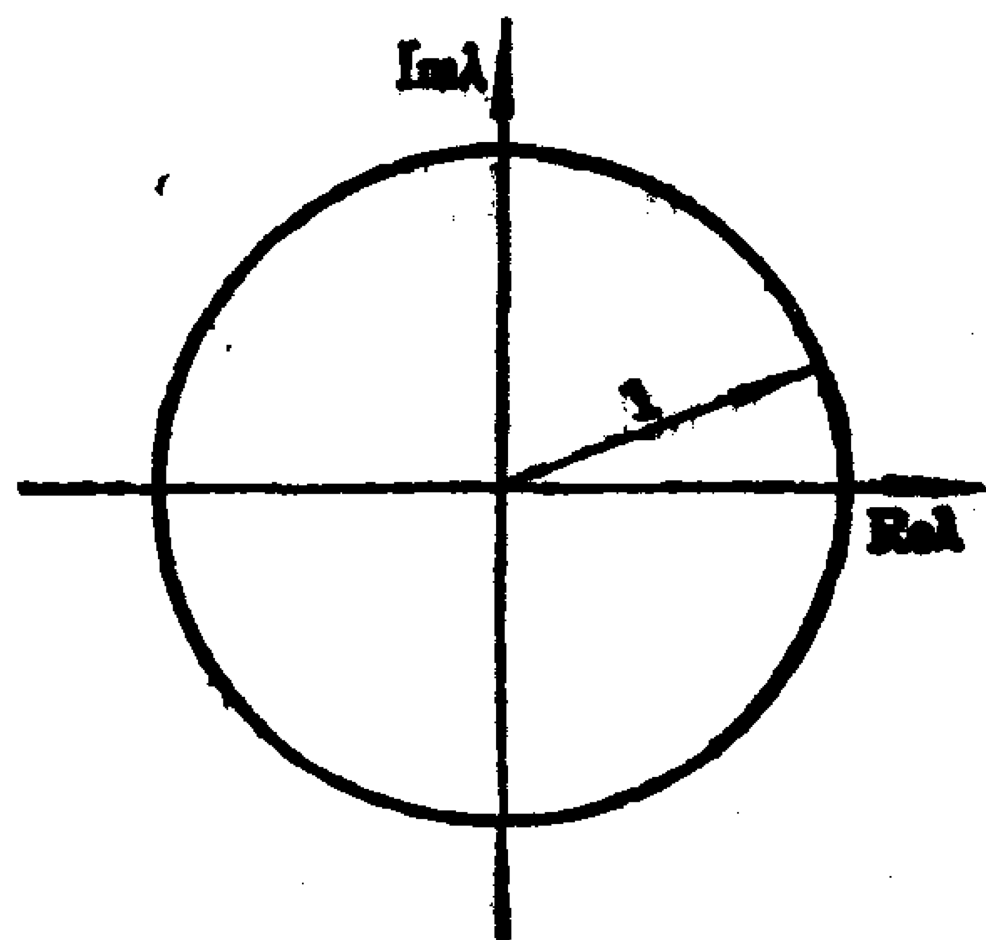


图66 复平面中的单位圆

要得到酉算子U的谱定理，有好几种方法；例如看，J.诺伊曼（1929—30），pp.80，119；M.斯通（1932），p.302；K.弗里德里克斯（1935）；F.黎斯和纳吉（1955）p.281。我们将利用幂级数和J.韦肯（$F.J.Wecken$，1935）的一个引理（10.5-3，后面）来处理这个问题。并将用有界自伴线性算子给出酉算子的一个表示。从这一表示和谱定理9.10-1，则立即得到所希望的U的谱定理。这个定理是由A·温特奈（A·$Wintner$，1929，p.274）首先推导出来的。

利用幂级数研究算子似乎是相当自然的。我们还记得§7.3中几何级数这一特殊情况。此外，在§9.10中对于给定的T和一个连续函数f，为了定义$f(T)$我们曾使用过多项式序列。类似地，幂级数的部分和构成了一个多项式序列，并且可以利用该级数定义一个线性算子。我们将需要这种算子的下述性质。

10.5-2 引理（幂级数） 设

$$h(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\lambda^n,\qquad \alpha_n\in\mathbf{R} \tag{1}$$

对于所有满足$|\lambda|\leqslant k$的λ是绝对收敛的。并假定$S\in B(H,H)$是自伴的且有范数$\|S\|\leqslant k$，其中H是一个复希尔伯特空间。则

$$h(S)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n S^n \tag{2}$$

是一个有界自伴线性算子，并且

$$\|h(S)\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|k^n \tag{3}$$

若一个有界线性算子与S可换，则它与$h(S)$也可换。

证明：令$h_n(\lambda)$表示级数(1)的第n个部分和。由于级数式(1)对于$|\lambda|\leqslant k$绝对收敛（因此也是一致收敛），则从$\|S\|\leqslant k$和

$$\|\sum\alpha_n S^n\|\leqslant\sum|\alpha_n|\,\|S^n\|\leqslant\sum|\alpha_n|k^n$$

可推出式(2)的收敛性，其中用到H的完备性。所以绝对收敛蕴含着收敛。我们用$h(S)$表示该级数的和。注意，这与§9.10相吻合，因为$h(\lambda)$是连续的，$h_n(\lambda)\to h(\lambda)$关于$|\lambda|\leqslant k$是一致的。算子$h(S)$是自伴的。事实上，$h_n(S)$是自伴的，所以根据3.10-3知$\langle h_n(S)x,x\rangle$是实的；因此据内积的连续性知$\langle h(S)x,x\rangle$也是实的。由于$H$是复希尔伯特空间，从而据3.10-3知$h(S)$是自伴的。

现在证明式(3)。由于$\|S\|\leqslant k$，据定理9.2-2有$[m,M]\subset[-k,k]$，据定理9.9-2(f)有

$$\|h_n(S)\|\leqslant\max_{\lambda\in J}|h_n(\lambda)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|k^j$$

其中$J=[m,M]$。令$n\to\infty$，便得到式(3)。

从定理9.10-2可推出该定理的最后一个论断。

如果我们有两个收敛的幂级数，则可以按通常的方式把它们相乘，并且可把乘的结果再

写成一个幂级数。类似地，若式(1)关于所有的λ都收敛，则我们能够用一个关于μ收敛的幂级数来代替λ，比如说，把这个结果写成μ的幂级数，也就是按μ的幂来排列这个结果。诸如$\cos^2 S$，$\sin(\arccos V)$等就是在这种意义下来理解的。

从刚才证明的引理，我们就可得一个主要的工具，即下述的韦肯引理(1935)。顺便指出，也能用这个引理推导有界自伴线性算子的谱定理。这是韦肯所指出的，其引理的原始形式如下。

10.5-3 韦肯引理 设W和A是复希尔伯特空间H上的有界自伴线性算子。假定$WA=AW$和$W^2=A^2$。令P是H到零空间$\mathscr{N}(W-A)$上的投影。则

(a) 若一个有界线性算子与$W-A$可换，则它也与P可换。

(b) $Wx=0$蕴含着$Px=x$。

(c) 还有$W=(2P-I)A$。

证明：(a)假定B与$W-A$可换。则由于对每个$x\in H$有$Px\in\mathscr{N}(W-A)$，因而有

$$(W-A)BPx=B(W-A)Px=0$$

这表明$BPx\in\mathscr{N}(W-A)$，并意味着$P(BPx)=BPx$，也就是

$$PBP=BP \tag{4}$$

下面来证明$PBP=PB$。由于$W-A$是自伴的，据§3.9中的(6g)有

$$(W-A)B^*=[B(W-A)]^*=[(W-A)B]^*=B^*(W-A)$$

这表明$W-A$与B^*也是可换的。因此，按照前面的推导，同样可得类似于(4)的结果：$PB^*P=B^*P$。由于投影是自伴的(见9.5-1)，故有

$$PBP=(PB^*P)^*=(B^*P)^*=PB$$

与式(4)合在一起便有$BP=PB$。

(b) 设$Wx=0$，则由于A和W是自伴的，并且$A^2=W^2$，故有

$$\|Ax^2\| = \langle Ax,Ax\rangle = \langle A^2x,x\rangle = \langle W^2x,x\rangle = \|Wx\|^2=0$$

也就是$Ax=0$，因此$(W-A)x=0$。这就证明了$x\in\mathscr{N}(W-A)$。因此，根据P是H到$\mathscr{N}(W-A)$上的投影，$Px=x$。

(c) 根据假设$W^2=A^2$和$WA=AW$，我们有

$$(W-A)(W+A)=W^2-A^2=0$$

因此对每个$x\in H$都有$(W+A)x\in\mathscr{N}(W-A)$。由于$P$是$H$到$\mathscr{N}(W-A)$上的投影，因而对每个$x\in H$都有

$$P(W+A)x=(W+A)x$$

即

$$P(W+A)=W+A$$

根据(a)有$P(W-A)=(W-A)P$，而由于P是H到$\mathscr{N}(W-A)$上的投影，故$(W-A)P=0$。因此

$$2PA=P(W+A)-P(W-A)=W+A$$

亦即 $2PA-A=W$，也就是要证明的(c)。

现在能够把所希望的谱定理简述如下。

10.5-4 酉算子的谱定理 设U：$H\to H$ 是复希尔伯特空间 $H\neq\{0\}$ 上的酉算子，则在$[-\pi,\pi]$ 上有一个谱族$\mathscr{E}=(E_\theta)$使得

$$U=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} d\ E_\theta=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta)\ dE_\theta \tag{5}$$

更一般地说，对定义在单位圆上的每一个连续函数 f，都有

$$f(U)=\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})dE_\theta \tag{6}$$

其中积分是按一致算子收敛意义下来理解的，并且对一切 $x,y\in H$都有

$$\langle f(U)x,y\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})dw(\theta),\qquad w(\theta)=\langle E_\theta x,y\rangle \tag{6*}$$

其中的积分是通常的黎曼-斯蒂杰积分（见§4.4)。

证明：我们将证明，对于给定的酉算子U，存在一个有界自伴线性算子S，其谱 $\sigma(S)\subset[-\pi,\pi]$且使得

$$U=e^{iS}=\cos S+i\sin S \tag{7}$$

一旦证明了S的存在性，则式(5)和(6)将很容易从谱定理9.9-1和9.10-1推出。我们分成以下几步处理：

(a) 在S存在的前提下，证明式(7)中的U是酉算子。

(b) 我们记

$$U=V+iW \tag{8}$$

其中

$$V=\frac{1}{2}(U+U^*),\qquad W=\frac{1}{2i}(U-U^*) \tag{9}$$

并证明V和W是自伴的，且有

$$-I\leqslant V\leqslant I,\qquad -I\leqslant W\leqslant I \tag{10}$$

(c) 我们研究 $g(V)=\arccos V$和$A=\sin g(V)$的某些性质。

(d) 我们来证明所希望的算子S就是

$$S=(2P-I)(\arccos V) \tag{11}$$

其中P是H到$\mathscr{N}(W-A)$上的投影。

其详细证明如下：

(a) 如果S是有界和自伴的，则据引理10.5-2知$\cos S$ 和$\sin S$ 也是自伴的，据该引理，这些算子也是可换的。由于据3.9-4有

$$\begin{aligned}UU^*&=(\cos S+i\sin S)(\cos S-i\sin S)\\&=(\cos S)^2+(\sin S)^2\end{aligned}$$

$$=(\cos^2+\sin^2)(S)=I$$

类似地可证$U^*U=I$，这意味着(7)中的U是酉算子。

(b) 从3.9-4可推出式(9)中的V和W是自伴的。因为$UU^*=U^*U(=I)$，故有

$$VW=WV \tag{12}$$

据3.10-6还有$\|U\|=\|U^*\|=1$，据式(9)可推出

$$\|V\|\leqslant 1,\qquad \|W\|\leqslant 1 \tag{13}$$

因此据许瓦兹不等式有

$$|\langle Vx,x\rangle|\leqslant\|Vx\|\,\|x\|\leqslant\|V\|\,\|x\|^2\leqslant\langle x,x\rangle$$

此即$-\langle x,x\rangle\leqslant\langle Vx,x\rangle\leqslant\langle x,x\rangle$。这就证明了式(10)中的第一个式子。同理可证第二个式子成立。此外，从式(9)通过直接地计算可得

$$V^2+W^2=I \tag{14}$$

(c) 我们考察

$$g(\lambda)=\arccos\lambda=\frac{\pi}{2}-\arcsin\lambda=\frac{\pi}{2}-\lambda-\frac{1}{6}\lambda^3-\cdots$$

右端的马克劳林级数关于$|\lambda|\leqslant 1$是收敛的。(在$\lambda=1$的收敛性，只要注意到$\arcsin\lambda$的级数有正的系数，因此在$\lambda>0$时，其部分和序列s_n是单调的，而由于$s_n(\lambda)<\arcsin\lambda<\frac{\pi}{2}$，故$s_n$在$(0,1)$上有界，所以对每个固定的$n$，当$\lambda\to 1$时有$s_n(\lambda)\to s_n(1)\leqslant\frac{\pi}{2}$。在$\lambda=-1$的收敛性很容易从在$\lambda=1$的收敛性推出。)

因为据式(13)有$\|V\|\leqslant 1$，所以据引理10.5-2知算子

$$g(V)=\arccos V=\frac{\pi}{2}I-V-\frac{1}{6}V^3-\cdots \tag{15}$$

存在而且是自伴的。现在定义

$$A=\sin g(V) \tag{16}$$

它是V的一个幂级数。引理10.5-2意味着A是自伴的并且与V可换，据式(12)知，它也与W可换。根据式(15)有

$$\cos g(V)=V \tag{17}$$

故而有

$$V^2+A^2=(\cos^2+\sin^2)(g(V))=I$$

将此与式(14)比较可知$W^2=A^2$。因此能够应用韦肯引理10.5-3而推得

$$W=(2P-I)A \tag{18}$$

$Wx=0$意味着有$Px=x$，由于V和$g(V)$这些算子与$W-A$可换，所以P与V和$g(V)$也可换。

(d) 现在我们定义

$$S=(2P-I)g(V)=g(V)(2P-I) \tag{19}$$

显然，S是自伴的。现证S满足式(7)。我们令$k=\lambda^2$，并定义h_1和h_2如下：

$$\begin{aligned} h_1(k)&=\cos\lambda=1-\frac{1}{2!}\lambda^2+-\cdots \\ \lambda h_2(k)&=\sin\lambda=\lambda-\frac{1}{3!}\lambda^3+-\cdots \end{aligned} \tag{20}$$

这两个函数对所有的k都存在。因为P是一个投影，故有$(2P-I)^2=4P-4P+I=I$，所以据式(19)有

$$S^2=(2P-I)^2g(V)^2=g(V)^2 \tag{21}$$

因而据式(17)有

$$\cos S=h_1(S^2)=h_1(g(V)^2)=\cos g(V)=V$$

再证明$\sin S=W$。利用式(20)、(16)和(18)可得到

$$\begin{aligned} \sin S&=Sh_2(S^2) \\ &=(2P-I)g(V)h_2(g(V)^2) \\ &=(2P-I)\sin g(V) \\ &=(2P-I)A=W \end{aligned}$$

我们来证明$\sigma(S)\subset[-\pi,\pi]$。由于$|\arccos\lambda|\leqslant\pi$，从定理 9.10-2 可推得$\|S\|\leqslant\pi$。由于$S$是自伴和有界的，所以$\sigma(S)$是实的，并且据定理7.3-4知$\sigma(S)\subset[-\pi,\pi]$。

设(E_θ)是S的谱族，则从式(7)和关于有界自伴线性算子的谱定理9.10-1，可推出式(5)和(6)。

特别要注意，我们能取$-\pi$（代替$-\pi-0$）作为式(5)和(6)中的积分下限，这并不失掉一般性。其理由如下：如果我们有一个谱族，譬如$(\tilde{E}_\theta)$，使得$\tilde{E}_{-\pi}\neq 0$，则必须取$-\pi-0$作为这些积分中的积分下限。然而，我们能够利用

$$E_\theta=\begin{cases} 0 & \theta=-\pi \\ \tilde{E}_\theta-\tilde{E}_{-\pi} & -\pi<\theta<\pi \\ I & \theta=\pi \end{cases}$$

等同的代替$\tilde{E}_\theta$。而E_θ在$\theta=-\pi$是连续的，所以式(5)和(6)中的积分下限$-\pi$是可以使用的。

习　　题

1. 如果酉算子U有特征值λ_1和$\lambda_2\neq\lambda_1$，证明对应的特征矢量x_1和x_2是正交的。

2. 证明酉算子是闭的。

3. 证明：用$Ux(t)=x(t+c)$所定义的算子U：$L^2(-\infty,+\infty)\to L^2(-\infty,+\infty)$是酉算子；其中$c$是给定的实数。

4. 如果λ是一个等距线性算子T的特征值，试证$|\lambda|=1$。

5. 证明：λ是线性算子T：$\mathscr{D}(T)\to H$的近似特征值（见§10.4 习题3），当且仅当T_λ

没有有界的逆。

6. 证明：λ 是酉算子 U：$H\to H$的特征值，当且仅当$\overline{U_\lambda(H)}\neq H$。

7. 证明：由$(\xi_1,\xi_2,\cdots)\mapsto(0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$所定义的右移位算子$T$：$l^2\to l^2$是等距的，但不是酉算子，并且没有特征值。

8. 证明：习题 7 中的算子的谱是闭的单位圆盘 $M=\{\lambda\,|\lambda|\leqslant 1\}$。从而推出，定理 10.5-1 对于等距算子是不成立的。

9. 证明：$\lambda=0$ 不是习题 7 中的算子T 的近似特征值。（见 § 10.4 习题 3）

10. 在研究习题 7 到 9 时，值得注意的是，由$y=Tx=(\xi_2,\xi_3,\cdots)$，$x=(\xi_1,\xi_2\cdots)$所定义的左移位算子$T$：$l^2\to l^2$有一个与右移位算子相当不同的谱。事实上，可证明每个满足 $|\lambda|<1$ 的 λ 都是左移位算子的特征值。试问相应特征空间的维数是多少？

§ 10.6 自伴线性算子的谱表示

现在我们来推导复希尔伯特空间H上的自伴线性算子T：$\mathscr{D}(T)\to H$ 的谱表示，其中$\mathscr{D}(T)$在H中是稠密的，T可以是无界的。

为此，针对T我们考虑算子

$$U=(T-iI)(T+iI)^{-1} \tag{1}$$

并把U叫做T的**凯莱(Cayley)变换**。

在引理 10.6-1 中将要证明，这个算子U是酉算子。这样变换的目的是为了能从有界算子U的谱定理（见定理10.5-4）得到（可能是无界的）T 的谱定理。

T 的谱 $\sigma(T)$落在复平面$\mathbf{C}$ 的实轴上（见10.4-2），而酉算子的谱落在$\mathbf{C}$的单位圆上（见10.5-1）。把实轴变换到单位圆的映射$\mathbf{C}\to\mathbf{C}$为①

$$u=\frac{t-i}{t+i} \tag{2}$$

它建议我们考虑用式(1)来定义一个算子。

现在来证明U是酉算子。

10.6-1 引理（凯莱变换） 自伴线性算子T：$\mathscr{D}(T)\to H$的凯莱变换(1)在H上是存在的，并且是一个酉算子；这里的$H\neq\{0\}$是一个复希尔伯特空间。

证明：由于T是自伴的，故 $\sigma(T)$是实的（见 10.4-2）。因此 i 和 $-i$ 都属于预解集$\rho(T)$。因此，据 $\rho(T)$的定义，逆算子$(T+iI)^{-1}$和$(T-iI)^{-1}$ 在H的一个稠密子集上是存在的，并且是有界算子。因为$T=T^*$，据定理10.3-3T是闭的，并且从引理7.2-3可看出这些逆算子是定义在整个H上，即

$$\mathscr{R}(T+iI)=H,\qquad \mathscr{R}(T-iI)=H \tag{3}$$

由于I定义在整个H上，故有

① 这是一个特殊的分式线性变换或莫比乌斯变换。这些映射在绝大多数的复分析教科书中都讨论过。例如见 E. 克雷斯齐格(1972)，pp.498-506。

$$(T+iI)^{-1}(H)=\mathscr{D}(T+iI)=\mathscr{D}(T)=\mathscr{D}(T-iI)$$

及

$$(T-iI)(\mathscr{D}(T))=H$$

这表明式(1)中的U是H到H上的一个对射。据定理3.10-6(f)，剩下的是要证明U是一个等距的算子。为此，我们取任意的$x\in H$，令$y=(T+iI)^{-1}x$并利用$\langle y, Ty\rangle=\langle Ty, y\rangle$，则通过直接计算便得所希望的结果：

$$\begin{aligned}\|Ux\|^2&=\|(T-iI)y\|^2\\&=\langle Ty-iy,\ Ty-iy\rangle\\&=\langle Ty,Ty\rangle+i\langle Ty,y\rangle-i\langle y,Ty\rangle+\langle iy,iy\rangle\\&=\langle Ty+iy,\ Ty+iy\rangle\\&=\|(T+iI)y\|^2\\&=\|(T+iI)(T+iI)^{-1}x\|^2\\&=\|x\|^2\end{aligned}$$

根据定理3.10-6(f)便可得出U是酉算子的结论。

由于T的凯莱变换U是酉算子，而U有一个谱表示（见10.5-4），所以我们希望从它获得T的谱表示。为此，我们必须知道怎样才能够用U来表示T。

10.6-2 引理（凯莱变换） T如引理10.6-1所设，U为式(1)所定义。则

$$T=i(I+U)(I-U)^{-1} \tag{4}$$

此外，1不是U的一个特征值。

证明：设$x\in\mathscr{D}(T)$，且

$$y=(T+iI)x \tag{5}$$

则因为$(T+iI)^{-1}(T+iI)=I$，故有

$$Uy=(T-iI)x$$

通过加和减便得到

$$(I+U)y=2Tx \tag{6a}$$

$$(I-U)y=2ix \tag{6b}$$

从式(5)和(3)我们看出，$y\in\mathscr{R}(T+iI)=H$，并且(6b)表明$I-U$映H到$\mathscr{D}(T)$上。而且从式(6b)还可看出，若$(I-U)y=0$，则$x=0$，所以据式(5)有$y=0$。因此据定理2.6-10知$(I-U)^{-1}$存在，并且定义在$I-U$的值域上，而据(6b)，就是定义在$\mathscr{D}(T)$上。因此(6b)给出了

$$y=2i(I-U)^{-1}x, \qquad [x\in\mathscr{D}(T)] \tag{7}$$

将此代入到(6a)便得到，对一切$x\in\mathscr{D}(T)$有

$$\begin{aligned}Tx&=\frac{1}{2}(I+U)y\\&=i(I+U)(I-U)^{-1}x\end{aligned}$$

这就证明了式(4)。

此外，由于$(I-U)^{-1}$存在，所以1不能是凯莱变换U的一个特征值。

式(4)把T表示为酉算子U的函数。因此我们可以应用定理10.5-4。这就给出了如下的结果。

10.6-3 自伴线性算子的谱定理 设$T: \mathscr{D}(T) \to H$是一个自伴线性算子，其中$H \neq \{0\}$是一个复希尔伯特空间，$\mathscr{D}(T)$在H中是稠密的。设U是T的凯莱变换式(1)，(E_θ)是$-U$的谱表示§10.5的(5)中的谱族。则对一切$x \in \mathscr{D}(T)$有

$$\langle Tx, x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \tan\frac{\theta}{2}\, dw(\theta), \quad w(\theta) = \langle E_\theta x, x\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dv(\lambda), \quad v(\lambda) = \langle F_\lambda x, x\rangle \tag{8}$$

其中$F_\lambda = E_{2\arctan\lambda}$。

证明：从谱定理10.5-4我们有

$$-U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\, dE_\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta)\, dE_\theta \tag{9}$$

在(a)中我们先证明(E_θ)在$-\pi$和π上是连续的。利用这个性质，我们在(b)中证明(8)。

(a) (E_θ)是一个有界自伴线性算子S的谱族。则（参见§10.5中的式(7)）

$$-U = \cos S + i\sin S \tag{10}$$

从定理9.11-1我们知道，如果(E_θ)在θ_0是不连续的，则θ_0是S的一个特征值。则存在$x \neq 0$，使得$Sx = \theta_0 x$。因此对任一多项式q有

$$q(S)x = q(\theta_0)x$$

并且对$[-\pi, \pi]$上的任一连续函数g有

$$g(S)x = g(\theta_0)x \tag{11}$$

由于$\sigma(S) \subset [-\pi, \pi]$，故有$E_{-\pi-0} = 0$。因此，如果$E_{-\pi} \neq 0$，则$-\pi$将是$S$的一个特征值。据式(10)和(11)，算子$U$将有特征值

$$-\cos(-\pi) - i\sin(-\pi) = 1$$

这与引理10.6-2矛盾。类似地，$E_\pi = I$，若$E_{\pi-0} \neq I$，也将导出1是U的特征值的矛盾。

(b) 设$x \in H$且$y = (I-U)x$。则象在引理10.6-2中证明的那样，有$I-U: H \to \mathscr{D}(T)$，故$y \in \mathscr{D}(T)$。由式(4)便可推出

$$Ty = i(I+U)(I-U)^{-1}y = i(I+U)x$$

因为据3.10-6有$\|Ux\| = \|x\|$，利用式(9)可得到

$$\begin{aligned}\langle Ty, y\rangle &= \langle i(I+U)x, (I-U)x\rangle \\ &= i(\langle Ux, x\rangle - \langle x, Ux\rangle) \\ &= i(\langle Ux, x\rangle - \overline{\langle Ux, x\rangle})\end{aligned}$$

$$= -2\mathrm{Im}\,\langle Ux,x\rangle$$

$$= 2\int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta d\,\langle E_\theta x,x\rangle$$

因此有

$$\langle Ty,\ y\rangle = 4\int_{-\pi}^{\pi} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} d\,\langle E_\theta x,x\rangle \tag{12}$$

根据定理10.5-4的证明中的最后几行，我们记得(E_θ)是式(10)中的有界自伴线性算子S的谱族。因此据9.8-2知，E_θ和S可换，所以据10.5-2知，E_θ和U可换。利用§10.5中式(6*)，便得到

$$\begin{aligned}\langle E_\theta y,y\rangle &= \langle E_\theta(I-U)x,\ (I-U)x\rangle\\ &= \langle (I-U)^*(I-U)E_\theta x,x\rangle\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(1+e^{-i\varphi})(1+e^{i\varphi})d\,\langle E_\varphi z,x\rangle\end{aligned}$$

其中$z=E_\theta x$。当$\varphi\leqslant\theta$时，据§9.7中的式(7)，$E_\varphi E_\theta = E_\varphi$，并且

$$(1+e^{-i\varphi})(1+e^{i\varphi}) = (e^{i\varphi/2}+e^{-i\varphi/2})^2 = 4\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

所以我们得到

$$\langle E_\theta y,y\rangle = 4\int_{-\pi}^{\theta}\cos^2\frac{\varphi}{2}d\,\langle E_\varphi x,x\rangle$$

利用这个等式以及E_θ在$\pm\pi$的连续性，再利用变换斯蒂杰积分的法则，最后便得到

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\tan\frac{\theta}{2}d\,\langle E_\theta y,\ y\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\tan\frac{\theta}{2}\left(4\cos^2\frac{\theta}{2}\right)d\,\langle E_\theta x,x\rangle\\ &= 4\int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\,\langle E_\theta x,x\rangle\end{aligned}$$

这最后的一个积分与(12)中的相同，从而证明了式(8)中的第一个式子，不过在记法上用y代替了x。通过指标的变换$\theta=2\mathrm{arc\,tan}\lambda$，便可推出式(8)中的另一个式子。注意，实际上$(F_\lambda)$是一个谱族；特别是当$\lambda\to-\infty$时，$F_\lambda\to 0$，当$\lambda\to+\infty$时$F_\lambda\to I$。

习　　题

1.求式(2)的逆，并与式(4)加以比较作出评论。

2.设U为式(1)所定义。证明$1\in\rho(U)$，当且仅当自伴线性算子T是有界的。

3.**(可换算子)** 对于希尔伯特空间H上的有界线性算子S：$H\to H$和线性算子T：$\mathscr{D}(T)\to H$，其中$\mathscr{D}(T)\subset H$，如果$ST\subset TS$，也就是说，如果$x\in\mathscr{D}(T)$蕴含着$Sx\in\mathscr{D}(T)$及$STx=TSx$，则称S与T是可换的。(注意，若$\mathscr{D}(T)=H$，则$ST\subset TS$就等价于$ST=TS$。) 证明：若S与式(1)中的T可换，则S也与(1)所给出的U可换。

4.求证：如果在习题3中有$SU=US$，则有$ST\subset TS$，即S也与T可换。

5.如果T：$\mathscr{D}(T)\to H$是一个对称线性算子，证明其凯莱变换(1)是存在的，并且是等距的。

6.证明：若习题5中的T是闭的，则T的凯莱变换也是闭的。

7.若T：$\mathscr{D}(T)\to H$是一个闭对称线性算子，证明：其凯莱变换(1)的定义域$\mathscr{D}(T)$和值域$\mathscr{R}(U)$也都是闭的。注意，在这种情况下，可能有$\mathscr{D}(U)\neq H$或$\mathscr{R}(U)\neq H$，或者都不等于H。

8.如果对称线性算子T：$\mathscr{D}(T)\to H$的凯莱变换(1)是酉算子，证明T是自伴的。

9.(亏指标) 在习题7中，正交补$\mathscr{D}(U)^{\perp}$和$R(U)^{\perp}$的希尔伯特维数(参见§3.6)叫做T的亏指标。证明：当且仅当T是自伴的，这些指标都为零。

10.证明：用$(\xi_1,\xi_2,\cdots)\mapsto(0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$定义的右移位算子$U$：$l^2\to l^2$是等距的，但不是酉算子。验证$U$是$T$：$\mathscr{D}(T)\to l^2$的凯莱变换，其中$T$是由下式所定义：

$$x\mapsto y=(\eta_j)$$

$$\eta_1=i\xi_1,\ \eta_j=i(2\xi_1+\cdots+2\xi_{j-1}+\xi_j),\ j=2,3,\cdots$$

$$\mathscr{D}(T)=\{x=(\xi_j)\mid |\xi_1|^2+|\xi_1+\xi_2|^2+|\xi_1+\xi_2+\xi_3|^2+\cdots<\infty\}$$

§10.7 乘法算子和微分算子

在这一节，我们研究两个无界线性算子的一些性质，这两个算子是乘法算子和微分算子。它们在原子物理中起着基本的作用。(对这些应用有兴趣的读者在第十一章中会找到详细的叙述，特别是§§11.1，11.2。本节内容是自包含的且与第十一章保持独立。对第十一章来说，也是如此。)

由于我们没有假定读者具备勒贝格测度和勒贝格积分方面的知识，所以在这节不得不在不加证明的情况下给出某些事实。

第一个算子是

$$\begin{aligned}&T:\ \mathscr{D}(T)\to L^2(-\infty,+\infty)\\&x\mapsto tx\end{aligned}\tag{1}$$

其中$\mathscr{D}(T)\subset L^2(-\infty,+\infty)$。

这个算子的定义域为

$$\mathscr{D}(T)=\{x\in L^2(-\infty,+\infty)\mid\int_{-\infty}^{+\infty}t^2|x(t)|^2dt<\infty\}\tag{2}$$

也就是说，任取$x\in\mathscr{D}(T)$，都有$Tx\in L^2(-\infty,+\infty)$。这意味着$\mathscr{D}(T)\neq L^2(-\infty,+\infty)$例如由

$$x(t)=\begin{cases}1/t, & t\geqslant1\\0, & t<1\end{cases}$$

所定义的$x\in L^2(-\infty,+\infty)$，但它不满足(2)中的条件，即$x\notin\mathscr{D}(T)$。

很显然，在一个紧区间之外取零值的所有函数$x\in L^2(-\infty,+\infty)$都包含在$\mathscr{D}(T)$之内。能够证明这种函数的集合在$L^2(-\infty,+\infty)$中是稠密的。因此$\mathscr{D}(T)$在$L^2(-\infty,+\infty)$中也是稠密的。

10.7-1 引理（乘法算子） 由式(1)所定义的乘法算子T不是有界的。

证明：我们取函数（图67）

$$x_n(t)=\begin{cases}1, & n\leqslant t\leqslant n+1\\ 0, & t\text{ 取其它值}\end{cases}$$

显然，$\|x_n\|=1$，并且有

$$\|Tx_n\|^2=\int_n^{n+1}t^2dt>n^2$$

这表明$\|Tx_n\|/\|x_n\|>n$，其中n可以选取任意大的自然数。

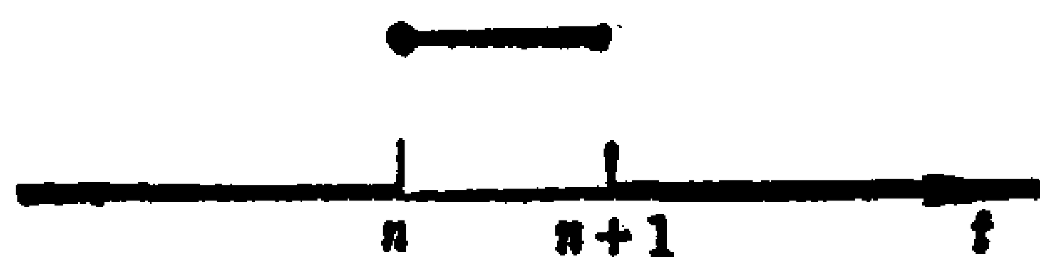


图67 引理10.7-1证明中的函数x_n

注意，我们在研究无穷区间上的函数时，推出了算子T的无界性。为了作一比较，在有限区间$[a,b]$的情况下，考虑算子

$$\tilde{T}:\ \mathscr{D}(\tilde{T})\to L^2[a,b]$$

$$x\longmapsto tx \tag{3}$$

则$\tilde{T}$是有界的。事实上，若$|b|\geqslant|a|$，则有

$$\|\tilde{T}x\|^2=\int_a^b t^2|x(t)|^2dt\leqslant b^2\|x\|^2$$

若$|b|<|a|$，证明是很类似的。此外，这也表明了$x\in L^2[a,b]$蕴含着$\tilde{T}x\in L^2[a,b]$。因此，$\mathscr{D}(\tilde{T})=L^2[a,b]$，即算子$\tilde{T}$定义在整个$L^2[a,b]$上。

10.7-2 定理（自伴性） 由式(1)所定义的乘法算子T是自伴的。

证明：前面已经指出，T在$L^2(-\infty,+\infty)$中是稠定的。因为$t=\bar{t}$，且有

$$\langle Tx,y\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}tx(t)\overline{y(t)}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\overline{ty(t)}=\langle x,Ty\rangle$$

故T是对称的。据10.2-4，$T\subset T^*$因此，只要证明$\mathscr{D}(T)\supset\mathscr{D}(T^*)$就够了。为此，我们证明$y\in\mathscr{D}(T^*)$蕴含着$y\in\mathscr{D}(T)$。设$y\in\mathscr{D}(T^*)$，则对一切$x\in\mathscr{D}(T)$有

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,y^*\rangle,\quad y^*=T^*y$$

（参见10.1-2），写出来，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}tx(t)\overline{y(t)}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\overline{y^*(t)}dt$$

这就意味着

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)[\overline{t y(t)} - \overline{y^*(t)}]dt = 0 \tag{4}$$

特别是对在任意给定的有界区间(a,b)之外取零值的每一个$x \in L^2(-\infty, +\infty)$，该式都是成立的。显然，这样的$x$是属于$\mathscr{D}(T)$的。选取

$$x(t) = \begin{cases} t y(t) - y^*(t), & t \in (a,b) \\ 0, & t \notin (a,b) \end{cases}$$

则从式(4)可得

$$\int_a^b |t y(t) - y^*(t)|^2 dt = 0$$

这就推出了$t y(t) - y^*(t) = 0$在(a,b)上几乎处处①成立，即在(a,b)上几乎处处有$t y(t) = y^*(t)$。由于区间(a,b)是任意的，这便证明了$t y = y^* \in L^2(-\infty, +\infty)$，所以$y \in \mathscr{D}(T)$。并且还有$T^* y = y^* = t y = T y$。

注意，因为$T = T^*$，定理10.3-3便意味着T是闭的。

算子T的重要的谱性质是：

10.7-3 定理（谱） 设T是由式(1)所定义的乘法算子，而$\sigma(T)$是T的谱。则

(a) T没有特征值。

(b) $\sigma(T)$为整个的**R**。

证明：(a)对任意的λ，设$x \in \mathscr{D}(T)$满足$Tx = \lambda x$，则$(T - \lambda I)x = 0$。因此，据T的定义，有

$$0 = \|(T - \lambda I)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |t - \lambda|^2 |x(t)|^2 dt$$

由于对一切$t \neq \lambda$有$|t - \lambda| > 0$，所以几乎对所有的$t \in \mathbf{R}$都有$x(t) = 0$，即$x = 0$。这表明x不是一个特征矢量，并且λ不是T的特征值。由于λ是任意的，故T没有特征值。

(b) 据10.7-2和10.4-2知$\sigma(T) \subset \mathbf{R}$。设$\lambda \in \mathbf{R}$，我们定义函数（图68）

$$v_n(t) = \begin{cases} 1, & \lambda - \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \lambda + \frac{1}{n} \\ 0, & t \text{ 取其它的值} \end{cases}$$

并考察$x_n = \|v_n\|^{-1} v_n$。则$\|x_n\| = 1$。象通常的那样，记$T_\lambda = T - \lambda I$，从$T$的定义可得

$$\|T_\lambda x_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \lambda)^2 |x_n(t)|^2 dt$$

$$\leqslant \frac{1}{n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_n(t)|^2 dt = \frac{1}{n^2}$$

其中用到了在v_n不等于零的区间上$(t - \lambda)^2 \leqslant \frac{1}{n^2}$的性质。两边取平方根，便有

① 也就是说，在(a,b)上有可能排除一个勒贝格测度为零的集合。

$$\| T_\lambda x_n \| \leqslant \frac{1}{n} \tag{5}$$

由于T没有特征值，预解算子$R_\lambda = T_\lambda^{-1}$存在，并且因为$x_n \neq 0$，据2.6-10 有$T_\lambda x_n \neq 0$。故矢量

$$y_n = \frac{1}{\| T_\lambda x_n \|} T_\lambda x_n$$

属于T_λ的值域，即R_λ的定义域，并且$\| y_n \| = 1$。用R_λ作用，并利用式(5)，便得到

$$\| R_\lambda y_n \| = \frac{1}{\| T_\lambda x_n \|} \| x_n \| \geqslant n$$

这就证明了预解式R_n是无界的；因此$\lambda \in \sigma(T)$。由于$\lambda \in \mathbf{R}$是任意的，故$\sigma(T) = \mathbf{R}$。

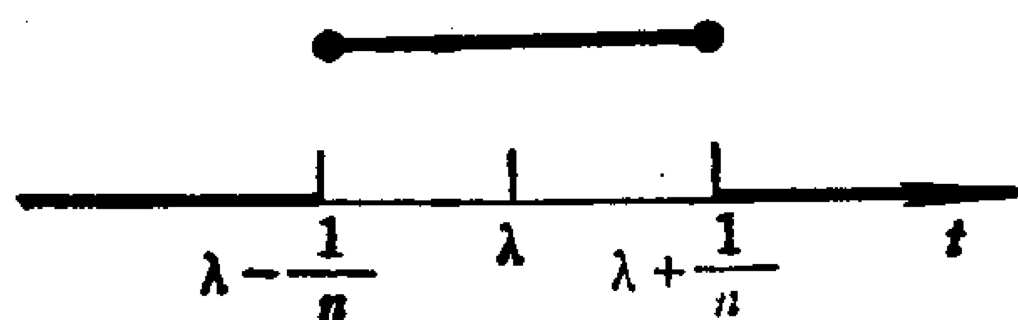


图68 定理10.7-3证明中的函数v_n

T的谱族是(E_λ)，$\lambda \in \mathbf{R}$，把$L^2(-\infty, \lambda)$看作为$L^2(-\infty, +\infty)$的一个子空间，则

$$E_\lambda: \ L^2(-\infty, +\infty) \to L^2(-\infty, \lambda)$$

是$L^2(-\infty, +\infty)$到$L^2(-\infty, \lambda)$上的投影；因而

$$E_\lambda x(t) = \begin{cases} x(t), & t < \lambda \\ 0, & t \geqslant \lambda \end{cases} \tag{6}$$

本节要研究的另一个算子是**微分算子**：

$$\begin{aligned} D: \ & \mathscr{D}(D) \to L^2(-\infty, +\infty) \\ & x \longmapsto ix' \end{aligned} \tag{7}$$

其中$x' = \frac{dx}{dt}$，而加i是为了使D为自伴的，这将在下面(10.7-5中)说明。据定义，D的定义域$\mathscr{D}(D)$应该由$L^2(-\infty, \infty)$中的在$\mathbf{R}$上的每个紧区间上绝对连续①且其导数$x' \in L^2(-\infty, +\infty)$的一切$x \in L^2(-\infty, +\infty)$所组成。

$\mathscr{D}(D)$包含了3.7-2 中的序列(e_n)，该序列包括了厄米特多项式，并且在3.7-2 中曾证明，(e_n)在$L^2(-\infty, +\infty)$中是完全的。因此$\mathscr{D}(D)$在$L^2(-\infty, +\infty)$中是稠密的。

10.7-4 引理（微分算子） 由式(7)所定义的微分算子D是无界的。

① 所谓x在$[a,b]$上绝对连续是指：若给定$\varepsilon > 0$，都存在$\delta > 0$使得对$[a,b]$的每个总长度小于δ的有限不相接的开集组$(a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n)$都有

$$\sum_{i=1}^{n} |x(b_i) - x(a_i)| < \varepsilon$$

则x在$[a,b]$上是几乎处处可微的，并且$x' \in L[a,b]$。参阅H.罗伊登 (H.L.Royden, 1968), p.106.

证明：把$L^2[0,1]$看作为$L^2(-\infty,+\infty)$的一个子空间，记$Y=\mathscr{D}(D)\cap L^2[0,1]$，则$D$是算子

$$D_0=D|_Y$$

的一个延拓。因此，若D_0是无界的，则D也是无界的。现证D_0是无界的。

设函数（图69）：

$$x_n(t)=\begin{cases}1-nt, & 0\leqslant t\leqslant 1/n\\ 0, & 1/n<t\leqslant 1\end{cases}$$

其导数为

$$x_n'(t)=\begin{cases}-n, & 0<t<1/n\\ 0, & 1/n<t<1\end{cases}$$

计算可得

$$\|x_n\|^2=\int_0^1|x_n(t)|^2dt=\frac{1}{3n}$$

$$\|D_0x_n\|^2=\int_0^1|x_n'(t)|^2dt=n$$

及商

$$\frac{\|D_0x_n\|}{\|x_n\|}=n\sqrt{8}>n$$

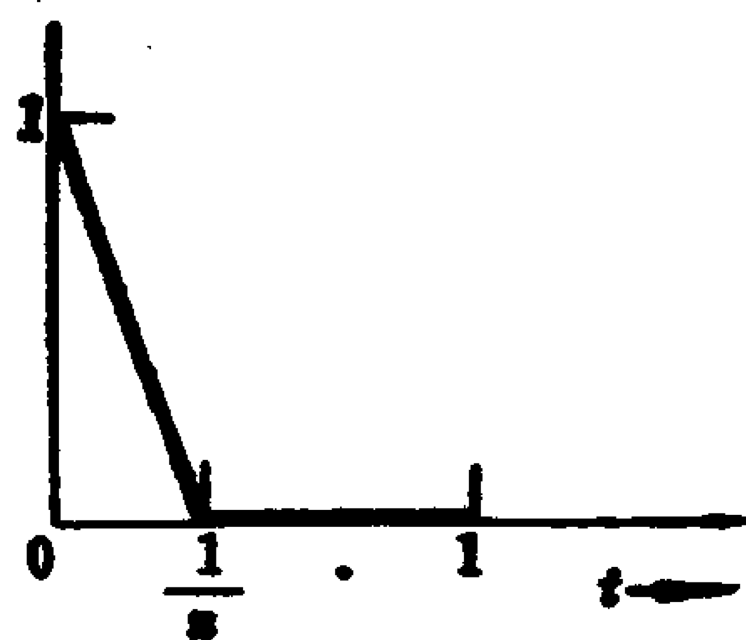


图69 引理10.7-4证明中的函数x_n

这便证明了D_0是无界的。

下述的比较是很有意思的。式(1)中的乘法算子T是无界的，因为$(-\infty,+\infty)$是一个无穷区间；而(3)中的乘法算子$\tilde{T}$却是有界的。与此相反，甚至把微分算子放在$L^2[a,b]$中考虑，$[a,b]$是一个紧区间，而它仍然是无界的。这一事实在前边的证明中是显而易见的。

10.7-5 定理（自伴性） 由式(7)所定义的微分算子是自伴的。

这个定理的证明要求一些关于勒贝格积分理论方面的工具。这些工具性的内容能够在G·赫尔姆贝格（G·Helmberg，1969）p.130中找到。

最后我们指出，D没有特征值，并且谱$\sigma(D)$是整个的R。

乘法算子和微分算子的应用放在下一章叙述，在那里它起着很大的作用（在记法上改成了物理中的标准记法；参考该章的开头内容）。

第十一章　量子力学中的无界线性算子

量子力学是量子理论部的一部分。量子理论是在1900年当普朗克宣布他划时代的量子概念时开始的。通常把这一决定性的事件看作为经典物理和现代物理或量子物理之间的分界点。因为在发现了X-射线，电子，辐射性等很多新的基本物理现象，并试图创立相应的理论，从而使物理学的研究进入了一个新的时代。

量子力学对于希尔伯特空间许多理论的产生与发展，特别是无界自伴线性算子方面，起到了推动作用。在本章中我们将阐述这一说法的一些主要道理，并讨论无界线性算子在量子力学中的作用。

本章是选学内容，与十章保持独立。

符号

本章采用物理中的标准符号：

	本章中的符号	其它章的符号
独立变量	q	t
函　　数	$\psi,\varphi,\cdots$	$s,y,\cdots$

本章内容概要

我们从一维的单个粒子构成的物理系统出发。在这种情况下，我们必须考虑复希尔伯特空间$L^2(-\infty,+\infty)$，其元素$\psi,\varphi,\cdots$叫做状态。而定义域和值域都落在$L^2(-\infty,+\infty)$中的自伴线性算子$T,Q,D,\cdots$叫做观察量。这个术语在§11.1引出。内积$\langle T\psi,\psi\rangle$是一个能用概率论来说明的积分，其中$\psi$有助于定义概率密度。如果物理系统处于状态$\psi$，内积表征了我们在实验中能够期望的观察量$T$的平均值，所以又可把这个内积叫做一个均值。在这一理论中，最重要的观察量是由$\psi(q)\longmapsto q\psi(q)$所定义的位置算子$Q$和由$\psi(q)\longmapsto(h/2\pi i)d\psi/dq$所定义的动量算子$D$（分别见§11.1和§11.2）。这些算子不可交换，并且经由观察量的变化，便导致著名的海森堡不确定关系11.2-2。

在这些考虑之中，时间t保持不变，所以t是一个没有明显出现的参数。对于常数t，系统的状态能够作为时间-无关的薛定锷方程的解而得到（§11.3）。在这方面，我们能够确定物理系统的各种性质，特别是可能的能量级别。

时间相关的状态是由时间-相关的薛定锷方程支配和描述的（§11.5），它要涉及到哈密尔顿算子（§11.4）。如果我们把经典哈密顿函数中的位置和动量分别换成位置算子和动量算子，便得到哈密尔顿算子。

在课文和习题集中所处理的基本物理系统和现象有谐振子（见11.3-1，11.4-1），三维中的振子（§11.3），平面波（§11.3），位势梯级和坠道效应（§11.4），球对称场中的电子及

氢原子（§11.5）。

§11.1 基本概念，状态，观察量，位置算子

为了阐明量子力学的基本思想和概念，我们考虑一维实直线 R上的一个粒子。这个物理系统是简单的，但也是最基本的，它对于阐明我们的思想是合适的。更一般的系统将在后面考虑。

我们考虑任意固定时刻的系统，也就是把时间视为保持不变的一个参数。

在经典力学中，我们的系统在某一瞬时的状态是用该粒子的特定位置和速度来刻划的。因此，系统的瞬时状态经典地是用一对数来描绘的。

在量子力学中，系统的状态是用一个函数

$$\psi$$

来描述的。符号ψ在物理中是标准的，所以我们也采用它（代替了我们常用的函数记法x）。函数ψ是定义在R上的复值函数；因此它是实的单变量

$$q$$

的函数。q也是物理中的标准符号，所以我们保留它（q代替了通常的字母t，在本章后面的几节我们一直用q表示时间）。

我们假定ψ是希尔伯特空间

$$L^2(-\infty, +\infty)$$

的元素。作这样的假定使得我们能对ψ作出如下的物理解释。

ψ与粒子在给定子集$J\subset$R中出现的概率有关；精确地讲，这一概率是

$$\int_J |\psi(q)|^2 dq \tag{1}$$

对应于整个一维空间R 的概率是1，也就是说，我们要求粒子处于实直线上的某一点。这就施加了一个正规化条件

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(q)|^2 dq = 1 \tag{2}$$

很显然，如果我们用一个绝对值为1的复因子去乘ψ，则式(1)中的积分保持不变。

我们的考虑表明，经典力学中对状态的确定性描述，在量子力学中为概率性描述所代替。这就建议我们把（物理系统在某一时刻的）**状态**定义为这样的一个元

$$\psi\in L^2(-\infty, +\infty), \quad \|\psi\| = 1 \tag{3}$$

更精确些讲，它是这种元的一个等价类，其中

$$\psi_1 \sim \psi_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_1 = \alpha\psi_2, \quad |\alpha| = 1$$

为简单起见，我们仍把这些等价类记作ψ，φ等。

注意，式(3)中的ψ生成了$L^2(-\infty, +\infty)$的一个一维子空间

$$Y = \{\varphi \mid \varphi = \beta\psi, \beta\in C\}$$

因此，这就等于说系统的一个状态是一个一维的子空间 $Y\subset L^2(-\infty,\ \infty)$，并且用一个范数等于1的$\varphi\in Y$按照（1）定义了一个概率。

从（1）可以看出，$|\psi(q)|^2$起着R上概率分布[①]密度的作用。据定义，相应的均值或期望值是

$$\mu_\psi=\int_{-\infty}^{+\infty}q\,|\psi(q)|^2dq \tag{4}$$

分布的方差是

$$\mathrm{Var}_\psi=\int_{-\infty}^{+\infty}(q-\mu_\psi)^2|\psi(q)|^2dq \tag{5}$$

而标准偏差是 $sd_\psi=\sqrt{var_\psi}$（$\geqslant 0$）。直观上，μ_ψ测量了平均值或中心位置，而 var_ψ测量了分布的范围。

因此，μ_ψ 表征了粒子关于给定状态ψ的“平均位置”。现在达到了关键的一步，就是我们能把式（4）写成如下形式

$$\mu_\psi(Q)=\langle Q\psi,\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}Q\psi(q)\overline{\psi(q)}dq \tag{6}$$

其中算子Q：$\mathscr{D}(Q)\longrightarrow L^2(-\infty,+\infty)$是用

$$Q\psi(q)=q\psi(q) \tag{7}$$

（即用独立变量q去乘）来定义的。由于$\mu_\psi(Q)$表征了粒子的平均位置，所以Q叫做**位置算子**。据定义，$\mathscr{D}(D)$由关于一切$\psi\in L^2(-\infty,+\infty)$满足$Q\psi\in L^2(-\infty,+\infty)$所组成，即

$$\mathscr{D}(Q)=\{\psi\in L^2(-\infty,+\infty)|\ Q\psi\in L^2(-\infty,+\infty)\}$$

从§10.7我们知道，Q是一个无界自伴线性算子，其定义域在$L^2(-\infty,+\infty)$中是稠密的。

我们还注意到式（5）能够写成

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\psi(Q)&=\langle(Q-\mu \mathrm{I})^2\psi,\psi\rangle\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}(Q-\mu I)^2\psi(q)\overline{\psi(q)}dq\end{aligned} \tag{8}$$

$$\mu=\mu_\psi(Q)$$

物理系统的一个状态ψ包含了关于系统的全部理论知识，但只是隐含着，这就提出了如何从ψ而得到表达系统性质的各种量的一些信息，而这些信息量在实验中我们是能够观察到的。任何的这种量都叫做观察量。

重要的观察量是位置、动量和能量。

在位置的情况中，我们刚才已经看到，为了解决这个问题有一个可采用的自伴线性算子，即位置算子Q。而对于其它的观察量，这就建议我们要作类似地处理，也就是说要引入适当的自伴线性算子。

---

① 我们这里用到的几个概率中的概念，在大多数概率论或统计学的教科书中都能找到。例如克拉默（H.Cramer.1955），E.克雷斯齐格（1970），S.威尔克斯（S.S.Wilks,1962）。

在经典力学中我们会问：在给定时刻的**观察量**将假设成什么值。而在量子力学中，我们可以要求一个概率，也就是说从一个测量（或实验）所得到的观察量落在一个区间中的值。

以上的情形和我们的讨论建议我们把（物理系统在某一时刻的）观察量定义成一个自伴线性算子T：$\mathscr{D}(T)\longrightarrow L^2(-\infty,+\infty)$，其中$\mathscr{D}(T)$在空间$L^2(-\infty,+\infty)$中是稠密的。

类似于式(6)和(8)，我们能把均值$\mu_\psi(T)$定义为

$$\mu_\psi(T)=\langle T\psi,\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}T\psi(q)\overline{\psi(q)}\,dq \tag{9}$$

而把方差$\mathrm{Var}_\psi(T)$定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\psi(T)&=\langle(T-\mu I)^2\psi,\psi\rangle\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}(T-\mu I)^2\psi(q)\,\overline{\psi(q)}\,dq\qquad \mu=\mu_\psi(T)\end{aligned} \tag{10}$$

标准偏差定义为

$$sd_\psi(T)=\sqrt{\mathrm{Var}_\psi(T)}\qquad(\geqslant 0) \tag{11}$$

如果系统处于状态ψ，则$\mu_\psi(T)$刻划了在实验中我们能够期望的观察量T的平均值。而方差$\mathrm{Var}_\psi(T)$刻划了观察量在均值周围的变化范围。

本节的习题包含在下节的习题之中。

§11.2 动量算子，海森堡测不准原理

我们仍考虑上一节的物理系统，在那里我们引入并导出了位置算子

$$\begin{aligned}Q:\ &\mathscr{D}(Q)\to L^2(-\infty,+\infty)\\&\psi\mapsto q\psi\end{aligned} \tag{1}$$

另一个非常重要的观察量是动量p。而相应的**动量算子**是①

$$\begin{aligned}D:\ &\mathscr{D}(D)\to L^2(-\infty,+\infty)\\&\psi\mapsto\frac{h}{2\pi i}\frac{d\psi}{dq}\end{aligned} \tag{2}$$

其中h是普朗克常数，而D的定义域是由$L^2(-\infty,+\infty)$中的所有在$\mathbf{R}$上的每个紧区间上绝对连续且使$D\psi\in L^2(-\infty,+\infty)$的$\psi$组成。对$D$下这种定义的动机如下：

根据爱因斯坦的质-能关系$E=mc^2$（c是光速），一个能量E有质量

$$m=\frac{E}{c^2}$$

由于一个光子的速度为c，能量为

$$E=h\nu$$

① 在物理中常用的符号是P，但由于我们已把P用来表示投影算子，故这里记作D，因为它用到了"微分"运算。h是自然界的通用常数：$h=6.626196\times10^{-27}$erq·s（参见CRC Handbook of Chemistry and Physics,54th ed. Cleveland, Ohio: CRC Press, 1973-74; pp. F-101)。绝对连续性的概念已在§10.7中的页末注①中阐明

（ν是频率），故它的动量为

$$p=mc=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\Lambda}=\frac{h}{2\pi}k \tag{3}$$

其中$k=2\pi/\Lambda$，Λ为波长。在1924年，德布罗意（*L.de Broglie*）提出了满足光波关系的质波概念。因此，我们也可以把式（3）用于对粒子的研究。假定我们的物理系统的状态ψ使得能够应用经典的傅立叶积分定理，则便有

$$\psi(q)=\frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(p)e^{(2\pi i/h)pq}dp \tag{4}$$

其中

$$\varphi(p)=\frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(q)e^{-(2\pi i/h)pq}dq \tag{5}$$

在物理上可以解释为：ψ用常动量p的函数表示：

$$\psi_p(q)=\varphi(p)e^{ikq}=\varphi(p)e^{(2\pi i/h)pq} \tag{6}$$

根据式（3）$k=2\pi p/h$，$\varphi(p)$是振幅。复共轭$\bar{\psi}_p$在指数中有一个负号，所以有

$$|\psi_p(q)|^2=\psi(q)\overline{\psi_p(q)}=\varphi(p)\overline{\varphi(p)}=|\varphi(p)|^2$$

由于$|\psi_p(q)|^2$是状态ψ_p位置的概率密度，我们便看出$|\varphi(p)|^2$一定和动量的密度成比例，并且由于我们定义的$\varphi(p)$使式(4)和(5)含有相同的常数$1/\sqrt{h}$，故比例常数是1。因此，根据式(5)动量的均值$\bar{\mu}_\psi$是

$$\bar{\mu}_\psi=\int_{-\infty}^{+\infty}p\,|\varphi(p)|^2dp=\int_{-\infty}^{+\infty}p\varphi(p)\overline{\varphi(p)}dp$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}p\varphi(p)\frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(q)}e^{(2\pi i/h)pq}dqdp$$

假定可以交换积分次序且式(4)中的积分号下可微，则可得到

$$\bar{\mu}_\psi=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(q)}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(p)\frac{1}{\sqrt{h}}pe^{(2\pi i/h)pq}dpdq$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(q)}\frac{h}{2\pi i}\ \frac{d\psi(q)}{dq}dq$$

利用式(2)，并用$\mu_\psi(D)$表示$\bar{\mu}_\psi$，则上式能够写为

$$\mu_\psi(D)=\langle D\psi,\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}D\psi(q)\overline{\psi(q)}dq \tag{7}$$

这就导出了动量算子的定义（2）。注意，$\psi\in L^2(-\infty,+\infty)$，所以为了数学上形式运算的合理性，我们将需要测度论方面的工具，特别是傅立叶积分定理的一个推广，即傅立叶-普兰切雷尔（*Fourier-Plancherel*）定理。欲知其详，请参阅*F*·黎斯和纳吉（1955），*pp*·291-295。

设S和T是定义在同一个复希尔伯特空间中的任意两个自伴线性算子。则把算子

$$C=ST-TS$$

叫做S和T的**换位子**，它是定义在空间

$$\mathscr{D}(C)=\mathscr{D}(ST)\cap\mathscr{D}(TS)$$

之上。

在量子力学中。位置算子和动量算子的换位子具有基本的重要性。通过直接微分有

$$DQ\psi(q)=D(q\psi(q))=\frac{h}{2\pi i}[\psi(q)+q\psi'(q)]$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\psi(q)+QD\psi(q)$$

这就给出了重要的**海森堡交换关系**

$$DQ-QD=\frac{h}{2\pi i}\tilde{I} \tag{8}$$

其中$\tilde{I}$是域

$$\mathscr{D}(DQ-QD)=\mathscr{D}(DQ)\cap\mathscr{D}(QD) \tag{9}$$

上的恒等算子。

我们不加证明的指出。这个定义域在空间$L^2(-\infty,+\infty)$中是稠密的。事实上，不难看出，这个定义域包含了3.7-2中含有厄米特多项式的序列(e_n)；并且在3.7-2中曾指出，(e_n)在$L^2(-\infty,+\infty)$中是完全的。（记住，这里的q在3.7-2中是用t表示的）。

为了得到著名的海森堡不确定原理（亦称为测不准原理），我们首先证明

11.2-1定理（换位子） 设S和T是定义域和值域都落在$L^2(-\infty,+\infty)$中的两个自伴线性算子。则算子$C=ST-TS$对$\mathscr{D}(C)$中的每一个ψ都满足

$$|\mu_\psi(C)|\leqslant 2sd_\psi(S)sd_\psi(T) \tag{10}$$

证明：我们记$\mu_1=\mu_\psi(S)$，$\mu_2=\mu_\psi(T)$，且记

$$A=S-\mu_1 I,\quad B=T-\mu_2 I$$

则通过直接计算容易验证有

$$C=ST-TS=AB-BA$$

由于S和T是自伴的，μ_1和μ_2是形如§11.1中式(9)的内积，这些均值都是实的（参见§10.2的末尾），因此A和B是自伴的。因而从均值的定义可得到

$$\begin{aligned}\mu_\psi(C)&=\langle(AB-BA)\psi,\psi\rangle\\&=\langle AB\psi,\psi\rangle-\langle BA\psi,\psi\rangle\\&=\langle B\psi,A\psi\rangle-\langle A\psi,B\psi\rangle\end{aligned}$$

最后的两个内积其绝对值相等。因此据三角不等式和许瓦兹不等式有

$$|\mu_\psi(C)|\leqslant|\langle B\psi,A\psi\rangle|+|\langle A\psi,B\psi\rangle|\leqslant 2\|B\psi\|\|A\psi\|$$

因为B是自伴的，所以据§11.1中的式(10)可得

$$\|B\psi\|=\langle(T-\mu_2 I)^2\psi,\psi\rangle^{1/2}=\sqrt{Var_\psi(T)}=sd_\psi(T)$$

类似地可证明$\|A\psi\|=sd_\psi(S)$，从而证明了式(10)。

从式(8)可以看出，位置算子和动量算子的换位子是$C=(h/2\pi i)\tilde{I}$。因此$|\mu_\psi(C)|=h/2\pi$，且式(10)给出了

11.2-2定理（海森堡不确定原理） 对于位置算子Q和动量算子D，有

$$sd_\psi(D)sd_\psi(Q)\geqslant\frac{h}{4\pi} \tag{11}$$

在物理上，不等式（11）意味着我们不能无限精确地同时测量粒子的位置和动量。实际上，标准偏差$sd_\psi(D)$和$sd_\psi(Q)$分别表征了动量和位置测量的精度，式（11）还表明我们不能同时减小左端的两个因子。h是一个很小的量见365页注①，所以在宏观物理中，$h/4\pi$小得可以忽略不计。然而，在原子物理中，情况不再是这样。如果我们对系统的任一测量都是改变系统状态的一个扰动，并且这个系统又是很微小（例如一个电子），则这一扰动就成为值得注意的了。这时，上述情况就容易理解了。当然，任何测量都含有仪表精度不足所造成的误差。但是我们能够想象得到，用越来越精密的测量方法可以使得这种误差越来越小，所以至少在原理上讲，在对粒子的瞬时位置和动量的同时测量中，每个相应的误差都能够达到比任意预定的正值小。而不等式（11）表明并非如此，在原理上精度也是有限制的，这倒不是因为任何测量方法都是不完备的原因。

更一般来说，定理11.2-1说明：在上述意义下，任何两个观察量S和T，只要其换位子不是零算子，则不能够同时无限精确地被测量，就是在原理上，精度也是有限制的。

习　题

1．在$\psi(q)=\alpha e^{-q^2/2}$中确定一个正规化因子$\alpha$，并画出相应的概率密度曲线。

2．对于线性算子T和多项式g，用下式

$$E_\psi(g(T))=\langle g(T)\psi,\psi\rangle$$

定义$g(T)$的期望$E_\psi(g(T))$。证明$E_\psi(T)=\mu_\psi(T)$并且

$$\mathrm{Var}_\psi(T)=E_\psi(T^2)-\mu_\psi(T)^2$$

3．利用习题2中的符号，证明$E_\psi([T-cI]^2)$，当且仅当$c=\mu_\psi(T)$时，为最小。（注意，这就是方差的极小性质。）

4．证明：若在式（2）中用紧区间$[a,b]$代替$(-\infty,+\infty)$，所诱导出的算子$\tilde{D}$不再是自伴的（除非我们在a和b上施加一个适当的条件对其定义域加以限制）。

5．在课文中曾证明动量密度与$|\varphi(p)|^2$成比例。然后又证明就等于$|\varphi(p)|^2$。假定积分次序的交换是允许的，试用式(4)和(5)来验证上述事实。

6．在空间中公式(4)和(5)是类似的；取笛卡尔坐标并记$p=(p_1,p_2,p_3)$，$q=(q_1,q_2,q_3)$，此外，内积取$p\cdot q=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$，则有

$$\psi(q)=h^{-3/2}\int\varphi(p)e^{-(2\pi i/h)p\cdot q}dp$$

其中

$$\varphi(p)=h^{-3/2}\int\psi(q)e^{-(2\pi i/h)p\cdot q}dq$$

试把习题 5 的考虑推广到这一情况。

7．对于空间中的粒子，我们有三个笛卡尔坐标q_1, q_2, q_3，并且相应的位置算子及动量算子是Q_1, Q_2, Q_3及D_1, D_2, D_3，其中$D_j\psi = (h/2\pi i)\dfrac{\partial\psi}{\partial q_j}$。证明

$$D_jQ_j - Q_jD_j = \frac{h}{2\pi i}\tilde{I}_j$$

而D_j和Q_k（$j \neq k$）可交换；其中$\tilde{I}_j$是$\mathscr{D}(D_jQ_j - Q_jD_j)$上的恒等算子。

8．在经典力学中，空间质量为m的运动的粒子，其动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2)$$

其中p_1, p_2, p_3是动量矢量的分量。这就建议我们用

$$\mathscr{E}_k = \frac{1}{2m}(D_1{}^2 + D_2{}^2 + D_3{}^2)$$

来定义动能算子$\mathscr{E}_k$，其中D_j如习题 7 中所规定。证明

$$\mathscr{E}_k\psi = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi$$

其中ψ的拉普拉斯算子$\Delta\psi$为

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial q_1{}^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q_2{}^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q_3{}^2}$$

9．（**角动量**）在经典力学中，角动量为$M = q \times p$，其中$q = (q_1, q_2, q_3)$是位置矢量，$p = (p_1, p_2, p_3)$是（线性）动量矢量。表明了我们应该用

$$\mu_1 = Q_2D_3 - Q_3D_2$$
$$\mu_2 = Q_3D_1 - Q_1D_3$$
$$\mu_3 = Q_1D_2 - Q_2D_1$$

来定义角动量算子μ_1, μ_2, μ_3。证明交换关系

$$\mu_1\mu_2 - \mu_2\mu_1 = \frac{ih}{2\pi}\mu_3$$

并关于μ_2, μ_3和μ_3, μ_1求出两个类似的关系。

10．证明：习题 9 中的算子μ_1, μ_2和μ_3与算子

$$\mu^2 = \mu_1{}^2 + \mu_2{}^2 + \mu_3{}^2$$

可交换。

§11.3 时间-无关的薛定锷方程

利用光波和德布罗意物质波之间的相似性（参见§11.2），我们将推导出基本的(时间-无关的）薛定锷方程。

为了研究折射，干涉和其它更微妙的光学现象，我们利用**波动方程**

$$\Psi_{tt} = \gamma^2 \Delta \Psi \tag{1}$$

其中$\Psi_{tt} = \partial^2 \Psi / \partial t^2$，常数$\gamma^2$是正的，$\Delta \Psi$是$\Psi$的拉普拉斯算子。如果$q_1, q_2, q_3$是空间中的笛卡尔坐标，则

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_1{}^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_2{}^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_3{}^2}$$

（在上一节我们所考虑的系统中，只有一个坐标q，并且$\Delta \Psi = \partial^2 \Psi / \partial q^2$。）

象通常研究驻波现象一样，我们假定一个简单的周期时间相关的形式，比如说

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, t) = \psi(q_1, q_2, q_3) e^{-i\omega t} \tag{2}$$

把它代入式（1）并消去指数因子，便得到赫姆霍尔兹（**Helmholtz**）**方程**（时间-无关的波方程）

$$\Delta \psi + \kappa^2 \psi = 0 \tag{3}$$

其中

$$\kappa = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{2\pi\nu}{\gamma} = \frac{2\pi}{\Lambda}$$

而ν是频率。对于Λ，我们选为德布罗意物质波的波长，即

$$\Lambda = \frac{h}{mv} \tag{4}$$

〔参见§11.2中的式（3），其中$v = c$。〕则式（3）取下面形式

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \cdot \frac{mv^2}{2} \psi = 0$$

设E表示动能$mv^2/2$和势能V之和，即

$$E = \frac{mv^2}{2} + V，\text{则} \quad \frac{mv^2}{2} = E - V$$

从而有

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)\psi = 0 \tag{5}$$

这就是著名的时间-无关的**薛定锷方程**，它是量子力学的基础。

注意，我们还能够把式（5）写成

$$\left(-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta + V\right)\psi = E\psi \tag{6}$$

这一形式提出了：系统的可能的能量等级将依赖于由等式（6）左端所定义的算子的谱。

稍加思索便可看出，式（5）不是在这种条件下所能够得到的唯一可以想象到的微分方程。然而实验结果和薛定锷的研究表明，在下述意义下式（5）是特别的有用的。

一个微分方程的具有物理意义的解应该保持有限，而在无限时应趋于零。给定的一个势场，仅对于能量E的确定值，方程（5）才能有这种解。这些确定的能量E的值，或者与玻尔

原子理论的许可的能量等级一致，或者在不一致时，它们应与实验结果比预期的理论值有更好的吻合。这意味着式(5)既解释了玻尔理论又改进了玻尔理论。同时它也为一些在实验中能观察到但用别的理论却又不能充分解释的基本物理效应，提供了一个理论根据。

11.3-1例子（谐振子） 为了说明薛定锷方程(5)，我们考察一个基本的物理系统，顺便指出，普朗克把他的量子假说首先用到这个系统。图70给出了一个经典的模型：一个弹簧上端固定，下端悬挂一个质量为m的物体。在作小的垂直运动时，我们可以把阻尼忽略不计，并假定弹性恢复力为aq，也就是说与偏离静态平衡位置的位移q成正比。则经典的运动微分方程是

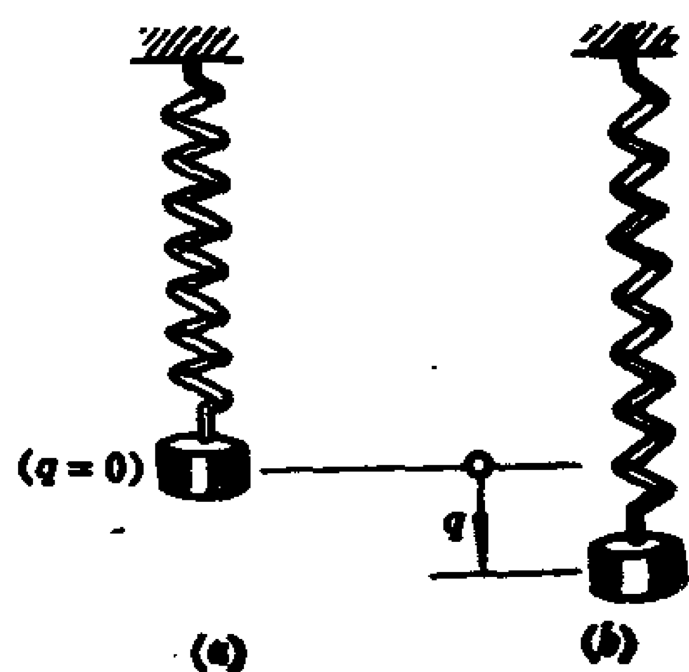


图70 弹簧上的物体
(a) 静止状态 (b)运动状态

$$m\ddot{q}+aq=0 \qquad \text{或} \qquad \ddot{q}+\omega_0{}^2q=0$$

其中$\omega_0{}^2=a/m$，因此$a=m\omega_0{}^2$，用正弦或余弦函数便能描述这个简谐运动。通过积分，从恢复力aq可以得到势能V；选取积分常数使V在$q=0$时为零，便有$V=aq^2/2=m\omega_0{}^2q^2/2$。因此，谐振子的薛定锷方程(5)为

$$\psi''+\frac{8\pi^2m}{h^2}\left(E-\frac{1}{2}m\omega_0{}^2q^2\right)\psi=0 \qquad (7)$$

令

$$\tilde{\lambda}=\frac{4\pi}{\omega_0h}E \qquad (8)$$

再用$b^2=h/2\pi m\omega_0$乘上式（7），便得到

$$b^2\psi''+\left[\tilde{\lambda}-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]\psi=0$$

引入新的独立变量$s=q/b$并记$\psi(q)=\tilde{\psi}(s)$，便有

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{ds^2}+(\tilde{\lambda}-s^2)\tilde{\psi}=0 \qquad (9)$$

现在我们来确定使式(9)在$L^2(-\infty,+\infty)$中有解的能量值。把$\tilde{\psi}(s)=e^{-s^2/2}v(s)$代入式(9)并消去指数因子，便得到

$$\frac{d^2v}{ds^2}-2s\frac{dv}{ds}+(\tilde{\lambda}-1)v=0 \qquad (10)$$

如果取

$$\tilde{\lambda}=2n+1,\quad n=0,1,\cdots \qquad (11)$$

则除了记法外，式(10)与§3.7中的式(9)是完全相同的。因此我们看到，厄米特多项式H_n是它的一个解，并且满足式(9)(其中$\tilde{\lambda}=2n+1$)的完全标准正交特征函数集就是由§3.7的式(7)所定义的(e_n)，只不过是用$s=q/b$代替t作为独立变量。这些特征函数的前几项如图71所示。因为频率为$\nu=\omega_0/2\pi$，所以从式(8)可以看出对应于特征值(11)的能量等级为

$$E_n=\frac{\omega_0h}{4\pi}(2n+1)=h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (12)$$

其中 $n=0,1,\cdots$。这些能量量子 $h\nu$ 的所谓"半整数"倍就是谐振子的特征。"零点能量"（最低等级）是$h\nu/2$，并不象1900年整个量子理论刚产生的时候普朗克在他著名的最初研究中所假设的最低等级为零。能够指定能量等级的自然数 n 叫做谐振子的基本量子数。

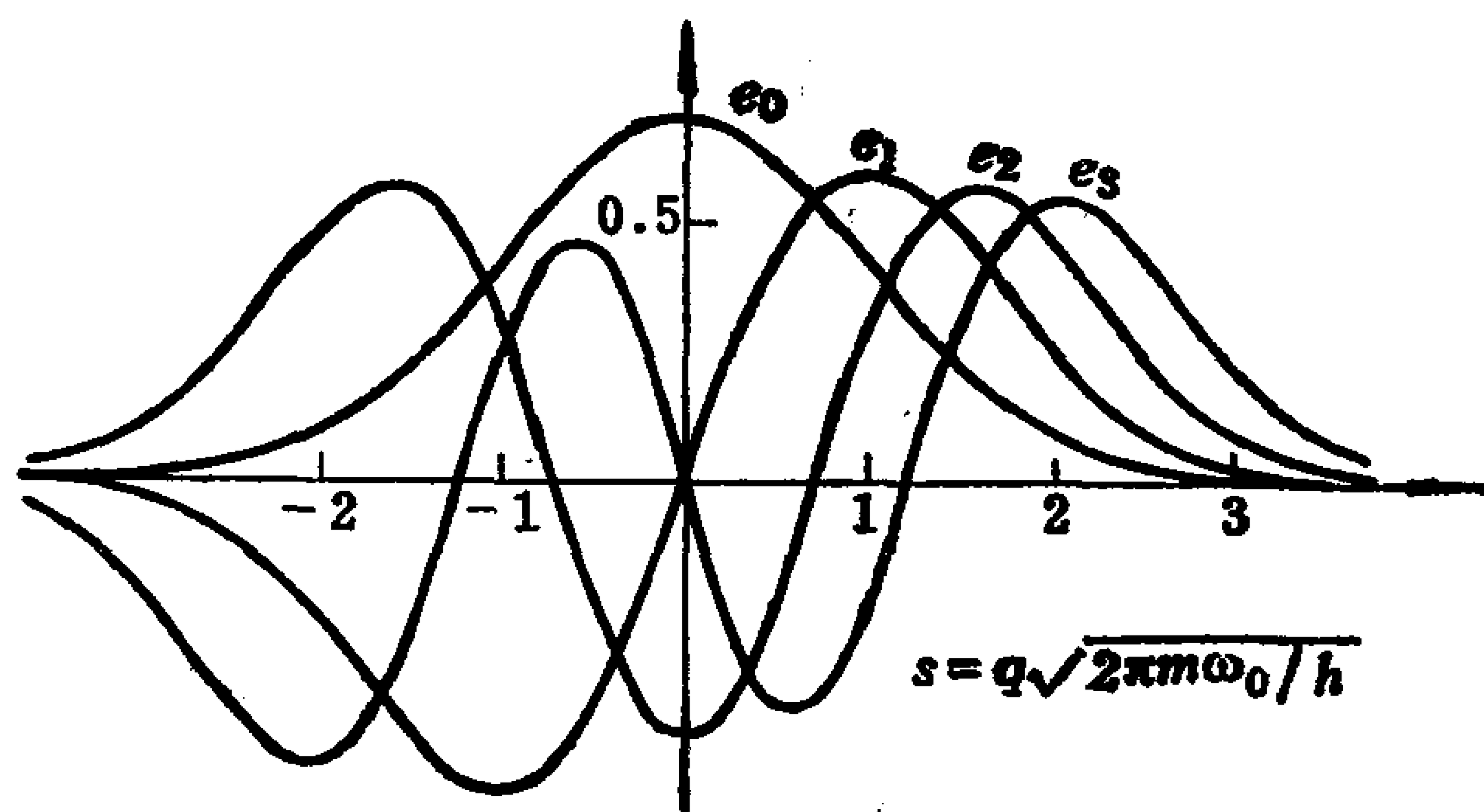


图 71　谐振子的对应于能量等级hν/2，3hν/2，5hν/2，7hν/2的前四个特征函数e_0，e_1，e_2，e_3。

习　　题

1．对于什么样的q值，式（7）中括号内的表达式等于零？在经典力学中这些值的物理意义是什么？

2．对于E的所有值，式（7）不能有一个非平凡解$\psi\in L^2(-\infty,+\infty)$，这一事实从式（7）能直接看出吗？

3．找一个关于 $\psi_0(s)=e^{-s^2/2}$的二阶微分方程，与式（9）进行比较并加以评论。

4．利用解微分方程的幂级数方法，证明式(10)有多项式解 $v\neq 0$，当且仅当λ为式(11)中的一个值。

5．能够用习题 4 中的递推公式推出下述结论吗？即不是多项式的解增长如此之快，以致于使得相应的 ψ 不能属于$L^2(-\infty,+\infty)$。

6．利用由

$$\exp(2us-u^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(s)u^n$$

所定义的厄米特多项式的生成函数证明，对应于$\lambda=2n+1$〔参见式(11)〕的函数 $\psi=\psi_n$ 能写成

$$\psi_n(s)=\frac{(-1)^n}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{1/2}}e^{s^2/2}\frac{d^n}{ds^n}(e^{-s^2})$$

7．（平面波）用

$$\varphi(q,t)=e^{-i(\omega t-k\cdot q)}$$

所表示的波叫做平面单色波，这里 $k=(k_1,k_2,k_3)$，$q=(q_1,q_2,q_3)$，$k\cdot q$ 是 k 和 q 的点积。证明下述结论：k 的方向是波在空间的传播方向。$\lambda=2\pi/|k|$ 是波长，其中 $|k|$ 是k的长度。量 $\nu=\omega/2\pi$ 是频率。$v=\nu\lambda=\omega/|k|$ 是相速（等相平面传播速度）。φ满足波动方程式（1）。

8．如果 $\psi(q)=a(q)e^{ib(q)}$ 中的 $a(q)$ 和 $b(q)$ 只缓慢地变化，则薛定锷方程 $\psi''+f(q)\psi=0$ 的近似解通过代入 ψ 和忽略 a'' 便可得到。证明这就导致

$$b(q)=\int_0^q\sqrt{f(u)}\,du$$

及

$$a(q)=\frac{\alpha}{\sqrt[4]{f(q)}}\qquad(\alpha\text{是常数})$$

9．**（三维中的谐振子）**一个质量为 m 的粒子用一个力限制在原点，该力沿 q_j 轴的分量等于 $-a_jq_j$，$a_j>0$；$j=1,2,3$。证明这个问题的薛定锷方程是

$$\Delta\psi+\left(\lambda-\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^2q_j^2\right)\psi=0$$

其中

$$\lambda=\frac{8\pi^2m}{h^2}E,\qquad \alpha_j=\frac{2\pi m}{h}\omega_j\qquad \omega_j=\sqrt{a_j/m}$$

应用变量分离法，即代入

$$\psi(q)=\psi_1(q_1)\psi_2(q_2)\psi_3(q_3)$$

得到

$$\psi_j''+(\lambda_j-\alpha_j^2q_j^2)\psi_j=0\qquad\left(\sum_{j=1}^{3}\lambda_j=\lambda\right)$$

证明对于 $\lambda_j=(2n_j+1)\alpha_j$，$n_j\geqslant0$ 为整数，我们得到

$$\psi_j(q_j)=c_je^{-\alpha_jq_j^2/2}H_n(\sqrt{\alpha_j}\,q_j)$$

其中 c_j 是正规化因子，H_n 是 3.7-2 中定义的 n 阶厄米特多项式。

10．对于一个能量等级来说，如果存在相应的不止一个特征函数所组成的线性无关组，则称之为是退化的。习题 9 中的谐振子如果有 $a_1=a_2=a_3=a$，则称之为是各向同性的。证明此时的最低能量等级是 $E_0=3h\nu/2$，其中 $\nu=\omega_0/2\pi=\sqrt{a/m}/2\pi$，并且是非退化的，而较高的能量等级都是退化的。

§11.4　哈密顿算子

在经典力学中，我们能把保守的粒子系统的研究建立在该系统的哈密顿函数之上；也就是总的能量

$$H=E_{kin}+V\tag{1}$$

（E_{kin}＝动能，V＝势能）用位置坐标和动量坐标来表达。假定该系统有 n 个自由度，便有 n 个位置坐标 $q_1,\cdots,q_n$ 和 n 个动量坐标 $p_1,\cdots,p_n$。

在量子力学对这个系统的处理中，我们也是要确定

$$H(p_1,\cdots,p_n;\ q_1,\cdots,q_n)$$

这是第一步要做的工作。而第二步，我们用动量算子〔参见§11.2中的式(2)〕

$$D_j:\ \mathscr{D}(D_j)\to L^2(\mathbf{R}^n)$$

$$\psi\longmapsto\frac{h}{2\pi i}\ \frac{\partial\psi}{\partial q_j}\tag{2}$$

代替每个 p_j，其中 $\mathscr{D}(D_j)\subset L^2(\mathbf{R}^n)$。此外，还要用位置算子〔参见§11.1中的式(7)〕

$$Q_j:\ \mathscr{D}(Q_j)\to L^2(\mathbf{R}^n)$$

$$\psi\longmapsto q_j\psi\tag{3}$$

代替每个q_j，其中$\mathscr{D}(Q_j)\subset L^2(\mathbf{R}^n)$。然后从上面的哈密顿函数$H$得到**哈密顿算子**，我们用$\mathscr{H}$表示它；也就是

$$\mathscr{H}(D_1,\cdots,D_n;\ Q_1,\cdots,Q_n)$$

它是把$H(p_1,\cdots,p_n;\ q_1,\cdots,q_n)$中的 p_j换成D_j，把q_j换成Q_j后得到的。据定义，$\mathscr{H}$被假定为自伴的。

这一代替过程叫做量子化法则。注意，这种处理方法不是唯一的，因为对于数的乘法是可交换的，而算子的乘法未必可换。这也是量子力学的弱点之一。

§11.3中的方程(6)，现在能用哈密顿算子$\mathscr{H}$写出。实际上，空间中的质量为m的粒子其动能为

$$\frac{m}{2}|v|^2\frac{m}{2}=(v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2)=\frac{1}{2m}(p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2)$$

用量子化法则右端的表达式为

$$\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{3}D_j{}^2=\frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial q_j{}^2}=-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta$$

因此§11.3中的方程(6)能写成

$$\mathscr{H}\psi=\lambda\psi\tag{4}$$

其中 $\lambda=E$ 为能量。

若 λ 属于$\mathscr{H}$的预解集，则$\mathscr{H}$的预解算子是存在的，且式(4)在$L(\mathbf{R}^n)$中只有平凡解。若 λ 属于点谱 $\sigma_p(\mathscr{H})$，则式(4)有非平凡解 $\psi\in L^2(\mathbf{R}^n)$。由于$\mathscr{H}$是自伴的，故残谱 $\sigma_r(\mathscr{H})$ 是空集（参见§10.4中习题7）。若$\lambda\in\sigma_c(\mathscr{H})$，即 λ 属于$\mathscr{H}$的连续谱，则式(4)没有非零解$\psi\in L^2(\mathbf{R}^n)$。然而，在这种情况下，式(4)可以有不属于$L^2(\mathbf{R}^n)$的非零解，并且这些解依赖于一个参数，关于这个参数我们能进行积分从而得到一个$\psi\in L^2(\mathbf{R}^n)$。在物理中可以说，这种积分的处理形成了波包。要注意，按这种说法式(4)中的$\mathscr{H}$表示了原来算子的一个延拓，它使得所考虑的函数都落在延拓算子的定义域之内。这种处理方法可以用下面的物理系统来阐明。

我们考虑（$-\infty,+\infty$）上的一个质量为m的自由粒子。其哈密顿函数是

$$H(p,q)=\frac{1}{2m}p^2$$

所以对应的哈密顿算子为

$$\mathscr{H}(D,Q)=\frac{1}{2m}D^2=-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\ \frac{d^2}{dq^2}$$

因此(4)成为

$$\mathscr{H}\psi=-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\psi''=\lambda\psi \tag{5}$$

其中 $\lambda=E$ 是能量。用

$$\eta(q)=e^{-ikq} \tag{6}$$

给出解，参数 k 与能量之间的关系是

$$\lambda=E=\frac{h^2k^2}{8\pi^2 m}$$

能够用这些函数 η 表示形如

$$\psi(q)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\varphi(k)e^{-ikq}\ dk \tag{7a}$$

其中
$$\varphi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\psi(q)e^{-ikq}\ dq \tag{7b}$$

的任一波包 $\psi\in L^2(-\infty,+\infty)$。上面的两个极限是按 $L^2(-\infty,+\infty)$ 的范数定义的〔在式(7a)中对于 q，在式(7b)中对于 k〕；这样的极限也叫做平均极限。在所作的假设之下，式（7）叫做傅立叶-普兰切雷尔定理，我们曾在§11.2中提到过它，并给出了参考文献。也可参考N.邓福德和J.T.施瓦兹（1958-71），第2卷，pp.974，976。

上述的研究可推广到三维空间中质量为 m 的自由粒子。我们用

$$\mathscr{H}\psi=-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi=\lambda\psi \tag{8}$$

代替式(5)，其中 Δ 为拉普拉斯算子。其解是形如

$$\eta(q)=e^{-ik\cdot q} \tag{9a}$$

的平面波，其中 $q=(q_1,q_2,q_3)$，$k=(k_1,k_2,k_3)$，且

$$k\cdot q=k_1q_1+k_2q_2+k_3q_3$$

而能量是

$$\lambda=E=\frac{h^2}{8\pi^2 m}k\cdot k \tag{9b}$$

对于 $\psi\in L^2(\mathbf{R}^3)$，傅立叶-普兰切雷尔定理给出了

$$\psi(q)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{R^3}\varphi(k)e^{-ik\cdot q}dk \tag{10a}$$

其中

$$\varphi(k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{R^3}\psi(q)e^{ik\cdot q}\,dq \tag{10b}$$

这里的积分仍按三维空间中有限域上相应积分的平均极限来理解。

11.4-1例子（谐振子） 谐振子的哈密顿函数是（参见11.3-1）

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega_0{}^2q^2$$

因此哈密顿算子是

$$\mathscr{H}=\frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1}{\alpha_2}D^2+\alpha^2Q^2\right),\qquad(\alpha^2=m\omega_0) \tag{11}$$

为了简化后面的公式，我们定义算子

$$A=\beta(\alpha Q+\frac{i}{\alpha}D),\ \left(\beta^2=\frac{\pi}{h}\right) \tag{12}$$

则其希尔伯特-伴随算子为

$$A^*=\beta\left(\alpha Q-\frac{i}{\alpha}D\right) \tag{13}$$

据§11.2中的式(8)有

$$A^*A=\frac{\pi}{h}\left(\alpha^2Q^2+\frac{1}{\alpha^2}D^2-\frac{h}{2\pi}\tilde{I}\right) \tag{14a}$$

$$AA^*=\frac{\pi}{h}\left(\alpha^2Q^2+\frac{1}{\alpha^2}D^2+\frac{h}{2\pi}\tilde{I}\right) \tag{14b}$$

因此有

$$AA^*-A^*A=\tilde{I} \tag{15}$$

从式(14a)和(11)可得

$$\mathscr{H}=\frac{\omega_0h}{2\pi}\left(A^*A+\frac{1}{2}\tilde{I}\right) \tag{16}$$

我们来证明，$\mathscr{H}$的任一特征值 λ（若存在的话）必等于§11.3中的(12)所给出的值之一。

设 λ 是$\mathscr{H}$的一个特征值，ψ 是相应的一个特征函数。则 $\psi\neq0$且满足

$$\mathscr{H}\psi=\lambda\psi$$

据式(16)有

$$A^*A\psi=\tilde{\lambda}\psi,\ \text{其中}\tilde{\lambda}=\frac{2\pi\lambda}{\omega_0h}-\frac{1}{2} \tag{17}$$

用A作用则有

$$AA^*(A\psi)=\tilde{\lambda}A\psi$$

据式(15)，在左端有$AA^*=A^*A+\tilde{I}$，故

$$A^*A(A\psi)=(\bar{\lambda}-1)A\psi$$

类似地，再用A作用，有

$$A^*A(A^2\psi)=(\bar{\lambda}-2)A^2\psi$$

如此作用j次后，便得

$$A^*A(A^j\psi)=(\bar{\lambda}-j)A^j\psi \tag{18}$$

对于充分大的j，必有$A^j\psi=0$；否则用$A^j\psi$与式(18)的两端取内积，对每个j将会有

$$\langle A^j\psi, A^*A(A^j\psi)\rangle = \langle A^{j+1}\psi, A^{j+1}\psi\rangle = (\bar{\lambda}-j)\langle A^j\psi, A^j\psi\rangle$$

即对每个j有

$$\bar{\lambda}-j=\frac{\|A^{j+1}\psi\|^2}{\|A^j\psi\|^2}\geqslant 0 \tag{19}$$

因为$\bar{\lambda}$是一个确定的数，这显然是不可能的。因此，存在一个$n\in N$使得$A^n\psi\neq 0$，但对于$j>n$有$A^j\psi=0$，特别有$A^{n+1}\psi=0$。对于$j=n$，我们便从式(19)中的等式得到

$$\bar{\lambda}-n=0$$

由于$\omega_0=2\pi\nu$，由上式和式(17)便推出

$$\bar{\lambda}=\frac{\omega_0 h}{2\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)=h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

这与§11.3中的式(12)是一致的。

习　题

1. 用分离变量法从式(8)推出式(9)。

2. 在例11.4-1中，若ψ_0是$\mathscr{H}$的对应于最小特征值的一个标准化的特征函数，用归纳法证明

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{n!}}(A^*)^n\psi_0$$

是A^*A的对应于$\bar{\lambda}=n$的标准化的特征函数。

3. 证明：在习题2中有

$$A^*\psi_n=\sqrt{(n+1)}\,\psi_{n+1}$$
$$A\psi_n=\sqrt{n}\,\psi_{n-1}$$

4. 对于处于状态ψ_0（最低能量状态）的谐振子，计算Q的均值和方差，其中$\|\psi_0\|=1$。计算的结果在哪些方面与经典力学有所不同？

5. 证明：例11.4-1中的算子满足交换法则：

$$AQ^s-Q^sA=\sqrt{\frac{h}{4\pi m\omega_0}}\,sQ^{s-1},\quad s=1,2,\cdots$$

6．利用习题5证明：处于状态ψ_0下的谐振子，其Q^{2s}的均值为

$$\mu_{\psi_0}(Q^{2s})=\left(\frac{h}{4\pi m\omega_0}\right)^s(2s-1)(2s-3)\cdots3\cdot1$$

7．证明：对于图72中的阶跃电位，薛定锷方程给出了

$$\psi''+b_1{}^2\psi=0,\ b_1{}^2=\frac{8\pi^2m}{h^2}E \qquad (q<0)$$

$$\psi''+b_2{}^2\psi=0,\ b_2{}^2=\frac{8\pi^2m}{h^2}(E-U) \qquad (q\geqslant0)$$

关于从左边来的入射波求解这一问题，这里假定$E>U$。

8．验证习题7中透射和反射的粒子数之和等于入射的粒子数。

9．对于$E<U$的情况求解习题7。该问题的解和经典的解之间有什么主要差别？

10．（坠道效应）证明：习题9的答案提出了在势垒的情况下，粒子的波函数可近似地看作为图73所表示的规律。

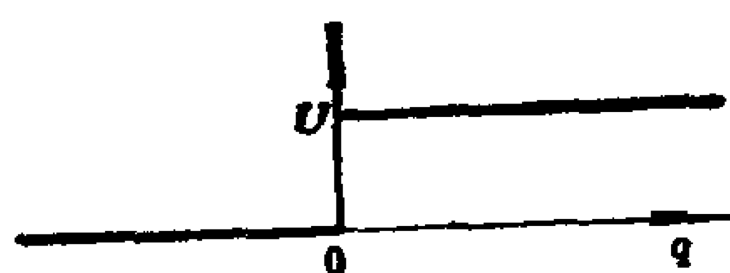


图72　习题7中的电位

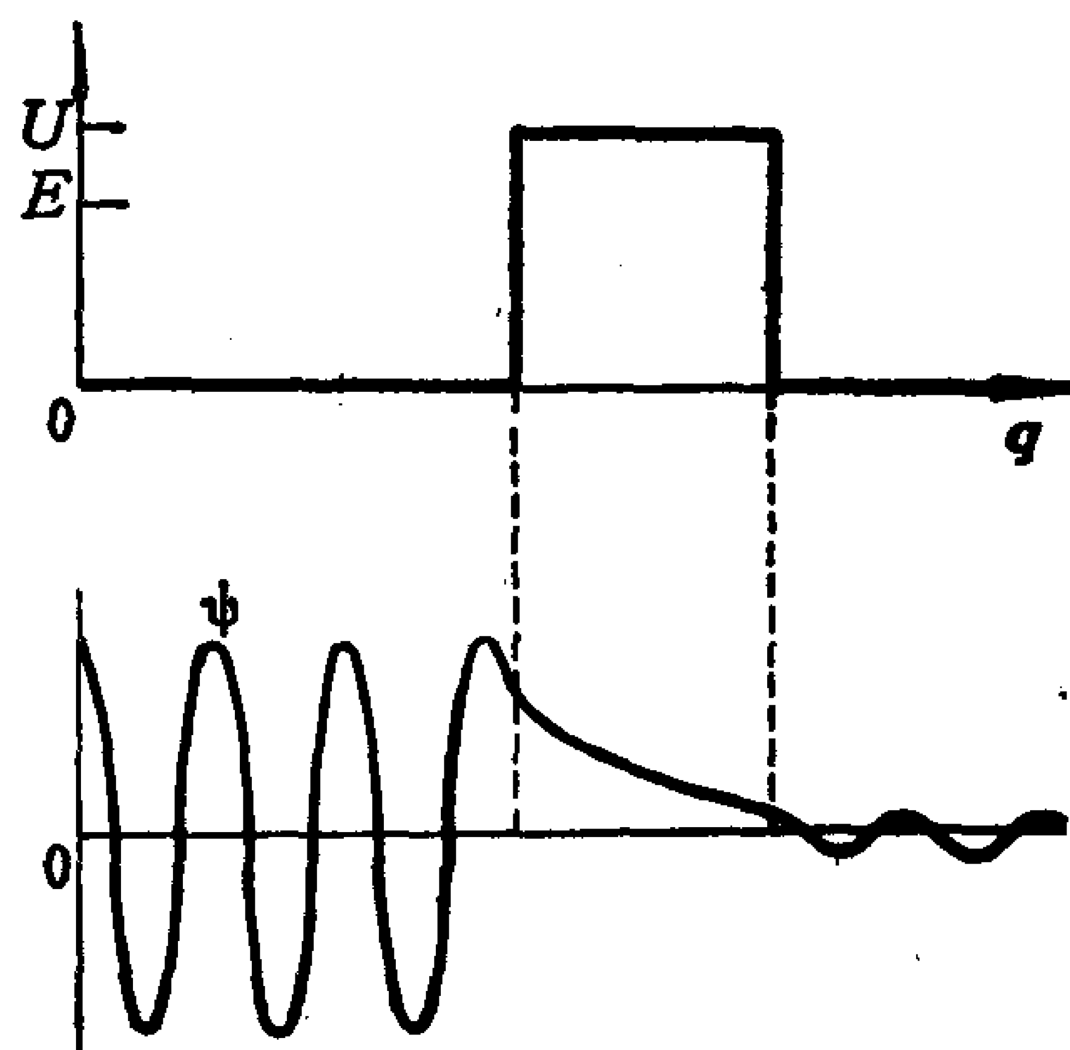


图73　势垒和穿过势垒的电子坠道效应的波函数

§11.5　时间-相关的薛定锷方程

在本章的前4节，我们研究了处于某一时刻的物理系统，也就是说，我们把时间当作一个保持不变的参数加以处理的。本节我们再谈谈状态和观察量的时间-相关性。

一个物理系统的稳定状态（稳状），它与时间的关系仅为指数因子的形式，如为$e^{-i\omega t}$，所以这种状态具有§1.3中式(2)的一般形式。其它的状态叫做非稳定状态，而问题是：这种p_i,q_i和t的一般函数φ应满足什么样的微分方程。当然，这样的基本方程只能从实验推导出来。由于我们就方程的形式不能获得直接的实验结论，所以只好考虑各种形式的方程，以便从中发现哪些方程与实验结果有较好的吻合，并且在逻辑上应具备我们所要求的性质。

§11.3中的波方程(11)就不合适。其原因之一是，我们希望的函数φ如果在某一时刻t给定，则对所有的t便被确定。由于方程(1)(§11.3中)含有关于t的二阶导数，所以一阶

导数不定。这一事实最初可能使读者感到惊异，因为该方程是用在光学当中的。不过，真空中的电磁波的瞬时状态只有在磁场矢量 b 和电场矢量 e 的所有分量都知道的情况下才能完全确定。这些分量是空间点和时间 t 的六个函数，它们由马克斯韦方程来确定，而方程关于 t 是一阶的；在真空中，以矢量形式和高斯单位写出为

$$\mathrm{curl}\, b = \frac{1}{c}\ \frac{\partial e}{\partial t},\ \mathrm{curl}\, e = -\frac{1}{c}\ \frac{\partial b}{\partial t},\ \mathrm{div}\, b = \mathrm{div}\, e = 0$$

其中 c 是光速。这些方程意味着 b 和 e 的每个分量都满足波方程，而且在光学中单个的分量是不能确定未来的整个状态的。

这种情况提醒我们要寻求类似马克斯韦方程的一种方程，并且要求稳定条件下，所得到的方程能提供 § 11.3中研究过的时间-无关的薛定锷方程。这种类型的方程就是时间-相关的**薛定锷方程**；即

$$\mathscr{H}\psi = \frac{h}{2\pi i}\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{1}$$

它是由薛定锷在1926年给出的。由于式(1)含有i，所以它的非零解 φ 一定是复的。$|\varphi|^2$ 看作为波的强度的一个度量。

在一个点的强度与时间 t 无关的稳态解，通过令

$$\varphi = \psi e^{-i\omega t} \tag{2}$$

便可得到，其中 ψ 与 t 无关，并且$\omega = 2\pi\nu$。把式(2)代入式(1)便有

$$\mathscr{H}\psi = -\frac{h}{2\pi i}(-2\pi i\nu)\psi$$

且由于$E = h\nu$，故有

$$\mathscr{H}\psi = \lambda\psi \tag{3}$$

其中 $\lambda = E$ 是系统的能量。这和上一节中的式(4)是一致的，所以我们在上面提出的要求得到满足。

方程(1)常常叫做量子力学运动方程，不过要按下述意义来理解。

在经典力学中，运动（矢量）微分方程确定了物理系统的运动；也就是说，位置、速度等作为时间的函数，一旦对某一参考时刻（比如 $t = 0$）的初始条件为已知，则对一切 t 都确定了。在量子力学中，情形就不同了。相对于观察量，系统不再以确定性的方式有上述的描述。不过，相对于状态仍有确定性的描述。事实上，如果 φ 在某一时刻（比如在 $t = 0$）为已知，（假如系统没有受到测量或其它方面的干扰）则方程(1)对一切 t 可确定 φ。这就意味着前面所考虑的概率密度关于时间是确定性的。因此，我们可以按照 § 11.1和11.2中所阐明的方法，计算观察量在任一时刻的概率。

最后的习题集包括一些进一步的基本应用，特别是球面对称的物理系统，诸如氢原子等。

习　题

1.（球面波） 证明：对于只依赖于 r 的 ψ，其中 $r^2=q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2$，§ 11.3 中的赫姆霍尔兹方程（3）成为

$$R''+\frac{2}{r}R'+k^2R=0$$

证明：§ 11.3中的式（1）的相应的特解是

$$\frac{1}{r}\exp[-i(\omega t-kr)] \text{和} \frac{1}{r}\exp[-i(\omega t+kr)]$$

它们分别代表一个辐射球面波和一个入射球面波。在这里 $\exp x=e^x$。

2.（球面对称场中的电子） 若电位 V 只依赖于到空间中某一固定点的距离 r，把薛定锷方程①

$$\Delta\psi+a(E-V(r))\psi=0,\quad a=\frac{8\pi^2\tilde{m}}{h^2}$$

变换到由（图74）

$$q_1=r\sin\theta\cos\phi,\ q_2=r\sin\theta\sin\phi,\ q_3=r\cos\theta$$

所定义的球面坐标 r,θ,ϕ 是很方便的。（这种类型的重要的物理系统是氢原子和离化氦）证明：

$$\Delta\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}L\psi$$

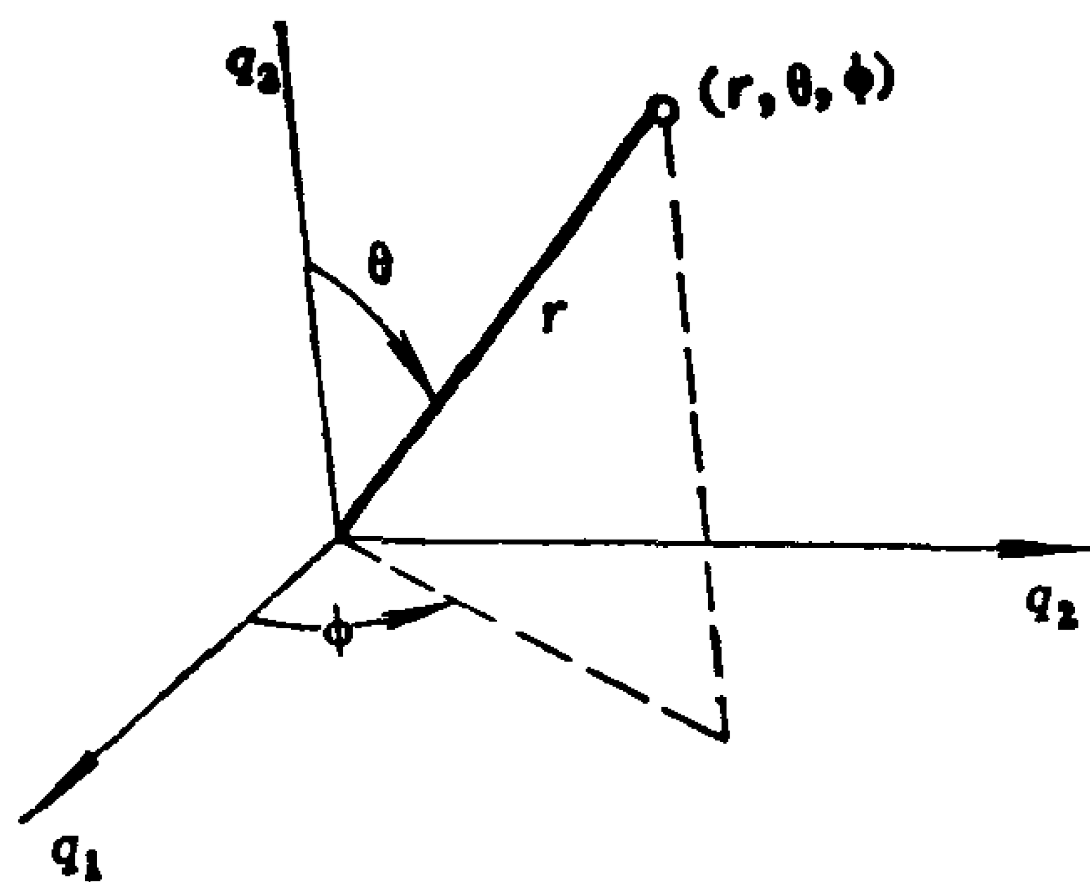


图 74　习题2中的球面坐标系

其中与角度有关部分为

$$L\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+(\cot\theta)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

证明：我们也能把上两式写成

$$\Delta\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}L\psi$$

$$L\psi=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

证明：通过令

$$\psi(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi)$$

并分离变量，可从薛定锷方程得到

$$R''+\frac{2}{r}R'+a(E-V)R-\frac{\alpha}{r^2}R=0$$

① 我们用 $\tilde{m}$ 表示电子质量，把 m 用来代表磁量子数

其中 α 是一个分离常数，并且

$$LY+\alpha Y=0$$

值得注意的是，关于角度部分的方程与$V(r)$的具体形式无关。令

$$Y(\theta,\phi)=f(\theta)g(\phi)$$

并应用另一个变量分离，证明

$$f''+(\cot\theta)f'+\left(\alpha-\frac{\beta}{\sin^2\theta}\right)f=0$$

其中 β 是另一个分离常数，并且

$$g''+\beta g=0$$

推证 g 是周期为 2π 的周期函数，比如

$$g(\phi)=e^{im\phi}\ ,\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,$$

也就是 $\beta=m^2$，其中 m 叫做磁量子数① （由于磁量子数在所谓的塞曼效应中起着重要的作用，该效应是磁场引起的谱线分裂。）

为了关于 f 求解方程，其中 $\beta=m^2$，令 $x=\cos\theta$，$f(\theta)=y(x)$，并证明它可导出方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left(\alpha-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0$$

考虑情况 $m=0$。证明对于

$$\alpha=l(l+1),\ \ l=0,1,\cdots$$

方程的解是勒让德多项式P_l（见3.7-1）。〔还可证明，关于其它的 α 值所得到的无穷级数在 $x=\pm1$处是不收敛的。〕l 叫做角量子数或轨道角动量子数（由于它与习题7中的算子$\mathscr{M}$有关，而有时又把$\mathscr{M}$叫做角动量算子）。

3．（连带的勒让德函数，球面调和函数）考虑方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

$$m=0,1,2,\cdots$$

把 $y(x)=(1-x^2)^{m/2}z(x)$代入，证明$z(x)$满足

$$(1-x^2)z''-2(m+1)xz'+[l(l+1)-m(m+1)]z=0$$

从P_l 的勒让德方程着手，微分 m 次，证明上述方程的解 z 为 P_l的 m 阶导数

$$z(x)=P_l(x)^{(m)}$$

而相应的 y为

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}P_l(x)^{m}$$

① 此处字母m是磁量子数的标准记法，切勿同质量$\tilde{m}$相混淆。

并叫做连带的勒让德函数。证明：对于负的$m=-1,-2,\cdots$，，上面的公式把m换成$|m|$仍然有效。证明必须要求$-l\leqslant m\leqslant l$。函数

$$Y_l^m(\theta,\phi)=e^{im\phi}P_l^m(\cos\theta)$$

叫做球面调和（或曲面调和）函数。

4．（氢原子） 对氢原子考虑习题2中关于R的方程，所以$V(r)=-e^2/r$，其中e是一个电子的电荷。就$\alpha=l(l+1)$（见习题2）和$E<0$求解该方程。（$E<0$是电子有界状态的条件）。处理方法如下：作代换$\rho=\gamma r$，证明

$$\tilde{R}''+\frac{2}{\rho}\tilde{R}'+\left(-\frac{1}{4}+\frac{n}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)\tilde{R}=0$$

其中"$'$"是关于ρ求导，且$R(r)=\tilde{R}(\rho)$，和

$$\gamma^2=-4aE，\ n=ae^2/\gamma$$

再作代换

$$\tilde{R}(\rho)=e^{-\rho/2}w(\rho)$$

证明

$$w''+\left(\frac{2}{\rho}-1\right)w'+\left(\frac{n-1}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)w=0$$

作代换

$$w(\rho)=\rho^l u(\rho)$$

证明

$$\rho u''+(2l+2-\rho)u'+(n-1-l)u=0$$

证明该方程的解为

$$u(\rho)=L_{n+l}^{2l+1}(\rho)=L_{n+l}(\rho)^{(2l+1)}$$

它是拉盖尔多项式L_{n+l}（见3.7-3）的$(2l+1)$阶导数。函数L_{n+l}^{2l+1}叫做连带的拉盖尔多项式。证明：总之，我们有结果

$$R(r)=R(\rho/\gamma)=e^{-\rho/2}\rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$$

其中$\rho=\gamma r=2r/na_0$，a_0就是所谓的玻尔半径：

$$a_0=\frac{h^2}{4\pi^2\tilde{m}e^2}=0.529\times10^{-8}cm$$

证明必须要求$l\leqslant n-1$，而n必须是正整数。

5．（氢的谱） 证明习题4中的能量E只与n有关，而n叫做基本的量子数；事实上，可证明

$$E = E_n = \frac{2\pi^2 \tilde{m} e^4}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

证明对应于每个 n，有 n^2 个不同的解

$$\psi_{nlm} = c_{nlm} R_{nl} f_{lm} g_m$$

其中 c_{nlm} 是一规范化常数，而 f 和 g 是习题 2 中所得到的函数。证明：与谐振子相比，氢原子有无穷多个有界的状态。

顺便指出，电子跃迁到低能状态相当于能量的放射。图 75 表明了氢谱的赖曼（*Lyman*）、巴尔莫（*Balmer*）和帕斯肯（*Paschen*）系列；这些系列相应于跃迁

$$E_n \longrightarrow E_1, \quad E_n \longrightarrow E_2, \quad E_n \longrightarrow E_3$$

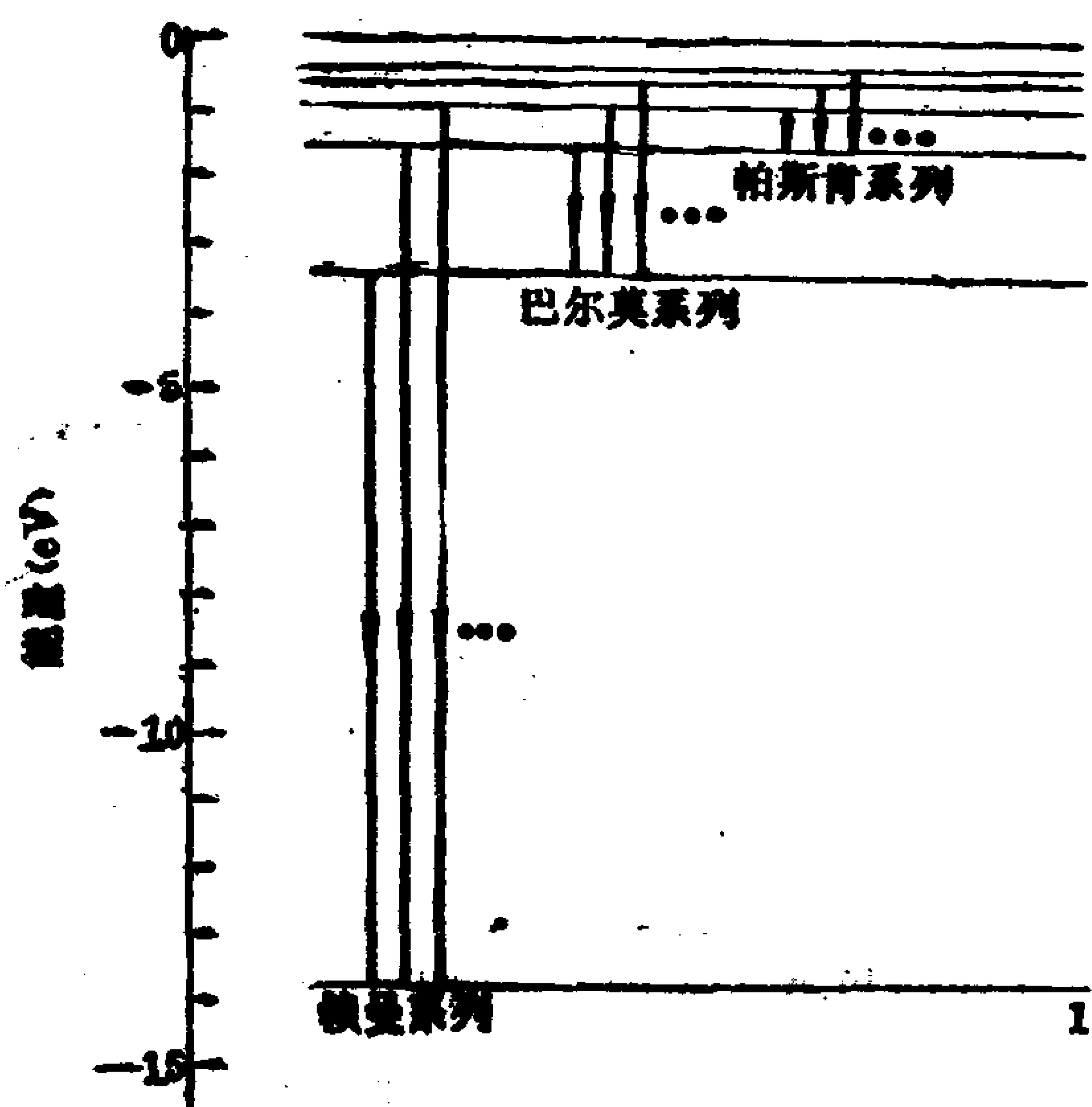


图 75 氢原子的能级图和谱系列

图75表明：

(i)对应于基本量子数 $n = 1, 2, \cdots$ 的能级；

(ii)电子伏特 (ev) 能量（其中 $n \to \infty$ 对应于 $0ev$，$n = 1$ 对应于 $-13.53ev$，其中 $13.53ev$ 是离化能量）。

(iii)具有不同波长（Å）的三个系列为：赖曼系列（在紫外区域）

$E_2 \longrightarrow E_1$	1216 Å
$E_3 \longrightarrow E_1$	1026 Å
$E_4 \longrightarrow E_1$	973 Å

巴尔莫系列（可见区域）

$E_3 \longrightarrow E_2$	6563 Å（H_α线）
$E_4 \longrightarrow E_2$	4861 Å（H_β线）
$E_5 \longrightarrow E_2$	4340 Å（H_γ线）

帕斯肯系列（在红外区域）

$E_4 \longrightarrow E_3$	18751 Å
$E_5 \longrightarrow E_3$	12818 Å
$E_6 \longrightarrow E_3$	10938 Å

因而，由于 $E = h\nu$，从上述公式便可得到里德伯（*Rydberg*）公式

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{hc}(E_n - E_m) = R^*\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

关于氢的里德伯常数 R^* 为

$$R^* = \frac{2\pi^2 \tilde{m} e^4}{ch^3} = 109737.3cm^{-1}$$

（关于这一数值，见 § 11.2 脚注所指出的书中 $p.F$-104.）

6.（角动量算子） 有趣的是，在球面坐标中分离薛定锷方程后所出现的方程能与角动量算子关联在一起。实际上，可证明（见 § 11.2 习题 9）

$$\mathscr{M}_3\psi=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

所以$g''+\beta g=0$（见习题2），其中 $\beta=m^2$，在用Rf去乘以后便能够写成

$$\mathscr{M}_3{}^2\psi=\frac{h^2m^2}{4\pi^2}\psi$$

7．（角动量算子）证明：用球面坐标，§11.2习题9中的角动量算子有如下的表示：

$$\mathscr{M}_1\psi=-\frac{h}{2\pi i}\left(\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\cot\theta\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right),$$

$$\mathscr{M}_2\psi=\frac{h}{2\pi i}\left(\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\cot\theta\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right),$$

并且，通过习题6，§11.2习题10中的算子$\mathscr{M}^2$有表示式：

$$\mathscr{M}^2\psi=-\frac{h^2}{4\pi^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]$$

由此和习题3得出，Y_l^m是$\mathscr{M}^2$的对应于特征值

$$\frac{h^2}{4\pi^2}l(l+1),\qquad l=0,\cdots,n-1$$

的特征函数。这是一个很有名的结果，它改进了玻尔理论所预言的值 $h^2l^2/4\pi^2$。

8．（球面贝塞尔函数）值得注意的是，方程（习题2中所得到的）

$$R''+\frac{2}{r}R'+\left[a(E-V(r))-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$$

也能够用来研究球面对称的其他问题。例如，设（图76）

$$V(r)=\begin{cases}-V_0<0, & r<r_0\\ 0, & r\geqslant r_0\end{cases}$$

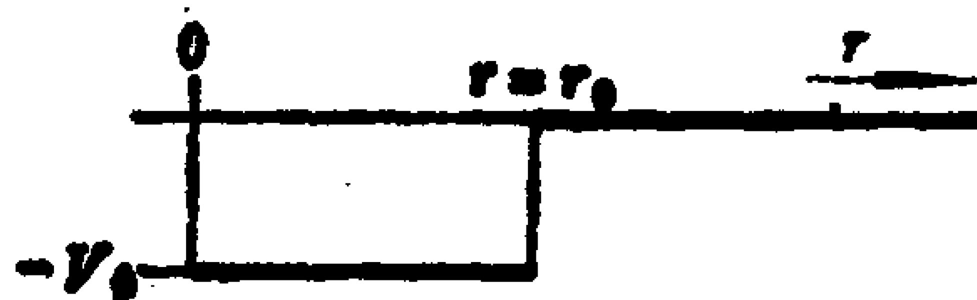


图 76　习题8中的电位V(r)

假定$E<0$，并且$E+V_0>0$。先证明该方程能变换成贝塞尔方程

$$u''+\frac{1}{\rho}u'+\left(1-\frac{(l+1/2)^2}{\rho^2}\right)u=0$$

然后关于$r<r_0$求用贝塞尔函数表示的解。〔就因为这个，解R（带有适当的数值因子）才叫做球面贝塞尔函数。〕

9．若习题8中的$l=0$，证明贝塞尔方程的解是

$$J_{1/2}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sin\rho\quad,\quad J_{-1/2}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\cos\rho$$

利用这两个解和递推关系

$$J_{\nu-1}(\rho)+J_{\nu+1}(\rho)=\frac{2\nu}{\rho}J_\nu(\rho)$$

证明：对一切 $l=1,2,\cdots$，习题8中的解能够用有限多个正弦和余弦函数（和 ρ 的负次幂）来表示。

10．象以前一样，假定 $E<0$，对 $r>r_0$ 求解习题8中的方程。这里的解与 $r<r_0$ 情况下的解之间本质的差别是什么？

附录1　复习与参考资料

A1.1 集　合

凡是集合都用单个大写字母A，B，M等表示，有时也用花括号表示，例如：

$\{a,b,c\}$表示含有元素 a,b,c的集合，

$\{t \mid f(t)=0\}$表示函数 f 的所有零点的集合。

在集合论中常用的符号有：

ϕ	空集（不含任何元素的集合）
$a\in A$	a是A的一个元素
$b\notin A$	b 不是A的元素
$A=B$	A和B相等（恒等，由同样的元素构成）
$A\neq B$	A和B是不同的（不等的）
$A\subset B$	A是B的一个子集（A的每个元素都属于B），也写成 $B\supset A$
$A\subset B$，$A\neq B$	A是B的真子集（A是B的一个子集并且B至少有一个元素不属于A）
$A\cup B$	$=\{x \mid x\in A$或$x\in B\}$，A与B之并，见图77
$A\cap B$	$=\{x \mid x\in A$且$x\in B\}$，A与B之交，见图77
$A\cap B=\phi$	A和B是不相交的集合（没有公共元素的集合）
$A-B$	$=\{x \mid x\in A$且$x\notin B\}$，A与B之差。（在这里B可以是也可不是A的子集）见图78（及图79）
A^c	$=X-A$，A在X中的余集（其中$A\subset X$）（若省略X有可能产生混乱时，记为C_XA）见图80

直接从定义可推出下述公式

(1a)　$A\cup A=A$　　$A\cap A=A$

(1b)　$A\cup B=B\cup A$　　$A\cap B=B\cap A$

(1c)　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，写成$A\cup B\cup C$

(1d)　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，写成$A\cap B\cap C$

(1e)　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

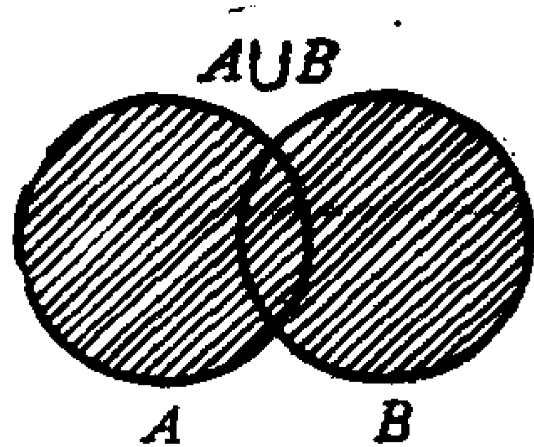
(1f)　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(1g)　$A\cap B\subset A$　　$A\cap B\subset B$

(1h)　$A\cup B\supset A$　　$A\cup B\supset B$

此外，

$$\begin{aligned}&A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap B=A\\&A\subset C\text{且}B\subset C\Leftrightarrow A\cup B\subset C\\&C\subset A\text{且}C\subset B\Leftrightarrow C\subset A\cap B\end{aligned}\qquad(2)$$



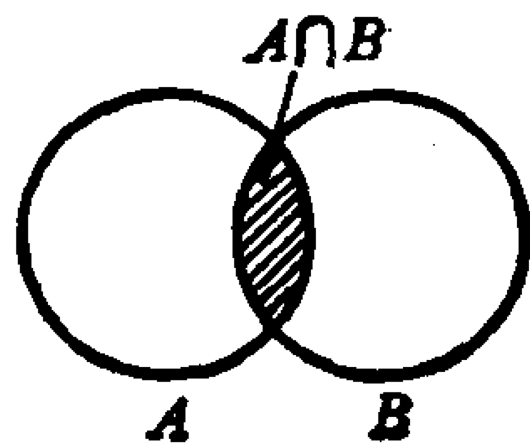
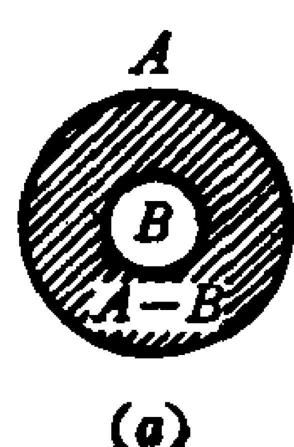
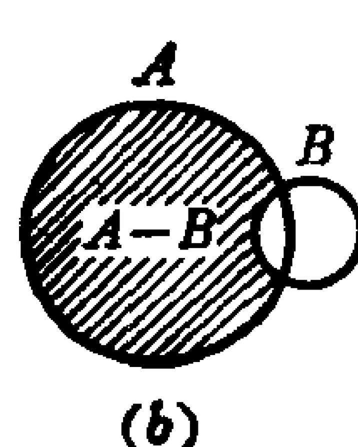


图 77 集合A与B的并A∪B和交A∩B





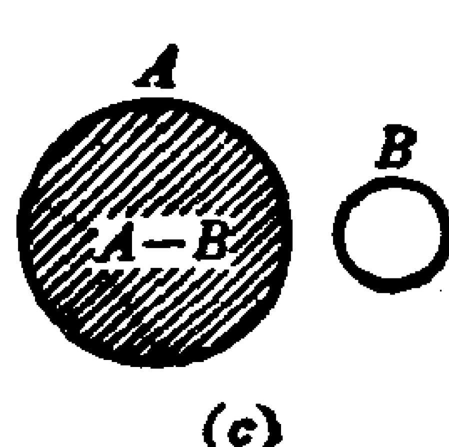


图 78 集合A(大圆)和B(小圆)之差A−B.
(斜线部分) (a)B⊃A, (b)A∩B≠ϕ且B⊄A, (c) A∩B=ϕ

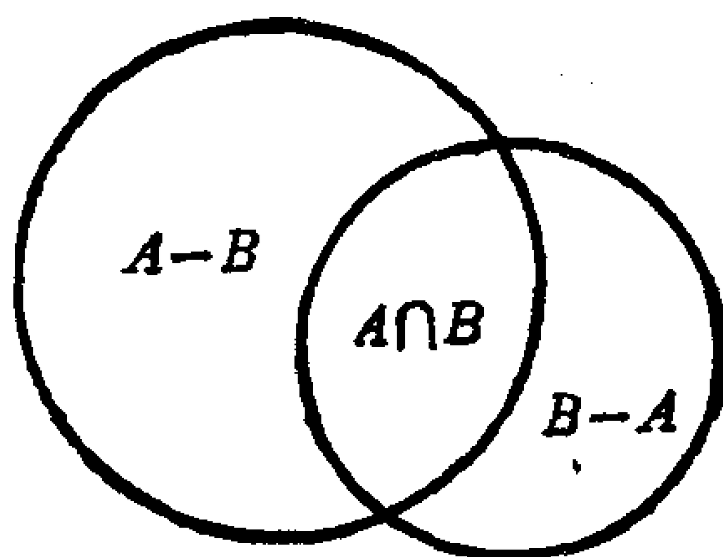


图 79 集合A(大圆)和B(小圆)之差
A−B和B−A以及交A∩B

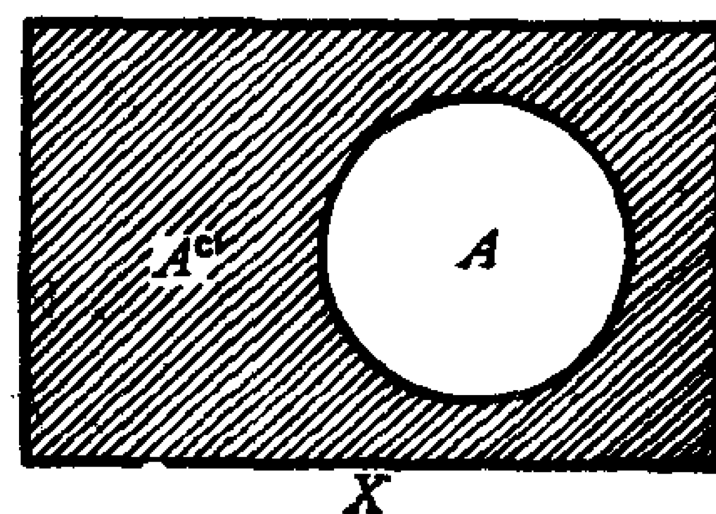
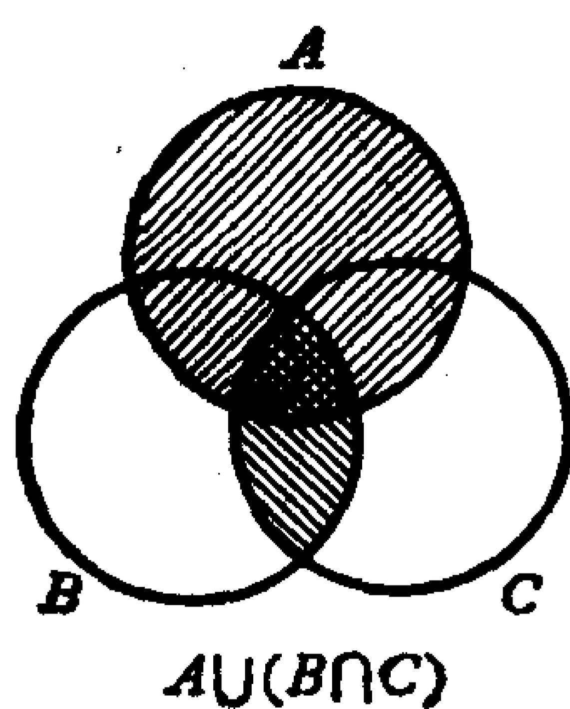


图 80 集合X的子集A的余集
$A^c = X - A$ (阴影部分)



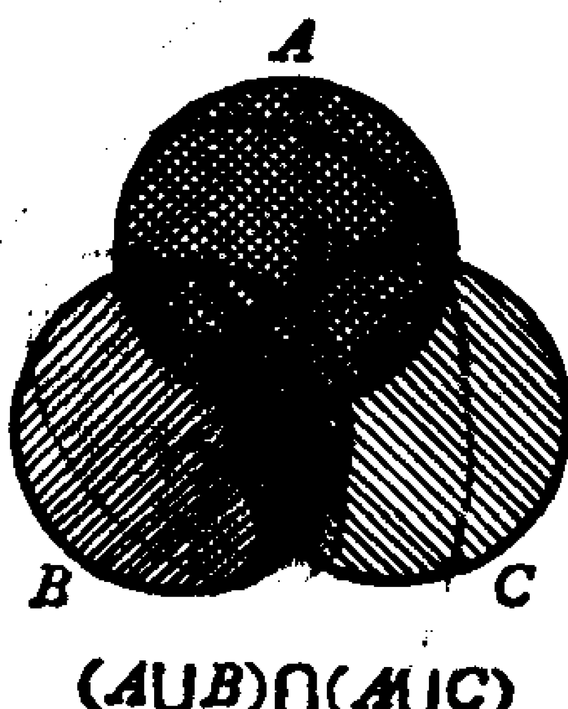
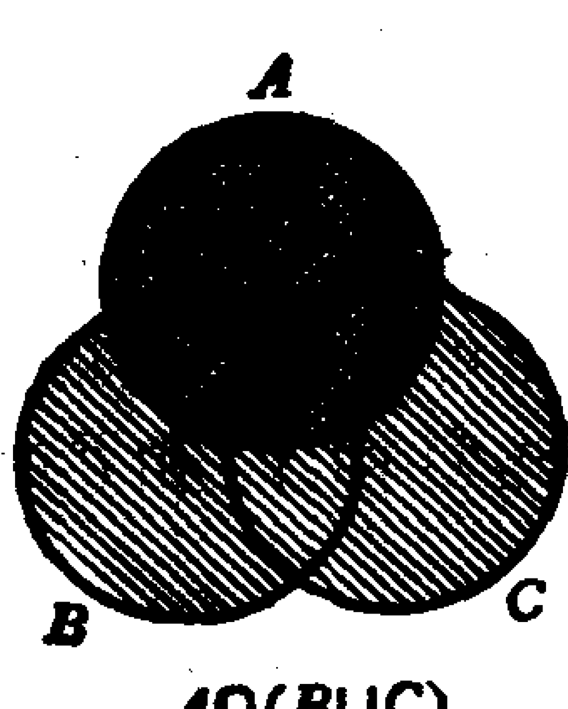


图81 公式 (1e)



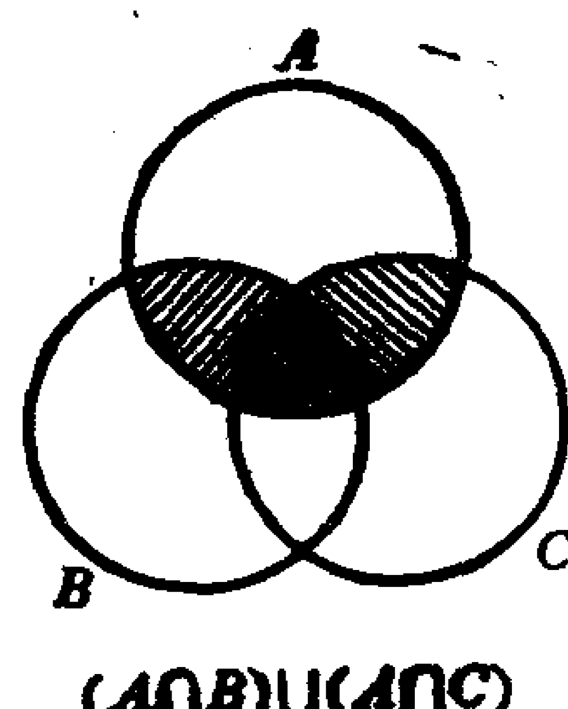


图82 公式 (f)

从余集的定义可以推出

$$(A^c)^c = A, \quad X^c = \phi, \quad \phi^c = X \tag{3}$$

德・摩尔根（*De Morgan*）定律是（A和B是X的任意子集）

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \tag{4}$$

很显然，

$$A \subset B \Longleftrightarrow A^c \supset B^c$$
$$A \cap B = \phi \Longleftrightarrow A \subset B^c \Longleftrightarrow B \subset A^c$$
$$A \cup B = X \Longleftrightarrow A^c \subset B \Longleftrightarrow B^c \subset A \tag{5}$$

给定的集合S的所有子集的集合，叫做**S的幂集**，并记之为$\mathscr{P}(S)$。

两个给定的非空集合X和Y的**笛卡尔积**（或积）$X\times Y$是所有序偶(x,y)的集合，其中$x\in X$而$y\in Y$。见图83。

若集合M是有限的（有有限多个元素），或者M的每个元素都唯一地对应一个正整数，并且反过来每个正整数1，2，…也都唯一地对应M中的一个元素，则称M是**可数的**。

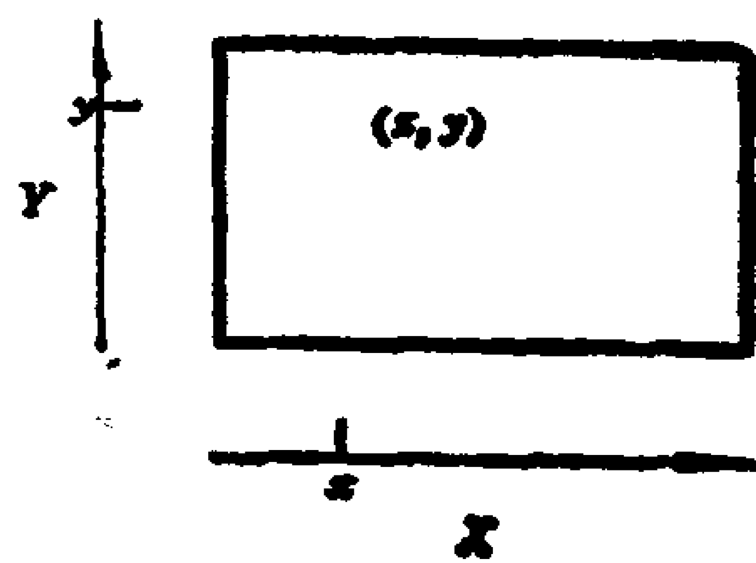


图 83　两个集合X和Y的笛卡尔积X×Y的一种形象化的表示方法

A1.2　映射

设X和Y是两个集合，且$A\subset X$是任一子集。从A到Y的映射（或变换，函数关系，抽象函数）T是通过把每个$x\in A$都和唯一的$y\in Y$对应起来得到的，记$y=Tx$，并把y叫做x关于T的**象**。集合A叫做T的定义域，或简称为T的**域**，并且记之为$\mathscr{D}(T)$，所以我们写成

$$T:\ \mathscr{D}(T)\to Y$$
$$x\mapsto Tx$$

T的**值域**$\mathscr{R}(T)$是全体象的集合，因而

$$\mathscr{R}(T)=\{y\in Y\ |y=Tx,\ \text{对某些}x\in\mathscr{D}(T)\}$$

任一子集$M\subset\mathscr{D}(T)$的象$T(M)$是所有象Tx的集合，其中$x\in M$。注意，$T(\mathscr{D}(T))=\mathscr{R}(T)$。

在图84中给出了这种情况的一个说明。

$y_0\in Y$的**逆象**是满足$Tx=y_0$的所有$x\in\mathscr{D}(T)$的集合。类似的，子集$Z\subset Y$的逆象是所有满足$Tx\in Z$的$x\in\mathscr{D}(T)$的集合。要注意，$y_0\in Y$的逆象可能是空集，也可能是单点集，或者是$\mathscr{D}(T)$的任一子集，这要由y_0和T来决定。

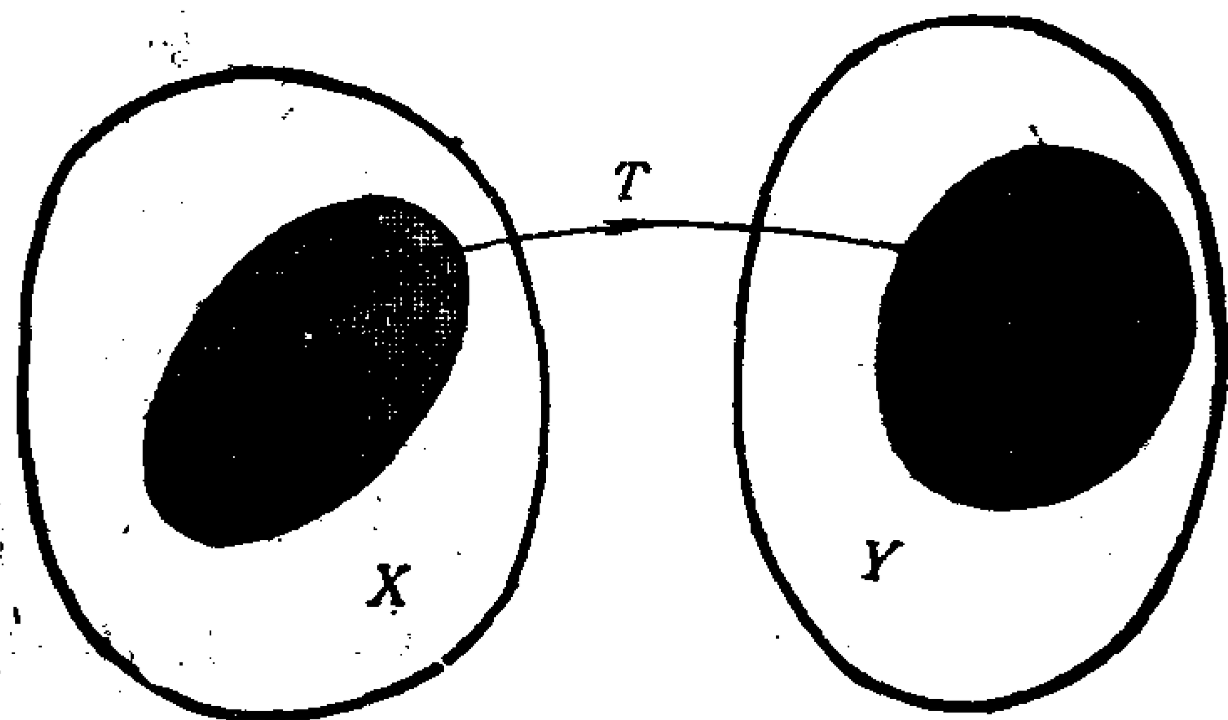


图 84　映射的形象化表示

一个映射T，若对每两个$x_1,x_2\in\mathscr{D}(T)$，

$$x_1\neq x_2\ \text{都蕴含着}\ Tx_1\neq Tx_2;$$

则称T是一个**内射**，或称T是**一对一的**；也就是说，$\mathscr{D}(T)$中的不同的点有不同的象，所以$\mathscr{R}(T)$中的每一个点的逆象也都是一个点。见图85。

映射$T:\ \mathscr{D}(T)\longrightarrow Y$的值域$\mathscr{R}(T)$若等于$Y$，则称$T$是一个**满射**，或称之为$\mathscr{D}(T)$**到**$Y$上的映射。见图86。显然，

$$\mathscr{D}(T)\to\mathscr{R}(T)$$
$$x\mapsto Tx$$

总是满射的。

若T既是内射又是满射，则称T是一个**对射**。而对射$T:\ \mathscr{D}(T)\longrightarrow Y$的**逆映射**$T^{-1}$：$Y\longrightarrow\mathscr{D}(T)$是用$Tx_0\mapsto x_0$来定义的，即$T^{-1}$让每个$y_0\in Y$与满足$Tx_0=y_0$的$x_0\in\mathscr{D}(T)$相对应。见图87。

对于内射$T:\ \mathscr{D}(T)\longrightarrow Y$来讲，其**逆映射**$T^{-1}$定义为$\mathscr{R}(T)\longrightarrow\mathscr{D}(T)$，它把$y_0\in\mathscr{R}$

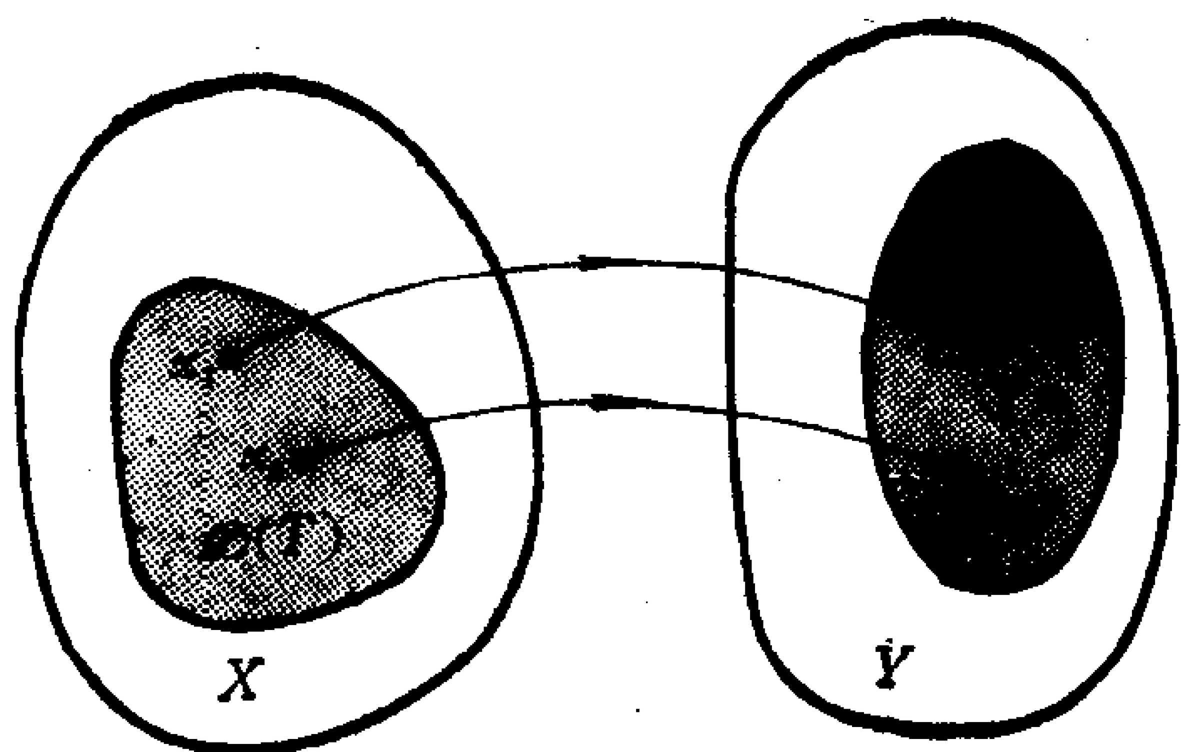


图 85　关于内射的表示

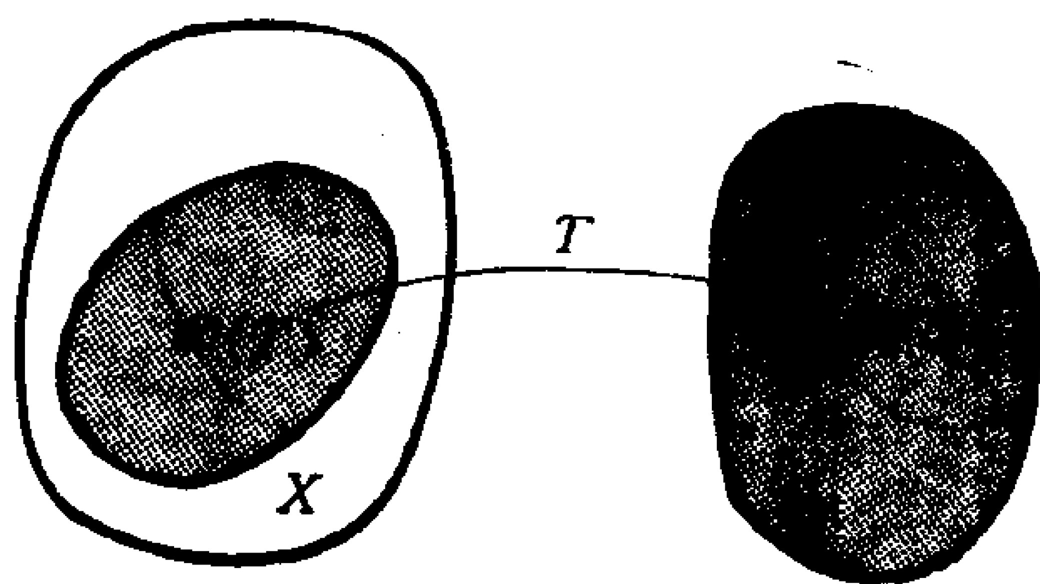


图 86　满映射

(T)映到满足$Tx_0=y$的$x_0\in\mathscr{D}(T)$上。见图88。因而在这种较为一般的意义下使用“逆”这一术语，并不要求T是一个到Y上的映射；很多作者所使用的这一方便术语在本文中不会引起误解。

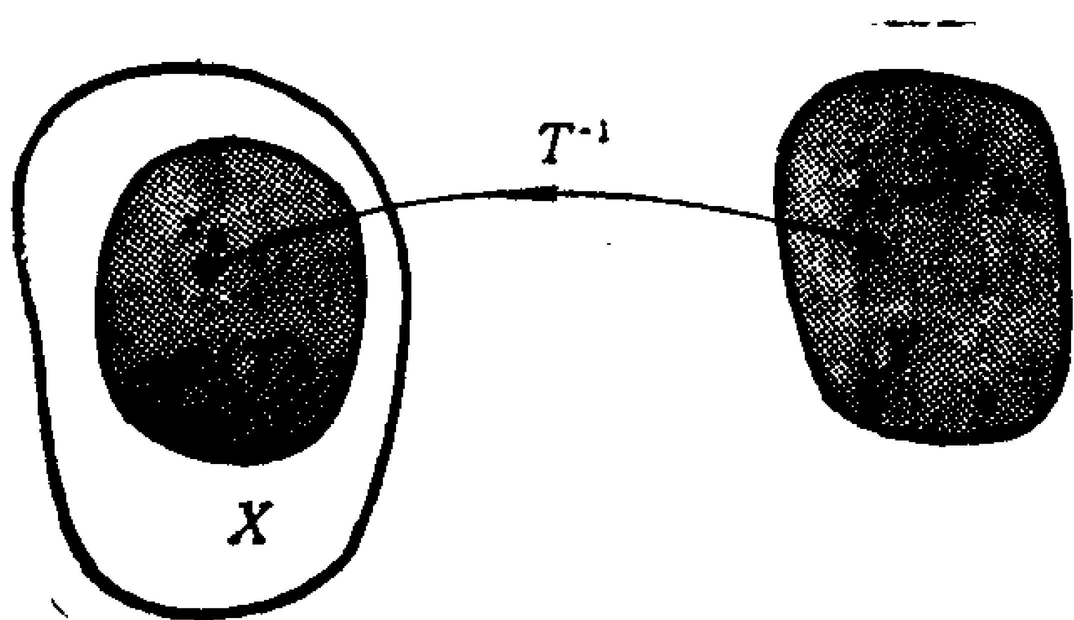


图 87　对射T的逆T^{-1}：$Y\to\mathscr{D}(T)\subset X$

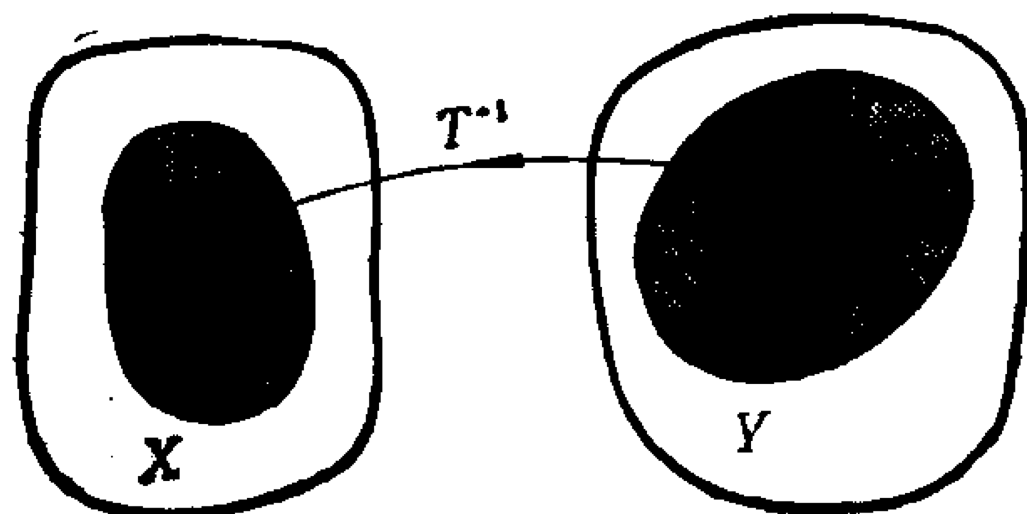


图 88　内射T的逆T^{-1}：$\mathscr{R}(T)\to\mathscr{D}(T)$

两个映射T_1和T_2，若$\mathscr{D}(T_1)=\mathscr{D}(T_2)$并且对一切$x\in\mathscr{D}(T_1)=\mathscr{D}(T_2)$都有$T_1x=T_2x$，则称它们是**相等的**。

映射$T:\mathscr{D}(T)\longrightarrow Y$在子集$B\subset\mathscr{D}(T)$上的**限制**$T|_B$是通过限制$x$取$B$中的元素从$T$所得到的映射$B\longrightarrow Y$（用$B$代替$T$的定义域$\mathscr{D}(T)$）；也就是，$T|_B: B\longrightarrow Y$，对一切$x\in B$有$T|_Bx=Tx$。见图89。

映射T从$\mathscr{D}(T)$到集合$C\supset\mathscr{D}(T)$上的**延拓**是满足$\tilde{T}|_{\mathscr{D}(T)}=T$的一个映射$\tilde{T}$，也就是对一切$x\in\mathscr{D}(T)$都有$\tilde{T}x=Tx$。

若$\mathscr{D}(T)$是$\mathscr{D}(\tilde{T})$的一个真子集，则称T的延拓$\tilde{T}$是一个真延拓；因而$\mathscr{D}(\tilde{T})-\mathscr{D}(T)\neq\phi$，即存在$x\in\mathscr{D}(\tilde{T})$而对某些$x\notin\mathscr{D}(T)$。

映射的合成定义及表示如下。若$T: X\longrightarrow Y$而$U: Y\longrightarrow Z$，则由

$$x\longmapsto U(Tx)\qquad\qquad (x\in X)$$

定义了一个从X到Z的映射，记之为$U\cdot T$，或简记为UT，因而有

$$UT: X\longrightarrow Z,\ x\longrightarrow UTx\qquad (x\in X)$$

并且把UT称作为U和T的**合成**或**积**。见图90。注意，首先应用T，次序是很本质的，在一般情况下，TU甚至是没有意义的。若$T: X\longrightarrow Y$而$U: Y\longrightarrow X$，则$UT: X\longrightarrow X$和$TU: Y\longrightarrow Y$都是有意义的，但是若$X\neq Y$，则两者是不同的。（甚至在$X=Y$的情况下，一

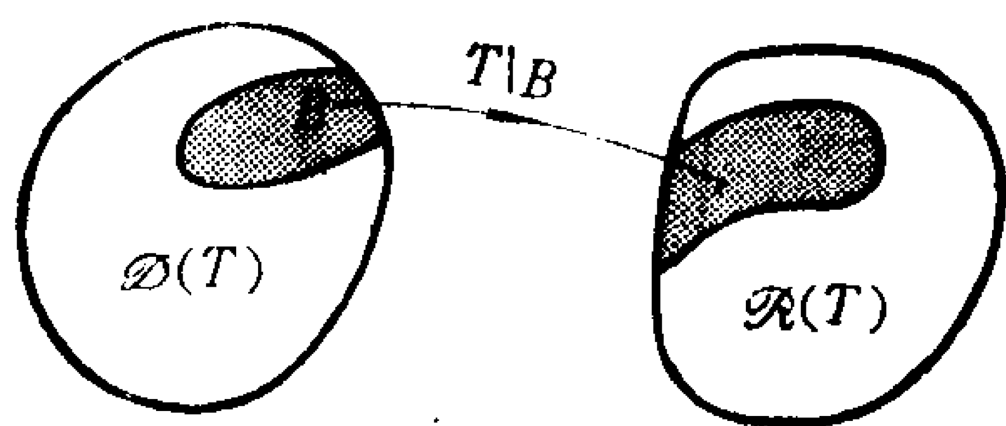


图 89 映射T在子集B⊂𝒟(T)上的限制$T|_B$

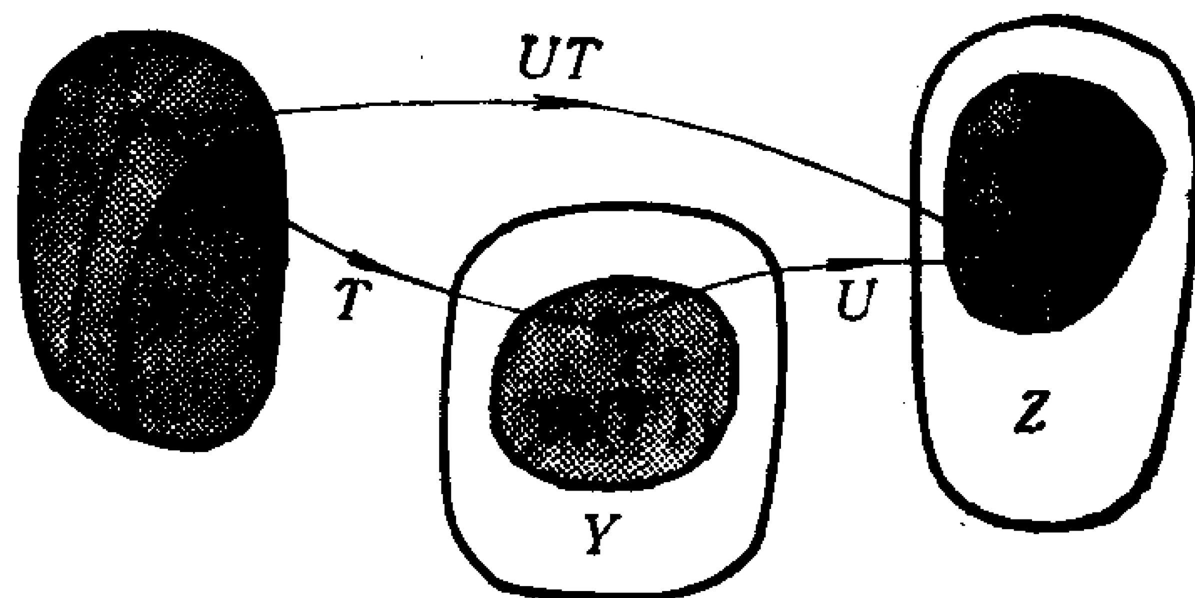


图 90 两个映射的合成

般来说这两个映射也是不同的)。

A 1.3 族

若我们把每个正整数n和一个实数或复数x_n对应起来，则得到一个实数或复数**序列**(x_n)。这一过程能够看作是$N=\{1,2,\cdots\}$到实数或复数的一个映射，而x_n是n的象。集合N叫做序列的**指标集**。

这一“指标化”的过程能够被推广，代替N我们可以取任意非空集合I（有限的，可数的或不可数的）并把I映入任意给定的其它非空集合X。这就给出了X的一个**元素族**，写为$(x_\alpha)_{\alpha\in I}$，或简写为(x_α)，其中$x_\alpha\in X$是$\alpha\in I$的象。要注意，对于I中的某些$\alpha\neq\beta$，可能会出现$x_\alpha=x_\beta$。集合I叫做族的**指标集**。若我们把指标映射限制在指标集的一个非空子集上，便得到族的一个**子族**。

若X的元素都是一个给定集合的子集，便可得到由**子集构成的一个族**$(B_\alpha)_{\alpha\in I}$，其中B_α是α的象。

族(B_α)的**并**$\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$是这样的一个集合，它的每一个元素至少属于一个$B_\alpha$，而**交**$\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha$是这样一个集合，它的元素属于每个$B_\alpha$，$\alpha\in I$。若$I=N$，则写成

$$\bigcup_{\alpha=1}^{\infty}B_\alpha \quad \text{和} \quad \bigcap_{\alpha=1}^{\infty}B_\alpha$$

而当$I=\{1,2\}$时，分别写为$B_1\cup B_2$和$B_1\cap B_2$。

我们必须留心区分族$(x_\alpha)_{\alpha\in I}$和由族的元素所构成的X的一个子集，前者是指标集I的在指标映射下的象。

对于任意非空子集$M\subset X$，我们总能够找到X的一个元素族，其元素的集合就是M。例如，我们可以取用M到X的自然内射所定义的族，也就是X上的恒等映射$x\longmapsto x$在M上的限制。

A 1.4 等价关系

设X和Y是给定的非空集合，笛卡尔积$X\times Y$(见前)的任一子集R叫做一个（二元）关系，$(x,y)\in R$也被写为$R(x,y)$。

X上的一个等价关系满足下述定律的一个关系$R\subset X\times X$：

$$\begin{aligned}&\text{对一切}x\in X\text{有}R(x,x) && \text{(自反性)}\\&R(x,y)\text{蕴含着}R(y,x) && \text{(对称性)}\end{aligned} \qquad (1)$$

$R(x,y$和$R(y,z)$蕴含着$R(x,z)$　　(传递性)

当R是X上的一个等价关系时，则通常把$R(x,y)$写为$x\sim y$，(读作x等价于y) 此时，(1)便成为

$$x\sim x$$

$$x\sim y \implies y\sim x$$

$$x\sim y\text{及}y\sim z \implies x\sim z$$

任一$x_0\in X$的等价类是所有与x_0等价的$y\in X$的集合，并且任一个这样的y都叫做这个等价类的代表。关于R的等价类构成X的一个划分。

据定义，非空集合X的一个**划分**是X的一族非空子集，它们是两两不相交的，并且它们的并就是X。

A 1.5 紧性

集合X的子集M的一个复盖是X的一个子集族$(B_\alpha)_{\alpha\in I}$(I是指标集)，且满足

$$M\subset\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$$

特别是，若(B_α)是X的一个复盖，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha=X$$

若复盖(B_α)仅由有限多个B_α组成，则称之为**有限复盖**。若$X=(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间(例如，一个度量空间；见§1.3)，并且复盖(B_α)的所有B_α都是开集，则称复盖(B_α)**是开的**。

对拓扑空间$X=(X,\mathscr{T})$来讲。

(a)若X的每一个开复盖都含有一个X的有限复盖，即含有一个有限的子族，并且是X的一个复盖，则称X是紧的。

(b)若X的每一个可数开复盖都含有一个X的有限复盖，则称X是**可数紧的**。

(c)若X中的每个序列都含有一个收敛的子序列，则称X是**列紧的**。

若把子集$M\subset(X,\mathscr{T})$当作子空间$(M,\mathscr{T}_M)$看待，它是紧的(分别为可数紧的，列紧的)，则称子集M是紧的(可数紧的，列紧的)；其中$\mathscr{T}_M$是$\mathscr{T}$在M上诱导的拓扑，它是由所有集合$M\cap A$构成的，而$A\in\mathscr{T}$。

对于度量空间，这三种紧性的概念是等价的，即能从一个推出另外两个。

A 1.6 上确界和下确界

对于实直线R的子集E来讲，若E有一个**上界**，也就是说若存在一个$b\in$R，使得对一切$x\in E$都有$x\leqslant b$，则称E是有**上界的**。若$E\neq\phi$，则存在E的**上确界**(或E的最小上界)，写为

$$\sup E$$

即它是这样的一个上界：对于E的每个上界b都有$\sup E\leqslant b$。对每个非空子集$C\subset E$，还有

$$\sup C\leqslant\sup E$$

类似的，若E有一个**下界**，即若存在一个$a\in$R，使得对一切$x\in E$都有$x\geqslant a$，则称E是有下

界的。若$E \neq \phi$，则存在E的**下确界**（或E的最大下界），写为

$$\inf E$$

即它是这样的一个下界：对于E的每个下界a都有$\inf E \geqslant a$。对每个非空子集$C \subset E$，还有

$$\inf C \geqslant \inf E$$

若E既有上界又有下界，则称E是**有界的**。若$E \neq \phi$，则

$$\inf E \leqslant \sup E$$

若映射T：$\mathscr{D}(T) \longrightarrow \mathbf{R}$的值域$\mathscr{R}(T)$（假定它非空）是有上界的，其上确界记为

$$\sup_{x \in \mathscr{D}(T)} Tx$$

而若$\mathscr{R}(T)$是有下界的，其下确界记为

$$\inf_{x \in \mathscr{D}(T)} Tx$$

类似的记法也用于$\mathscr{R}(T)$的子集。

A1.7 柯西收敛准则

对于实数或复数数列(x_n)和数a，若对每个给定的$\varepsilon>0$，关于无穷多个n都有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

则称a是(x_n)的一个极限点。

波尔察诺-维尔斯特拉斯定理是说：有界序列(x_n)至少有一个极限点。根据定义，序列有无穷多项是不可少的条件。

对于（实或复）数列(x_n)来讲，若存在一个数x使得对每个给定的$\varepsilon>0$，和有限多个n以外的一切n都有

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

则称(x_n)是收敛的，而x叫做序列(x_n)的极限。

收敛序列的极限是唯一的。要注意，极限是序列的一个极限点（为什么？）而且是收敛序列的唯一极限点。

下面我们陈述证明柯西收敛定理，其重要性在于：在不需要知道序列的极限的情况下，就能够决定它的收敛性。

柯西收敛定理 实数列或复数列(x_n)是收敛的，当且仅当对每个$\varepsilon>0$都存在一个N，使得对一切的$m, n>N$有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \tag{1}$$

证明：(a)若(x_n)是收敛的，并且c是它的极限，则对每一给定$\varepsilon>0$，都存在一个N（与ε有关），使得对每个$n>N$有

$$|x_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

故由三角不等式，对m，$n>N$可得

$$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - c| + |c - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(b) 反之，假定包含式（1）的陈述是成立。给定$\varepsilon>0$，我们可选取一个$n=k>N$，并且看出，在$m>N$时，每个x_m都落在以x_k为中心以ε为半径的圆盘D内。由于存在一个包含D的圆盘以及只有有限多个$x_n \notin D$，所以序列(x_n)是有界的。根据波尔察诺-维尔斯特拉斯定理该序列有一个极限点a。由式（1）对每个$\varepsilon>0$都成立，一旦$\varepsilon>0$给定，便有一个N^*，使得对m，$n>N^*$有$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$。选取一个固定的$n>N^*$使得$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$，由三角不等式，对一切$m>N^*$有

$$|x_m - a| \leqslant |x_m - x_n| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这就证明了(x_m)是收敛的且以a为极限。

A1.8 群

群的定义仅在§7.7中需要。

群$G=(G, \cdot)$是元素$x, y, \cdots$的集合G再加上一个映射

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(x, y) \longrightarrow xy$$

并且满足下述公理：

(G1) 结合性，对所有的$x, y, z \in G$有

$$(xy)z = x(yz)$$

(G2) 单位元e的存在性，也就是有$e \in G$存在，它对所有的$x \in G$都有

$$xe = ex = x$$

(G3) x的逆元x^{-1}的存在性。对每个$x \in G$，都有G的一个元，记作x^{-1}并叫做x的逆，它满足

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e$$

e是唯一的。对每个$x \in G$，逆x^{-1}是唯一的。若G还满足

(G4) 交换性。对一切$x\,y \in G$，有

$$xy = yx$$

则称G是一个可交换的群，或阿贝尔群。

附录2　习题解答

§1.1

1．（略）

2．否。三角不等式不成立（例如，取 $x=1$，$z=0$，$y=-1$）。

3．$(M1)$到$(M3)$ 是显然的。如果我们取下式

$$|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|\leqslant(|x-z|^{1/2}+|z-y|^{1/2})^2$$

两端的方根，便推出$(M4)$。

4．$d(x,x)=d(y,y)=0$，$d(x,y)=k>0$是任意的；$d(x,x)=0$。

5．$(i)k>0,(ii)k=0$

6．令$x=(\xi_j)$，$y=(\eta_j)$，$z=(\zeta_j)$。则由关于数的三角不等式，有

$$\begin{aligned}|\xi_j-\eta_j|&\leqslant|\xi_j-\zeta_j|+|\zeta_j-\eta_j|\\&\leqslant\sup_j|\xi_j-\zeta_j|+\sup_j|\zeta_j-\eta_j|\end{aligned}$$

再取左边的上确界。

7．离散度量；参见1.1-8。

8．$\tilde{d}(x,y)=0$，当且仅当对一切 $t\in[a,b]$有

$|x(t)-y(t)|=0$，因为x,y是连续的。(M1) 和 $(M3)$ 是显然的，从下式

$$\begin{aligned}\tilde{d}(x,y)&=\int_a^b|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|dt\\&\leqslant\int_a^b|x(t)-z(t)|dt+\int_a^b|z(t)-y(t)|dt\end{aligned}$$

其中用到了关于数的三角不等式。

9．$(M1)$ 到 $(M3)$ 是显然的。从$d(x,y)\leqslant1$和

$$d(x,z)+d(z,y)\geqslant1,\quad(x,y,z\text{互不相等})$$

便推出 $(M4)$，如果$x=y=z$，则 $(M4)$ 显然成立。

10．$2^3=8$；d 可取值 0,1,2,3 。$(M1)$ 到 $(M3)$ 是显然的，而 $(M4)$ 直接可得验证。

11．（略）

12．$d(x,y)\leqslant d(x,y)+d(z,w)+d(w,y)$；因此

$d(x,y)-d(z,w)\leqslant d(x,z)+d(y,w)$

其中用到$d(w,y)=d(y,w)$。把x和z，y和w的位置交换，再乘上-1，便有

$$\begin{aligned}-d(z,w)+d(x,y)&\geqslant-d(z,x)-d(w,y)\\&=-d(z,x)-d(y,w)\end{aligned}$$

上面两个不等式合在一起便得到所希望的结论。

13．$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)\Rightarrow d(x,z)-d(y,z)\leqslant d(x,y)$

$d(y,z)\leqslant d(y,x)+d(x,z)\Rightarrow -d(x,y)\leqslant d(x,z)-d(y,z)$

14．令$z=y$，那么$d(x,y)\leqslant d(y,x)+0$。再交换x和y。

15．在（$M4$）中令$y=x$，等等。

§1.2

1．象前面一样采用三角不等式的证明思想。

2．取$p=q=2$，$\alpha^2=a$，$\beta^2=b$。

3．若$1\leqslant j\leqslant n$，取$\eta_j=1$，若$j>n$，取$\eta_j=0$，并平方(11)。

4．$x=(\xi_n)$，其中$\xi_1=1$，$\xi_n=\dfrac{1}{\ln n}$，$n=2,3,\cdots$，因为对任意固定的$p\geqslant 1$，从某个n起有$(\ln n)^{-p}>\dfrac{1}{n}$，而调和级数发散。

5．因为若$p>1$，级数$\sum n^{-p}<\infty$，故$\dfrac{1}{n}\in l^p\,(p>1)$，但$\dfrac{1}{n}\notin l^1$

6．$\sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)\leqslant\sup\limits_{x,y\in B} d(x,y)$。

7．$\delta(A)=\sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)=0\Rightarrow d(x,y)=0\Rightarrow x=y$。其逆是明显的。

8．$D(A,B)=0$不蕴含$A=B$。三角不等式是不成立的，只要取A，B使得$D(A,B)>0$并取$C=A\cup B$便可看出。

9．其逆命题不成立。

10．由$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$可得

$$\begin{aligned}D(x,\ B)&=\inf_{z\in B} d(x,z)\leqslant\inf_{z\in B}[d(x,y)+d(y,\ z)]\\&=d(x,y)+\inf_{z\in B} d(y,z)\\&=d(x,y)+D(y,B)\end{aligned}$$

因此

$$D(x,B)-D(y,B)\leqslant d(x,y)$$

交换x和y并乘以-1，便得

$$-d(x,y)\leqslant D(x,B)-D(y,B)$$

11．($M1$)至($M3$)是明显的。($M4$)具有形式

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leqslant\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

根据($M4$)关于d并利用1.2-1的论证可以得到这个结果。根据$\tilde{d}(x,y)<1$，得证X是有界的。

12．若$x,y\in A$或$x,y\in B$，则分别有$d(x,y)\leqslant\delta(A)$或$d(x,y)\leqslant\delta(B)$。若$x\in A$且$y\in B$，则对固定的$a\in A$和$b\in B$，可得

$$d(x,y)\leqslant d(x,a)+d(a,b)+d(b,y)$$
$$\leqslant\delta(A)+d(a,b)+\delta(B)$$

因此

$$\delta(A\cup B)\leqslant\delta(A)+d(a,b)+\delta(B)<\infty$$

13．(略)

14．关于$\tilde{d}$的三角不等式可由关于d_1和d_2的三角不等式及$p=2$时的闵可夫斯基不等式(12)得到：

$$\tilde{d}(x,y)=(\sum d_i(x_i,y_i)^2)^{1/2}\leqslant(\sum[d_i(x_i,z_i)+d(z_i,y_i)]^2)^{1/2}$$
$$\leqslant(\sum d_i(x_i,y_i)^2)^{1/2}+(\sum d_i(z_i,y_i)^2)^{1/2}$$
$$=\tilde{d}(x,z)+\tilde{d}(z,y)$$

15．$\tilde{d}(x,y)=0\iff d_1(x_1,y_1)=d_2(x_2,y_2)=0\iff x=y$。从下面的关系

$$\max_{k=1,2}d_k(x_k,y_k)\leqslant\max_{k=1,2}[d_k(x_k,z_k)+d_k(z_k,y_k)]$$
$$\leqslant\max_{i=1,2}d_i(x_i,z_i)+\max_{j=1,2}d_j(z_j,y_j)$$

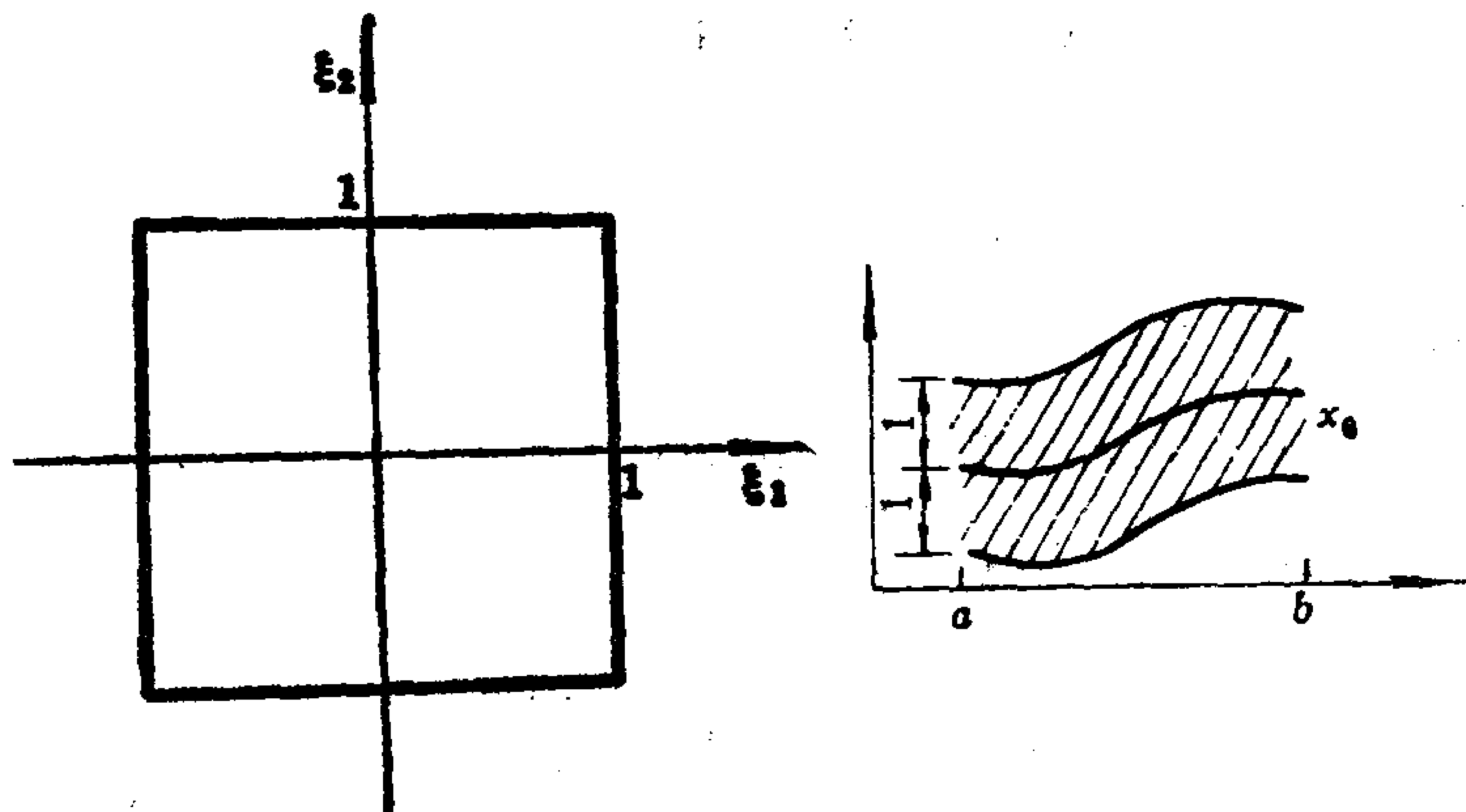
得到三角不等式。

§1.3

1．(a)令$x\in B(x_0;r)$。则$d(x,x_0)=\alpha<r$，且$B(x;(r-\alpha)/2)$是含在$B(x_0;r)$内的x的一个邻域。(b)通过证明对于$y\notin\tilde{B}(x_0;r)$，存在一个含于$\tilde{B}(x_0;r)^c$中的以y为中心的球，证明$\tilde{B}(x_0;r)^c$是开的。

2．开区间(x_0-1,x_0+1)。中心在x_0，半径为1的开圆盘。$C[a,b]$上的一切连续函数其图象在铅直高为2的开带中。参见图$P1$。

3．$\sqrt{2}$。



图P1　习题2的C[a,b]中的开球B $(x_0,1)$

4．若A是这样的并，则对每个$a\in A$都有一开球$B\subset A$中并且B包含一个含a的球，于是A是开的。反之，A是开的，那么对每个$a\in A$，集A包含一个含有a的球，因此包含一个含有a的开球。从而A是开球之并。

5，(b)由于对任意的$a\in A$有开球$B(a;1/2)=\{a\}\subset A$，故任意子集$A\subset X$是开的。同样的道理，A^c是开的，故$^c(A^c)^c=A$是闭的。

6．若只有有限多个这样的点$y_1,y_2,\cdots,y_k$和x_0不同，那么对于$r=\min\{d(x_0,y_1),\cdots,d(x_0,y_k)\}$，球$B(x_0;r/2)$将不含$A$的点$y\neq x_0$。

7．(a)整数，(b)$\mathbf{R}$，(c)$\mathbf{C}$，(d)$\{z\mid |z|\leqslant 1\}$。

8．在含有不止一个点的离散度量空间X中，有

$$\{x_0\}=B(x_0;\ 1)=\overline{B(x_0;1)}\neq\tilde{B}(x_0;1)=X$$

9．(略)

10．若$a\in\overline{A}$，那么$x\in A$或x的每个邻域都含有A的点$a\neq x$；因此$D(x,A)=0$,反之，如果$D(x,A)=0$，那么$x\in A$或x的每个邻域必含有A的一个点$a\neq x$，于是$x\in\overline{A}$。

11．(a) $\{-1,\ 1\}$，(b)$\mathbf{R}$，(c)圆$\{z|\ |z|=1\}$。

12．$[a,b]$不是可数的，因此在$c\in[a,\ b]$点取值为1而在$[a,b]-\{c\}$上取值为0的一切函数所成之集不是可数的。而这些函数中的任意两个的距离都为1。因此$B[a,b]$不能包含可数的稠密集。

13．设X是可分的，则X有一个可数的稠密子集Y。令$x\in X$和$\varepsilon>0$给定，由于Y在X中稠密，故有$\overline{Y}=X$和$x\in\overline{Y}$，所以x的ε-邻域$B(x;\varepsilon)$含有一个$y\in Y$，且$d(x,y)<\varepsilon$。反过来，若X有一个具有问题中所给性质的可数子集Y，则每个$x\in X$要末是Y的一个点,要末是Y的一个聚点。因此$\overline{Y}=X$，故X是可分的。

14．设T是连续的且设A是任何闭集M的逆象，那么M^c的逆象是A^c。而且由1.3-4知它是开的，于是$A=(A^c)^c$是闭的。反之，若M有闭的逆象，那么M^c与A^c都是开的,于是由1.3-4知T是连续的。

15．$x(t)=\sin t$定义了一个连续映射$\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$，它把开集$(0,2\pi)$映到闭集$[-1,\ 1]$上。

§1.4

1．$d(x_n,x)<\varepsilon(n>N)$蕴含着$d(x_{n_k},x)<\varepsilon(n_k>N)$。

2．由假设，对于任意的$\varepsilon>0$存在N，使得对于一切$m,n_k>N$有

$$d(x_m,x_{n_k})<\frac{\varepsilon}{2},\quad d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}$$

因此，对$m>N$有

$$d(x_m,x)\leqslant d(x_m,x_{n_k})+d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

3．(略)

4．若(x_n)是柯西序列，那么存在n_0使得对一切$n>n_0$有$d(x_n,x_{n_0})<1$。因此对于一切n有

$$d(x_n,x_{n_0})<\max\{1,d(x_1,x_{n_0}),\cdots,d(x_{n_0-1},x_{n_0})\}$$

5．(略)

6．据三角不等式，有

$$a_n=d(x_n,y_n)\leqslant d(x_n,x_m)+d(x_m,y_m)+d(y_m,y_n)$$

在右边$d(x_m,y_m)=a_m$，故对任意的$\varepsilon>0$，存在N使得对于一切$m,n>N$ 有

$$|a_n-a_m|\leqslant d(x_n,x_m)+d(y_m,y_n)<\varepsilon$$

7.8．（略）

9．从$\tilde{d}(x,y)\leqslant\tilde{d}(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant 2\tilde{d}(x,y)$可推出所希望的结果。

10．若(z_n)是柯西序列，其中$z_n=x_n+iy_n$，则(x_n)和(y_n)在**R**中是柯西序列，这是由于

$$|x_m-x_n|\leqslant|z_m-z_n|,\ |y_m-y_n|\leqslant|z_m-z_n|$$

因此$x_n\longrightarrow x$，$y_n\longrightarrow y$。令$z=x+iy$，则$z_n\longrightarrow z$，因为

$$\begin{aligned}|z_n-z|&=|x_n-x+i(y_n-y)|\\&=|x_n-x|+|y_n-y|\longrightarrow 0\end{aligned}$$

§1.5

1．见1.4-7。

2．设(x_n)是柯西的，其中$x_m=(\xi_1^{(m)},\cdots,\xi_n^{(m)})$。则对于每个$\varepsilon>0$，存在$N$使得对满足$m,r>N$，$j=1,2,\cdots,n$的有

$$d(x_m,x_r)=\max_j|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(r)}|<\varepsilon$$

于是有

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(r)}|<\varepsilon$$

因此对于任意固定的j，序列$(\xi_j^{(1)},\xi_j^{(2)},\cdots)$在**R**中是柯西序列且收敛，不妨设$\xi_j^{(m)}\longrightarrow\xi_j$，并且定义$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则$x\in X$且在$\left|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(r)}\right|<\varepsilon$令$r\longrightarrow\infty$便有，$\left|\xi_j^{(m)}-\xi_j\right|\leqslant\varepsilon$ $(m>N)$，因此，$x_m\longrightarrow x$，证明了X是完备的。

3．(x_n)，其中$x_n=(1,1/2,1/3,\cdots,1/n,0,0\cdots,)$，是$M$中的柯西序列，因为$d(x_m,x_n)=1/(m+1)$，$m<n$，但$x_n\longrightarrow x=(1/n)\in X$，$x\notin M$。

4．$x=(1/n)\in\bar{M}$，但$x\notin M$。

5．X在**R**中是闭的，利用1.4-7。第二个证明。X中的一个柯西序列(x_n)的项从某项x_n起必定是相等的。

6．当$x_n=n$时，(x_n)没有极限但是为一个柯西序列，因为对于任意的m和$n>m>\cot\varepsilon$，有

$$\begin{aligned}d(m,n)&=\arctan n-\arctan m\\&=\arctan\frac{n-m}{1+mn}<\arctan\frac{1}{m}<\varepsilon\end{aligned}$$

7．一个不收敛的柯西序列是(x_n)，其中$x_n=n$。

8．对于任意的$x\in Y$，存在Y中的序列(x_n)使得$x_n\longrightarrow x$，参见1.4-6(a)。因此$x_n(a)\longrightarrow$

$x(a)$，$x_n(b)\longrightarrow x(b)$，于是$0=x_n(a)-x_n(b)\longrightarrow x(a)-x(b)$，且$x\in Y$，据1.4-7知 Y是完备的。

9．我们证明 x 在任意的$t=t_0\in[a,b]$是连续的。由于收敛是一致的，对每个 $\varepsilon>0$存在一个$N(\varepsilon)$使得对一切$t\in[a,b]$有

$$|x(t)-x_N(t)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

由于x_N在 t_0 是连续的，故存在一个 $\delta>0$使得对一切满足$|t-t_0|<\delta$的$t\in[a,b]$有

$$|x_N(t)-x_N(t_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

据三角不等式，对这些 t 有

$$\begin{aligned}|x(t)-x(t_0)|&\leqslant|x(t)-x_N(t)|+|x_N(t)-x_N(t_0)|+|x_N(t_0)-x(t_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

故 x 在 t_0 是连续的。

10．在这个空间中，一柯西序列必定从某一项起是常数且以此为极限收敛。

11．设$x_n\longrightarrow x$。取任一固定的 j，则对每个 $\varepsilon>0$存在一个N使得

$$\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}{1+|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}\leqslant d(x_n,\ x)<\frac{\varepsilon}{2^j(1+\varepsilon)},\ (n>N)$$

因此$|\xi_j^{(n)}-\xi_j|<\varepsilon(n>N)$，充分性的证明是很直接的。

12．设(x_n)是柯西序列，其中$x_n=(\xi_j^{(n)})$，则对任意固定的 j 及 $\varepsilon>0$，存在N使得对于$m,n>N$有

$$\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|}{1+|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|}\leqslant d(x_m,x_n)<\frac{\varepsilon}{2^j(1+\varepsilon)}$$

因此$|\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(m)}|<\varepsilon,(m,n>N)$。对固定的 j，$(\xi_j^{(m)})$，是柯西序列，于是$\xi_j^{(n)}\longrightarrow\xi_j$，且由习题11知有$x_n\longrightarrow x=(\xi_j)$。

13．通过直接计算，$d(x_m,\ x_n)=m^{-1}-n^{-1}\ (m<n)$。

14．取任一 $x\in X$，令$c=\max\{1,\ \max\limits_{t\in J}|x(t)|\}$，此处$J=[0,1]$，则对于$n\geqslant 2c$ 有

$$\begin{aligned}d(x_n,x)&=\int_0^1|x_n(t)-x(t)|dt\geqslant\int_0^{1/c^2}|x_n(t)-x(t)|dt\\&\geqslant\int_0^{1/c^2}(x_n(t)-c)dt\\&=\int_0^{1/n^2}(n-c)dt+\int_{1/n^2}^{1/c^2}(t^{-1/2}-c)dt\\&=\frac{1}{c}-\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2c}\end{aligned}$$

由于c是固定的，所以(x_n)不收敛于 x。而由于 x 是任意的，故不存在 $x\in X$ 使得柯西序列

(x_n)收敛于它。

15. 对每个$\varepsilon>0$存在一个N使得对于$n>m>N$有

$$d(x_n, x_m)=\sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{j^2}<\varepsilon$$

但(x_n)不收敛于任一$x=(\xi_j)\in X$，因为对于大于某一$\tilde{N}$的j有$\xi_j=0$，故对$n>\tilde{N}$有

$$d(x_n, x)=|1-\xi_1|+\left|\frac{1}{4}-\xi_2\right|+\cdots+\frac{1}{(\tilde{N}+1)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{(\tilde{N}+1)^2}$$

并且由于$\tilde{N}$是固定的，故$d(x_n, x)\longrightarrow 0$是不可能的。

§1.6

1. (略)

2. R

3. X

4. 在等距的情况下，X_1和X_2中的柯西序列彼此对应。

5. (b) R和具有R上度量的$(-1,1)$；一个同胚是$x\mapsto\frac{2}{\pi}\arctan x$。

6. 设$x\in c[0,1]$，令$y(\tau)=x\left(\frac{\tau-a}{b-a}\right)$与$x(t)$对应。

7. 若$\tilde{d}(x_m, x_n)<\varepsilon<\frac{1}{2}$，则

$$d(x_m, x_n)=\frac{\tilde{d}(x_m, x_n)}{1-\tilde{d}(x_m, x_n)}<2\tilde{d}(x_m, x_n)$$

因此若(x_n)在$(X, \tilde{d})$中是柯西序列，则它在(X, d)中也是柯西序列，并且它在(X, d)中的极限也是它在$(X, \tilde{d})$中的极限。

8. $\tilde{d}(x_m, x_n)\leqslant d(x_m, x_n)$，$(X, d)$中的柯西序列也是$(X, \tilde{d})$中的柯西序列，而后者收敛，且它在那里的极限就是它在(X, d)中的极限，因为如果$\tilde{d}(x, y)<\frac{1}{2}$，则有

$$d(x, y)=\frac{\tilde{d}(x, y)}{1-\tilde{d}(x, y)}<2\tilde{d}(x, y)$$

9. 当$n\longrightarrow\infty$时，$d(x_n', l)\leqslant d(x_n', x_n)+d(x_n, l)\longrightarrow 0$。

10. 当$n\longrightarrow\infty$时，$d(x_n, x_n')\leqslant d(x_n, l)+d(l, x_n')\longrightarrow 0$。

11. 若$(x_n)\sim(y_n)$和$(y_n)\sim(z_n)$，则从下式

$$d(x_n, z_n)\leqslant d(x_n, y_n)+d(y_n, z_n)\longrightarrow 0 \qquad (n\longrightarrow\infty)$$

能够看出$(x_n)\sim(z_n)$。

12. 对于每个$\varepsilon>0$存在N使得对一切$m, n>N$有$d(x_m', x_m)<\varepsilon/3$，$d(x_m, x_n)<\varepsilon/3$，$d(x_n, x_n')<\varepsilon/3$于是据三角不等式，对一切$m, n>N$有

$$d(x_m', x_n')<\varepsilon$$

13. (略)

14．(i)度量，(ii)伪度量。

15．宽度为2的开的垂直长条。

§2.1

1．（略）

2．我们有$0x+x=(0+1)x=x=\theta+x$，通过加$-x$可得（1a），此外有

$$\alpha x+\alpha\theta=\alpha(x+\theta)=\alpha x=\alpha x+\theta$$

通过加$-\alpha x$可得(1b)。公式(2)由下式得到：

$$x+(-1)x=1x+(-1)x=[1+(-1)]x=0x=\theta$$

3．平面$\xi_1=\zeta_2$

4．$(a),(d)$当$k=0$。

5．（略）

6．由$x=\sum\alpha_j e_j=\sum\beta_j e_j$可得$\sum(\alpha_j-\beta_j)e_j=0$及对$j=1,2,\cdots,n$，$\alpha_j-\beta_j=0$，因为$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是线性无关集。

7．$\{e_1,\cdots,e_n, ie_1,\cdots,ie_n\}$，$n,2n$。

8．不。对任一$x\neq0$，集$\{x,ix\}$相对于两种空间分别是线性相关和线性无关的。

9．$\{e_0,\cdots,e_n\}$，其中$e_j(t)=t^j$，$t\in[a,b]$。不是。

10．$Y\cap Z$是子空间，因为

$$x_1,x_2\in Y\cap Z\Longrightarrow x_1,x_2\in Y且x_1,x_2\in Z$$
$$\Longrightarrow\alpha x_1+\beta x_2\in Y,\ \alpha x_1+\beta x_2\in Z$$
$$\Longrightarrow\alpha x_1+\beta x_2\in Y\cap Z;$$

另一结论是显而易见的。

11．（略）

12．零矩阵；4维；例如

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

是；否。

13．（略）

14．不同的陪集作成X的一个分类，这是因为$v\in(w+Y)\cap(x+Y)\Longrightarrow v=w+y_1=x+y_2$，$y_i\in Y$，$\Longrightarrow\begin{cases}w=x+y_2-y_1\Longrightarrow w\in x+Y\\x=w+y_1-y_2\Longrightarrow x\in w+Y\end{cases}$；

我们证明X/Y中代数运算的定义不依赖于陪集中的代表的特殊选取。若不用w而用$w+w_0\in w+Y$作为$w+Y$的代表，则

$$w+w_0=w+y,\ y\in Y,\ 故w_0=y，从而w_0+Y=Y$$

这便看出陪集$(w+w_0+x)+Y$与$(w+x)+Y$是由相同的元素组成。标量乘法是类似的。

由于X/Y中的两种代数运算是用代表来定义的，所以这两种运算也服从X中的运算所服从的法则。此外，X/Y中的零元是Y且

$$(-x+Y)+(x+Y)=Y$$

15. 所有平行于ξ_1-轴的直线的集合；$\{0\}$；X。

§2.2

1.2.（略）

3. 据三角不等式和（$N3$）有

$$\|y\|=\|y-x+x\|\leqslant\|y-x\|+\|x\|$$
$$\|x\|=\|x-y+y\|\leqslant\|y-x\|+\|y\|$$

由此可得

$$\|y\|-\|x\|\leqslant\|y-x\|$$
$$\|y\|-\|x\|\geqslant-\|y-x\|$$

4. 我们有

$$\|0\|=\|0x\|=0\|x\|=0$$

由（$N3$）及（$N4$）可得（2），且当$x=0$时（2）蕴含着

$$0\leqslant\big|\,\|y\|\,\big|\leqslant\|y\|$$

5. （$N1$）至（$N3$）容易验证。在§1.2的闵可夫斯基不等式(12)中取$p=2$（只从1到n取和）便可推出（$N4$）。

6. （$N1$）至（$N3$）是显而易见的。对于$\|\cdot\|_1$，($N4$)可由关于数的三角不等式得到：

$$\|x+y\|_1=|\xi_1+\eta_1|+|\xi_2+\eta_2|$$
$$\leqslant|\xi_1|+|\eta_1|+|\xi_2|+|\eta_2|=\|x\|_1+\|y\|_1。$$

对于$\|\cdot\|_2$，（$N4$）通过直接计算便可验证：

$$0\leqslant(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1)^2\Rightarrow(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)^2\leqslant(\xi_1^2+\xi_2^2)(\eta_1^2+\eta_2^2)$$

$\Rightarrow(\xi_1+\eta_1)^2+(\xi_2+\eta_2)^2\leqslant[\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}+\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}]^2$等等。或应用§1.2的闵可夫斯基不等式(12)，且取$p=2$（仅对1和2取和）。对于$\|\cdot\|_\infty$，($N4$)可由下式看出：

$$\|x+y\|_\infty=\max\{|\xi_1+\eta_1|,\ |\xi_2+\eta_2|\}$$
$$\leqslant\max\{|\xi_1|+|\eta_1|,|\xi_2|+|\eta_2|\}$$
$$\leqslant\max\{|\xi_1|,\ |\xi_2|\}+\max\{|\eta_1|,\ |\eta_2|\}$$

7. （$N1$）至（$N3$）是显然的，而（$N4$）可从闵可夫斯基不等式（§1.2）推导出来。

8. （$N1$）至（$N3$）是明显的。对于$\|\cdot\|_1$及$\|\cdot\|_p$，（$N4$）可据§1.2的闵可夫斯基不等式（12）推得。而对于$\|\cdot\|_\infty$，（$N4$）可由下式推出：

$$\|x+y\|_\infty=\max_j|\xi_j+\eta_j|\leqslant\max_j(|\xi_j|+|\eta_j|)$$

$$\leqslant\max_j|\xi_j|+\max_j|\eta_j|=\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$$

9.10.（略）

11. $\|z\| = \|\alpha x+(1-\alpha)y\| \leqslant \alpha\|x\|+(1-\alpha)\|y\| \leqslant \alpha+(1-\alpha)=1$。

12. 集合$\{x\,|\varphi(x)\leqslant 1\}$不是凸的；例如$x=(1,0), y=(0,1), z=(x+y)/2=(1/2,1/2)$给出$\varphi(x)=\varphi(y)=1$，但$\varphi(z)=2$。

13. 它不满足(9b)。

14. $\tilde{d}$不满足(9b)。

15. 设M是有界的，不妨设$\delta(M)=\sup\limits_{x,y\in M}\|x-y\|=b<\infty$。考虑任一$x\in M$，取一固定的$x_0\in M$并置$c=b+\|x_0\|$，则有

$$\|x\|=\|x-x_0+x_0\|\leqslant\|x-x_0\|+\|x_0\|\leqslant b+\|x_0\|=c$$

反过来，设对每个$x\in M$有$\|x\|\leqslant c$，则对所有的$x,y\in M$有

$$\|x-y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\leqslant 2c \text{ 且 } \delta(M)\leqslant 2c。$$

§2.3

1.（略）

2. 设$x=(\xi_j)\in\bar{C}_0$和$x_n=(\xi_j^{(n)})\in C_0$，使得有$x_n\longrightarrow x$，则对于任意的$\varepsilon>0$，存在N使得对一切j，$n>N$有$\|x-x_n\|<\varepsilon/2$，$|\xi_j^{(n)}|<\varepsilon/2$，从而有

$$\begin{aligned}|\xi_j|&\leqslant|\xi_j-\xi_j^{(n)}|+|\xi_j^{(n)}|\\&\leqslant\sup_k|\xi_k-\xi_k^{(n)}|+|\xi_j^{(n)}|\\&=\|x-x_n\|+|\xi_j^{(n)}|<\varepsilon\end{aligned}$$

因此，$\xi_j\longrightarrow 0$。于是$x\in c_0$。

3. 例如，$x=(\xi_n)=(1/n)\in\bar{Y}$，但$x\notin Y$。

4. 设$\varepsilon>0$，则对于$\|x-x_0\|<\delta=\varepsilon/2$及$\|y-y_0\|<\delta$据（$N4$）有

$$\|(x+y)-(x_0+y_0)\|\leqslant\|x-x_0\|+\|y-y_0\|<\varepsilon$$

类似地据（$N3$），对充分小的正数$|\alpha-\alpha_0|$及$\|x-x_0\|$有

$$\begin{aligned}\|\alpha x-\alpha_0x_0\|&=\|(\alpha-\alpha_0)(x-x_0)+(\alpha-\alpha_0)x_0+\alpha_0(x-x_0)\|\\&\leqslant|\alpha-\alpha_0|\,\|x-x_0\|+|\alpha-\alpha_0|\,\|x_0\|+|\alpha_0|\,\|x-x_0\|<\varepsilon\end{aligned}$$

5. 从习题4可直接推出。

6. 设$x,y\in\bar{Y}$，据1.4-6(a)存在Y中的序列(x_n)，(y_n)使得$x_n\longrightarrow x, y_n\longrightarrow y$。由于$Y$是矢量空间，故$\alpha x_n+\beta y_n\in Y$；再据习题5知$\alpha x_n+\beta y_n\longrightarrow\alpha x+\beta y$。因此$\alpha x+\beta y\in\bar{Y}$。

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|y_n\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^2$收敛，但是

$$\sum_{j=1}^{n}y_j=s_n=(1,1/4,1/9,\cdots,1/n^2,0,0\cdots)\longrightarrow s\notin Y。$$

8. 设(s_n)是X中任一柯西序列，则对于每个$k\in N$都存在n_k使得$\|s_n-s_m\|<2^{-k}$，

$(m,n>n_k)$且对一切k可选取$n_{k+1}>n_k$，则(s_{n_k})是(s_n)的一个子例，并且是Σx_k的部分和序列，其中$x_1=s_{n_1}, x_k=s_{n_k}-s_{n_{k-1}}$因此有

$$\Sigma \|x_k\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| + \Sigma 2^{-k} = \|x_1\| + \|x_2\| + 1$$

于是Σx_k绝对收敛。据假设Σx_k收敛，不妨设$s_{n_k} \longrightarrow s \in X$。由于$(s_n)$是柯西序列，故$s_n \to s$，因为

$$\|s_n - s\| \leqslant \|s_n - s_{n_k}\| + \|s_{n_k} - s\|$$

又由于(s_n)是任意的，故证明了X是完备的。

9．由于对$m<n$有

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leqslant \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\|$$
$$\leqslant \|x_{m+1}\| + \|x_{m+2}\| + \cdots$$

故部分和序列(s_n)是柯西序列。

10．基元素的具有有理系数的一切线性组合所成之集是可数的，且在空间中稠密（对于复系数，“有理的”意味着实部与虚部皆为有理数。）

11．（略）

12．我们有

$$p(0)=p(0x)=0p(x)=0$$

还有

$$p(y)=p(y-x+x) \leqslant p(y-x)+p(x)$$
$$p(y)-p(x) \leqslant p(y-x) = |-1|\, p(x-y)$$

交换x与y的位置并乘以-1，则得

$$p(y)-p(x) \geqslant -p(y-x)$$

13．若$p(x)=p(y)=0$，则据$(N4)$，$(N3)$和$(N1)$有$p(\alpha x+\beta y)=0$。

由于对任一$v \in N$和$x \in X$有$p(v)=0$，而据$(N4)$又有$p(x)=p(x+v-v) \leqslant p(x+v)+0 \leqslant p(x)$，所以$\|\hat{x}\|_0$是唯一的。因为$p(0)=0$和$\|\hat{x}\|_0=0$蕴含着$p(x)=0$，故$(N2)$成立，因此$x \in N$，而$N$是$X/N$的零元。

14．$\|\hat{x}\|_0=0$当且仅当存在$\hat{x}$中的序列(x_n)满足$\|x_n\| \longrightarrow 0$，而它成立的充要条件是$0 \in \hat{x}$，因为$Y$是闭的，故$\hat{x}$是闭的。因此$\|\hat{x}\|=0$当且仅当$\hat{x}=Y$。三角不等式可由下式得到：

$$\|\hat{x}+\hat{y}\|_0 = \inf_{\substack{x\in\hat{x}\\ y\in\hat{y}}} \|x+y\| \leqslant \inf_{\substack{x\in\hat{x}\\ y\in\hat{y}}} (\|x\|+\|y\|)$$
$$= \inf_{x\in\hat{x}} \|x\| + \inf_{y\in\hat{y}} \|y\| = \|\hat{x}\|_0 + \|\hat{y}\|_0$$

类似地有$\|\alpha\hat{x}\|_0 = |\alpha|\,\|\hat{x}\|_0$。

15．$\|x\|=0 \Longleftrightarrow \|x_1\|_1=\|x_2\|_2 \Longleftrightarrow x=(0, 0)=0$。设$x=(x_1, x_2)$，$y=(y_1, y_2)$，则

$$
\begin{aligned}
\|x+y\| &= \max(\|x_1+y_1\|_1, \|x_2+y_2\|_2) \\
&\leqslant \max(\|x_1\|_1+\|y_1\|_1,\ \|x_2\|_2+\|y_2\|_2) \\
&\leqslant \max(\|x_1\|_1,\ \|x_2\|_2)+\mathrm{amx}(\|y_1\|_1,\ \|y_2\|_2) \\
&= \|x\|+\|y\|。
\end{aligned}
$$

§2.4

1.（略）

2. $1/\sqrt{2}$，$1/\sqrt{3}$。

3.（略）

4. 对于以原点为中心的开球，由不等式（3）可得$B(0;\ r)\subset B_0(0;\ r/a)$及$B_0(0;r)\subset B(0;\ br)$，这里的下标 0 对应着$\|\cdot\|_0$由于范数诱导的度量满足平移不变性，所以以任一点为中心的球都有类似的性质，从而由§1.3习题 4 可得到所希望的结论。

5.（略）

6. 因为$|\xi_j|^2\leqslant\max\limits_k|\xi_k|^2$，故有$\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_2\leqslant\sqrt{n}\ \|x\|_\infty$。

7. 设$e_1=(1,\ 0,\ \cdots;\ 0)$，$e_2=(0,1,0\cdots,0)$等等，据柯西-许瓦兹不等式(11)（§1.2)有

$$\|x\|\leqslant\sum|\xi_j|\ \|e_j\|\leqslant b\|x\|_2，其中b^2=\sum\|e_j\|^2。$$

8. 据§1.2中的柯西-许瓦兹不等式（11），再令$\eta_j=1$，并从 1 到 n 求和便得

$$\|x\|_1{}^2=(\sum|\xi_j|)^2\leqslant n\sum|\xi_j|^2=n\|x\|_2{}^2$$

另一不等式是平凡的。

9.（略）

10. 应用2.4-5，有

$$\|A\|_1=\sum_j\sum_k|\alpha_{jk}|,\ \|A\|_2=(\sum_j\sum_k|\alpha_{jk}|^2)^{1/2},$$

$$\|A\|_\infty=\max_{j,k}|\alpha_{jk}|。$$

§2.5

1.（略）

2. X含有一无穷序列(x_n)，$x_n\neq x_m$（$m\neq n$）由于$d(x_n,\ x_m)=1$，故它不能有收敛的子列。

3.（略）

4. 若条件不成立，则有$k=k_0$ 存在使得对每个γ_{k_0}，有$x=x(\gamma_{k_0})\in M$满足$|\xi_{k_0}(x)|>\gamma_{k_0}$。因此对于$\gamma_{k_0}=n$存在$x=x_n\in M$使得$|\xi_{k_0}(x_n)|>n$。序列$(x_n)$不能有收敛的子列，因为由$x_{n_j}\longrightarrow x$将导致$\xi_{k_0}(x_{n_j})\longrightarrow\xi_{k_0}(x)$，而$|\xi_{k_0}(x_{n_j})|>n_j$。因此$M$不是紧的。

5.（略）

6. X是它的任意一点的紧邻域。

7．设 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 是 Y 的一基。又设 $y_k = \sum \alpha_{kl} b_l \in Y$ 且 $\|y_k - v\| \longrightarrow a$。则诸 α_{kl} 组成一有界集（见引理2.4-1）且 (y_k) 有一子序列 (y_{k_j}) 对每个 $l=1, \cdots, n$ 满足 $\alpha_{k_j l} \longrightarrow \alpha_l$，我们还有

$$\tilde{y} = \sum \alpha_l b_l \in Y, \quad \|v - \tilde{y}\| \leqslant \|v - y_{k_j}\| + \sum |\alpha_{k_j l} - \alpha_l| \, \|b_l\|$$

它蕴含着 $\|v - \tilde{y}\| = a$。重复引理的证明，并用等式 $\|v - \tilde{y}\| = a$ 代替（1），则得出 $\tilde{z} = \|v - \tilde{y}\|^{-1}(v - \tilde{y})$ 对每个 $y \in Y$ 都满足 $\|\tilde{z} - y\| \geqslant 1$。

8．由 $h(x) = \|x\|$，$x \in X$ 所定义的 h 是连续的（§2.2）由2.5-3知单位球 $M \subset (X, \|\cdot\|_2)$ 是紧的，因此 h 在 M 上取得最小值（据2.5-7），不妨设对一切 $y \in M$ 有

$$a = h(y_0) = \min_{\|z\|_2 = 1} h(z) \leqslant h(y)$$

显然 $a > 0$，否则将有 $y_0 = 0$，这将导致 $y_0 \notin M$。对于任意的 $x \neq 0$，有 $y = \|x\|_2^{-1} x \in M$，且

$$a \leqslant h(y) = \|x\|_2^{-1} \|x\| \Longleftrightarrow a \|x\|_2 \leqslant \|x\|$$

9．由于 X 是紧的，故 M 中任一序列 (x_n) 有一个在 X 中收敛的子序列 (x_{n_k})，不妨设 $x_{n_k} \longrightarrow x \in X$，而据1.4-6(a)知 $x \in \bar{M}$，又由于 M 是闭的，故 $x \in M$。因此 M 是紧的。

10．设 M 是 X 的任意闭子集，则据习题9知 M 是紧的，并且据2.5-6知 $T(M)$ 是紧的。于是据2.5-2知 $T(M)$ 是闭的。因此 T^{-1} 是连续的（见§1.3习题14）并且是一个同胚。

§2.6

1．（略）

2．到 ξ_1 轴上的投影，到 ξ_2 轴上的投影。关于直线 $\xi_1 = \xi_2$ 的反射。若 $\gamma > 1$，则是均匀膨胀；若 $\gamma = 1$，则是单位算子；若 $0 < \gamma < 1$，则是均匀收缩；若 $\gamma = 0$ 则是零算子；若 $-1 < \gamma < 0$，则是均匀收缩与关于原点的反射的结合，等等。

3．定义域是 $\mathbf{R}^2$。值域是 ξ_1-轴，ξ_2-轴，$\mathbf{R}_2$。零空间是 ξ_2-轴，ξ_1-轴，原点。

4．若 $\gamma = 0$，则是 $\mathbf{R}^2$；若 $\gamma \neq 0$，则是 $\{0\}$。零矢量和一切与该固定矢量平行的矢量。零矢量和一切与 a 正交的矢量。$x(t) = K = \text{const}$。

5．设 Tx_1，$Tx_2 \in T(V)$，则 $x_1, x_2 \in V$，$\alpha x_1 + \beta x_2 \in V$。因此 $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 \in T(V)$。

设 x_1, x_2 落在逆象之中，则 $Tx_1, Tx_2 \in W$，$\alpha T x_1 + \beta T x_2 \in W$，$\alpha T x_1 + \beta T x_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$，故 $\alpha x_1 + \beta x_2$ 是该逆象的元。

6．（略）

7．否，几何上也是显而易见的。

8．$y = Ax$。这里的 x 及 y 是有两个分量的列矢量且 A 等于

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9．（略）

10．$N(T) = \{0\}$

11．b 是非奇异的（$\det b \neq 0$）。

12．否，根据2.6-10(a)。

13．否则，若对某一$\alpha_j \neq 0$有$\alpha_1 Tx_1 + \cdots + \alpha_n Tx_n = 0$，则由于$T^{-1}$存在且为线性的，故

$$T^{-1}(\alpha_1 Tx_1 + \cdots + \alpha_n Tx_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n = 0$$

这说明 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是线性相关的，从而导出矛盾。

14．设$\mathscr{R}(T) = Y$，$\{y_1, y_2, \cdots y_n\}$ 是Y的一个基，并设x_j满足$y_j = Tx_j$，则由于$\sum \alpha_j x_j = 0$导致了$T(\sum \alpha_j x_j) = \sum \alpha_j y_j = 0$及$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$，故说明$\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$是$X$的基。若$x = \sum \beta_j x_j$且$Tx = 0$，则$Tx = \sum \beta_j Tx_j = \sum \beta_j y_j = 0$，$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$，$x = 0$ 。而由2.6-10(a)知T^{-1}存在，逆命题可由2.6-10(c)得到。

15．由于对每个$y \in X$有$y = Tx$，其中

$$x(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau$$

故$\mathscr{R}(T) = X$。由于对每个常数函数有$Tx = 0$，所以T^{-1}不存在。这说明在习题14中有限维性是不可少的。

§2.7

1．我们有

$$\|T_1 T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1 T_2 x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|T_1\| \|T_2 x\|$$
$$= \|T_1\| \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\| = \|T_1\| \|T_2\|。$$

2．设$B \subset X$有界，不妨设$\|x\| < k$对一切$x \in B$成立。若T有界，则$\|Tx\| \leqslant \|T\| \|x\| < \|T\| k$。于是$T(B)$是有界的。反之，假设$T$将有界集映成有界集，则单位球$M = \{x \mid \|x\| = 1\}$的象$T(M)$是有界的，不妨设对一切$x \in M$有$\|Tx\| < c$，并且证明了$T$是有界的，见（4）。

3．据假设$\|x\| = \gamma < 1$，而据（3），$\|Tx\| \leqslant \|T\| \gamma < \|T\|$。

4．设T在x_0处连续，考虑任一$x \in \mathscr{D}(T)$。设$x_n \longrightarrow x$，其中$x_n \in \mathscr{D}(T)$，则$x_n - x + x_0 \longrightarrow x_0$。由于$T$是线性的，且在$x_0$处连续，故据定理1.4-8可得

$$Tx_n - Tx + Tx_0 = T(x_n - x + x_0) \longrightarrow Tx_0$$

从而$Tx_n \longrightarrow Tx$，由1.4-8知T在x处连续。

5．$\|T\| = 1$。

6．令$y_n = (\eta_j^{(n)}) = Tx_n$，$x_n = (\xi_j^{(n)})$，$\xi_j^{(n)} = n\sqrt{j}/(n+j)$，则$x_n \in l^\infty$，$\xi_j^{(n)} \longrightarrow \xi_j = \sqrt{j}$，并且有

$$\eta_j^{(n)} = n/[(n+j)\sqrt{j}] \longrightarrow \eta_j = 1/\sqrt{j}$$

$y_n \in \mathscr{R}(T)$，$y = (\eta_j) \in \overline{\mathscr{R}(T)}$，但$y \notin \mathscr{R}(T)$，因为有$x = (\sqrt{j}) \notin l^\infty$。

7．设$Tx = 0$，则$0 = \|Tx\| \geqslant b\|x\|$，$\|x\| = 0$，$x = 0$，故据2.6-10($a$)知$T^{-1}$存在，且因$\mathscr{R}(T) = Y$有$T^{-1}$：$Y \longrightarrow X$。设$y = Tx$，则$T^{-1}y = x$且从下式

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leqslant \frac{1}{b} \|Tx\| = \frac{1}{b} \|y\|$$

推出T^{-1}是有界的。

8. 令$y_n=(\eta_j^{(n)})$，$\eta_j^{(n)}=n/[(n+j)\sqrt{j}]$，

$T^{-1}y_n=x_n=(\xi_j^{(n)})=(j\eta_j)=(n\sqrt{j}/(n+j))$

则$\|y_n\|<1$，$\|x_n\|=\sqrt{n}/2$，当$n\longrightarrow\infty$时，$\|x_n\|/\|y_n\|\longrightarrow\infty$。

9. $[0,1]$上的满足$y(0)=0$的一切连续可微函数y构成的子空间。$T^{-1}y=y'$；T^{-1}是线性的，但是无界的，因为$|(t^n)'|=n|t^{n-1}|$蕴含着$\|T^{-1}\|\geqslant n$，也可参看2.7-5。

10. 否；1；1；1/2；1。

11. 是；是。

12. 为证明第二个结论，只需注意到，由下式

$$\|Ax\|_2=\max_j\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k\right|$$

$$\leqslant\max_j\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{jk}|\max_m|\xi_m|=\|A\|\,\|x\|_1$$

可得到

$$\sup[\|Ax\|_2/\|x\|_1]\leqslant\|A\|$$

还有$\|Ax_0\|_2/\|x_0\|_1=\|A\|$对$x_0=(\xi_k^{(0)})$成立，其中

$$\xi_k^{(0)}=\begin{cases}|\alpha_{sk}|/\alpha_{sk}, & \alpha_{sk}\neq 0\\ 0 & ,\ \alpha_{sk}=0\end{cases}$$

这里s是j的一切值中使$\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{jk}|$达到最大者。事实上，$\|x_0\|_1=1$，并且

$$\|Ax_0\|_2/\|x_0\|_1=\|Ax_0\|_2=\max_j\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k^{(0)}\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{sk}|=\|A\|$$

13. 第一个论断从2.7-7中最后一个公式可以推出。为证明第二个论断，只要考虑单位矩阵就行了。

14. 我们有

$$\|Ax\|_2=\sum_{j=1}^{r}\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k\right|\leqslant\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{jk}|\,|\xi_k|$$

$$\leqslant\max_k\sum_{j=1}^{r}|\alpha_{jk}|\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|=\|A\|\,\|x\|_1$$

15. 设$\|\cdot\|_0$是自然范数。据习题14知

$$\|A\|_0=\sup_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_2\leqslant\|A\|$$

情况$\|A\|=0$是显而易见的。若$\|A\|>0$，则存在$k=s$使得

$$\|A\|=\max_k\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{jk}|=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{js}|$$

我们选定$x=(\xi_j)$，其中

$$\xi_j=\begin{cases}1 & ,\ j=s\\ 0 & ,\ j\neq s\end{cases}$$

则$\|x\|_1=1$，并且$\|Ax\|_2=\sum|\alpha_{j,}|=\|A\|$，因此证明了$\|A\|_0=\|A\|$。

§2.8

1.2.（略）

3. 2。

4. 由于

$$f_1(x+y)=\max[x(t)+y(t)]\leqslant\max x(t)+\max y(t)$$

所以不是线性的。而由于

$$|f_1(x)|=|\max\ x(t)|\leqslant\max|x(t)|=\|x\|$$

所以是有界的。对于f_2类似的证明。

5. 是的，$\|f\|=1$。

6. 从下式

$$\begin{aligned}\|x+y\|&=\max|x(t)+y(t)|+\max|x'(t)+y'(t)|\\&\leqslant\max|x(t)|+\max|y(t)|+\max|x'(t)|+\max|y'(t)|\\&=\|x\|+\|y\|\end{aligned}$$

便推出三角不等式。f是线性的。由于

$$|f(x)|=|x'(c)|\leqslant\max|x(t)|+\max|x'(t)|=\|x\|$$

所以f在$c'[a,b]$上是有界的。f在该子空间上不是有界的，因为对每个$n\in N$都存在$[a,b]$上的一个x_n，使得$x_n'(c)=1$且$\max|x_n(t)|<1/n$，于是便有

$$\sup_x\frac{|f(x)|}{\|x\|}\geqslant\frac{f(x_n)}{\|x_n\|}=\frac{|x_n'(c)|}{\max\limits_t|x_n(t)|}>n$$

7. $g=\bar{f}$是有界的，但不是线性的，因为$g(\alpha x)=\overline{f(\alpha x)}=\bar{\alpha}g(x)$。

8. $\mathscr{N}(M^*)=\bigcap\limits_{f\in M^*}\mathscr{N}(f)$，且每个$\mathscr{N}(f)$都是一个矢量空间。

9. 设$\alpha=f(x)/f(x_0)$及$y=x-\alpha x_0$，则有$x=y+\alpha x_0$且$f(y)=f(x)-\alpha f(x_0)=0$，故$y\in\mathscr{N}(f)$。唯一性：令$y+\alpha x_0=\tilde{y}+\bar{\alpha}x_0$，则$y-\tilde{y}=(\bar{\alpha}-\alpha)x_0$。因此$\bar{\alpha}=\alpha$，否则便有

$$x_0=(\bar{\alpha}-\alpha)^{-1}(y-\tilde{y})\in\mathscr{N}(f)$$

从而出现矛盾。故也有$y=\tilde{y}$。

10. 我们有

$$\begin{aligned}x_1,x_2\in Z\in X/\mathscr{N}(f)&\Leftrightarrow x_1-x_2\in\mathscr{N}(f)\\&\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)=0\end{aligned}$$

由于$f\neq0$，故有$X/\mathscr{N}(f)\neq\{0\}$。由此可知

$$\operatorname{codim}\mathscr{N}(f)=\dim(X/\mathscr{N}(f))>0$$

若$Z_1, Z_2 \in X/\mathcal{N}(f)$ 且$\alpha_j x_0 \in Z_j$，$j=1,2$，则

$$\alpha_2(\alpha_1 x_0)-\alpha_1(\alpha_2 x_0)=0,\quad \alpha_2 Z_1-\alpha_1 Z_2=0$$

其中$\alpha_1 \neq 0$或$\alpha_2 \neq 0$，于是$\{Z_1,\ Z_2\}$ 是线性相关的，并且$\dim(X/\mathcal{N}(f))\leqslant 1$。

11．据习题9有$x=y+[f_1(x)/f_1(x_0)]x_0$ 。由于 $y\in\mathcal{N}(f_1)=\mathcal{N}(f_2)$，故$f_2(y)=0$，这说明成比例：

$$f_2(x)=f_1(x)f_2(x_0)/f_1(x_0)$$

12.若对于x有$f(x)=\beta\neq 0$，则对于$x_0=\beta^{-1}x$有$f(x_0)=1$，而由习题9知，任何$x\in H_1$都有表示$x=x_0+y$，此处$y\in\mathcal{N}(f)$。

13．对于$y_0\in Y$的假设$f(y_0)=\gamma\neq 0$给出这样一个矛盾：任一

$$\alpha=\frac{\alpha}{\gamma}f(y_0)=f\left(\frac{\alpha}{\gamma}y_0\right)\in f(Y)$$

14.设$x\in H_1$，则$1=|f(x)|\leqslant\|f\|\,\|x\|$，因此便有$\|x\|\geqslant 1/\|f\|$，且$\tilde{d}\geqslant 1/\|f\|$。对于任一$\varepsilon>0$都存在一个$x\in H_1$满足

$$\frac{f(x)}{\|x\|}=\frac{1}{\|x\|}>\|f\|-\varepsilon,$$

于是$\|x\|<1/(\|f\|-\varepsilon)$。因此$\tilde{d}\leqslant 1/\|f\|$，从而得到$\tilde{d}=1/\|f\|$。

15．若$\|x\|\leqslant 1$，则$f(x)\leqslant|f(x)|\leqslant\|f\|\,\|x\|\leqslant\|f\|$，但是$\|f\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|$又表明，对任一$\varepsilon>0$都存在一个$x$，且$\|x\|\leqslant 1$并满足$f(x)>\|f\|-\varepsilon$。

§2.9

1．$\{\alpha x_0 \mid \alpha\in\mathbf{R},\ x_0=(2,4,-7)\}$

2．$\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$；ξ_3-轴；$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$。

3．$f_1=(1,0,0)$，$f_2=(0,1,0)$，$f_3=(0,0,1)$。

4．1/2，0，1/2。

5．n或$n-1$。

6．例如$e_1=(1,0,1)$，$e_2=(0,1,1)$。

7．$(\alpha_2,-\alpha_1,0)$，$(\alpha_3,0,-\alpha_1)$。

8．存在Z的基$\{e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}\}$使得$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是$X$的基。令$\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$是$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$的对偶基，则$f_n(x)=0$当且仅当$x\in Z$。

9．（略）

10.设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是X的基且使得$\{e_1,\cdots,e_q\}$是Z的基，并且$e_{q+1}=x_0$，则$f=f_{q+1}$，此处$\{f_1,\cdots,f_n\}$是对偶基，事实上，$f(x_0)=1$，$f(e_j)=0$，$j=1,2,\cdots,q$。

11．否则，对一切$f\in X^*$有$f(x)-f(y)=f(x-y)=0$，并且据2.9-2有$x-y=0$，从而导出矛盾。

12. 设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是$X$的基，且使得$\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$是对偶基，这里$g_k = f_k$，$k = 1, 2, \cdots, q$ $(q \leqslant p)$，且$\{f_1, f_2, \cdots, f_q\}$是$\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$的一个最大线性无关子集，若有必要可适当地重新编序。则$f_j(x) = 0$，$j = 1, 2, \cdots, p$，此处$x = e_n$。n个未知数和$p(<n)$个线性方程构成的齐次方程组有非平凡解。

13. 设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是X的基且使得$\{e_1, \cdots, e_p\}$是z的基，$p<n$，又令$\{f_1, \cdots, f_n\}$是对偶基。设

$$\tilde{f} = \sum_{j=1}^{p} f(e_j) f_j$$

则$\tilde{f}(e_k) = f(e_k)$，$k = 1, \cdots, p$，因此$\tilde{f}|_z = f$ 。

14. $\tilde{f}(x) = 4\xi_1 - 3\xi_2 + \alpha_3\xi_3$。

15. $\tilde{f}(x) = \xi_1/2 + k\xi_2 - \xi_3/2$。是的。

§2.10

1. 零算子0：$X \longrightarrow \{0\} \in Y$。算子$-T$。

2. $\mathscr{D}(h)$是矢量空间，因为它是两个矢量空间之交。由于

$$\begin{aligned} h(\kappa x + \lambda y) &= \alpha f(\kappa x + \lambda y) + \beta g(\kappa x + \lambda y) \\ &= \kappa(\alpha f(x) + \beta g(x)) + \lambda(\alpha f(y) + \beta g(y)) \\ &= \kappa h(x) + \lambda h(y) \end{aligned}$$

故h是线性的。由于

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(h) \\ \|x\|=1}} |h(x)| &= \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(h) \\ \|x\|=1}} |\alpha f(x) + \beta g(x)| \\ &\leqslant |\alpha| \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)| + |\beta| \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(g) \\ \|x\|=1}} |g(x)| \\ &= |\alpha| \, \|f\| + |\beta| \, \|g\| < \infty \end{aligned}$$

故h是有界的。

3. $\mathscr{D}(\alpha T_1 + \beta T_2) = \mathscr{D}(T_1) \cap \mathscr{D}(T_2)$；两个值域必定落在同一空间中。

4. 若M是给定的球，则它位于$\bar{B} = \{x \mid \|x\| \leqslant r\}$中，并由$T_n \longrightarrow T$可知，对每个$\varepsilon > 0$都存在一个$N$，使得$\|T_n - T\| < \varepsilon/r$ $(n > N)$。因此，对于一切$n > N$及$x \in \bar{B}$都有

$$\|T_n x - Tx\| \leqslant \|T_n - T\| \, \|x\| < \varepsilon$$

5. （略）

6. $\|f\| = \sum |f_j|$，其中$f_j = f(e_j)$，$\{e_1, \cdots, e_n\}$是X的一个基，因为$x = (\xi_j) = \sum \xi_j e_j$和

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(\sum \xi_j e_j)| = |\sum \xi_j f_j| \\ &\leqslant (\sum |f_j|) \max_k |\xi_k| = (\sum |f_j|) \|x\|。 \end{aligned}$$

于是$\|f\| \leqslant \sum |f_j|$，而且等号一定成立，因为对于$x = x_0$及

$\xi_j = 1$ ，当$f_j \geqslant 0$时

$\xi_j = -1$，当$f_j < 0$时

有 $\|x_0\|=1$，$f_j\xi_j=|f_j|$，并且

$$|f(x_0)|=|\sum f_j\xi_j|=\sum|f_j|=(\sum|f_j|)\|x_0\|$$

因此

$$\|f\|\geqslant\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}=\sum|f_j|。$$

7．在用 $\|x\|_1=\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|$ 赋予范数的X上，线性泛函f若表示为$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\xi_j$，则有范数

$$\|f\|=\max_j|\alpha_j|$$

8．利用$e_k=(\delta_{kj})$，对于某一$f\in C_0'$，有

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\gamma_k,\quad \gamma_k=f(e_k)$$

现令$x_n=(\xi_k^{(n)})$如下：

$$\xi_k^{(n)}=\begin{cases}|\gamma_k|/\gamma_k, & k\leqslant n\text{且}\gamma_k\neq0\\ 0 & k>n\text{或}\gamma_k=0\end{cases}$$

则有 $\|x_n\|\leqslant1$，并且

$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}\gamma_k=\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|\geqslant\|x\|\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|$$

因此对每个n，有

$$\|f\|\geqslant\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|$$

令$n\longrightarrow\infty$便可看出$(\gamma_k)\in l^1$及

$$(A)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|\leqslant\|f\|$$

反之，对任一$b=(\beta_k)\in l^1$，若令

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\beta_k,\quad x\in C_0$$

则可得C_0上的相应的有界线性泛函g。事实上，g的线性性是显而易见的。又由于

$$|g(x)|\leqslant\sum|\xi_k\beta_k|\leqslant\sup_j|\xi_j|\sum|\beta_k|=\|x\|\|b\|$$

故g是有界的。f的范数是

$$\|f\|=\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|$$

这可从(A)及 $|f(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k\gamma_k|\leqslant\|x\|\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|$ 得到。

9. （略）

10. 设$B=(e_\alpha)$是X的哈梅尔基，且设$M=(e_n)\subset B$是可数无限集。不失一般性可设$\|e_n\|=1$。取一固定的$y\in Y$且$y\neq 0$，用下面关系式定义T：

$$Te_n=ny,\ Te_\alpha=0,\ 若e_\alpha\in B-M$$
$$Tx=\xi_1Te_{\alpha_1}+\cdots+\xi_mTe_{\alpha_m},$$

其中$x=\xi_1e_{\alpha_1}+\cdots+\xi_me_{\alpha_m}$，则$\|Te_n\|=n\|y\|=(n\|y\|)\|e_n\|$这便证明了$T$是无界的。

11. 在习题10中取$Y=\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$，再利用其结果。

12. 据2.10-4。$\mathbf{R}^n$的完备性据2.10-5可以得到。l^∞的完备性可据2.10-6推出。而$l^q(1<q<+\infty)$的完备性由2.10-7可在推出。

13. 若$f\in\overline{M^a}$，则在M^a中存在序列(f_n)使得$f_n\longrightarrow f$。对任一$x\in M$，我们有$f_n(x)=0$，并且$f(x)=0$，故$f\in M^a$，因此M^a是闭的。$\{0\}$，X'。

14. 设$\{e_1,\cdots,e_m\}$是M的一个基，$\{e_1,\cdots,e_m,\cdots,e_n\}$是$X$的一个基，$\{f_1,\cdots,f_n\}$是其对偶基。又令$Y'=\mathrm{span}\{f_{m+1},\cdots,f_n\}$，$x\in M$，则$x=\xi_1e_1+\cdots\xi_me_m$且

$$f_j(x)=f_j\Big(\sum_{k=1}^{m}\xi_ke_k\Big)=\sum_{k=1}^{m}\xi_kf_j(e_k)=0,\ j=m+1,\cdots,n$$

这就证明了$f_j\in M^a(j=m+1,\cdots,n)$且$Y'\subset M^a$。

现在证明$M^a\subset Y'$。为此设$f\in M^a$，那么有$f\in X'$，$f=\alpha_1f_1+\cdots+\alpha_nf_n$，且有

$$0=f(e_k)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_jf_j(e_k)=\alpha_k,\ k=1,2,\cdots,m$$

因此$f\in Y'$，从而证明了$M^a\subset Y'$。

含n个未知数和m个独立的齐次线性方程的方程组，其所有解$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$构成的集合为一个n-m维的矢量空间。

15. $(1,1,1)$

§3.1

1. 我们得到

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2&=\langle x+y,\ x+y\rangle+\langle x-y,\ x-y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\&\quad+\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\&=2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle\\&=2\|x\|^2+2\|y\|^2\end{aligned}$$

2. $\|\sum x_j\|^2=\sum\|x_j\|^2$

3. 据假设

$$\begin{aligned}0&=\langle x+y,\ x+y\rangle-\|x\|^2-\|y\|^2\\&=\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle=\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle}\\&=2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle。\end{aligned}$$

4．若平行四边形的边相等，则对角线互相垂直。$\mathrm{Re}\langle x+y,\ x-y\rangle=0$。

5．（略）

6．(a)否则，便有

$y=\alpha x$，$0=\langle x,y\rangle=\bar{\alpha}\|x\|^2$，$\alpha=0$，$y=0$，从而导出矛盾。

(b)设$\sum\alpha_j x_j=0$，则

$$0=\langle 0,\ x_k\rangle=\langle\sum\alpha_j x_j,\ x_k\rangle=\alpha_k\|x_k\|^2$$

且对一切k有$\alpha_k=0$。

7．$\langle x,u-v\rangle=0$；取$x=u-v$。

8．直接计算便得。

9．直接计算便得。

10．$z_1=0$或$z_2=0$。

11．否；参见3.1-7。

12．(a) 1。(b) $\sqrt{\sum n^{-2}}=\pi/\sqrt{6}$。

13．（略）

14．$t=(b-a)\tau+a$。注意$y(t)=\tilde{y}(\tau)$参见3.1-8。

15．否，$\gamma_{jk}=\langle e_j,e_k\rangle=\overline{\langle e_k,e_j\rangle}=\bar{\gamma}_{kj}$。

§3.2

1．对于矢量$x\neq0$和$y\neq0$，其点积是

$$x\cdot y=|x||y|\cos\theta，因此 |x\cdot y|\leqslant|x||y|。$$

2．（略）

3．参见3.2-4(b)。是。否。

4．参看引理3.2-2。

5．我们有

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|^2&=\langle x_n-x,\ x_n-x\rangle\\&=\|x_n\|^2-\langle x_n,\ x\rangle-\langle x,x_n\rangle+\|x\|^2\\&\longrightarrow2\|x\|^2-2\langle x,x\rangle=0\end{aligned}$$

6．记$x_n=z_n$，$x=z$。若$z=0$，则据第一个条件有$z_n\longrightarrow0$；若$z\neq0$，则据第二个条件有

$$\langle z_n,\ z\rangle=z_n\bar{z}\longrightarrow\langle z,\ z\rangle=z\bar{z}。故z_n\longrightarrow z。$$

7．从

$$\langle x\pm\alpha y,\ x\pm\alpha y\rangle=\|x\|^2\pm\bar{\alpha}\langle x,y\rangle\pm\alpha\langle y,x\rangle+|\alpha|^2\|y\|^2$$

我们看到正交性蕴含着给定的条件。反之，给定的条件蕴含着

$$\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\alpha\langle y,x\rangle=0$$

若空间是实的，则取$\alpha=1$；若空间是复的，取$\alpha=1$，$\alpha=i$，便可看出$\langle x,y\rangle=0$。

8．若条件成立且$y\neq0$，则取$\alpha=-\langle x,y\rangle\|y\|^{-2}$便得到

$$\langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle - \|x\|^2$$
$$= \bar{\alpha}\langle x, y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2$$
$$= -|\langle x,y\rangle|^2\|y\|^{-2} = 0$$

且$x\perp y$。反过来是显然的。

9. 利用定理1.4-8和

$$\|x\|_2^2 = \int_a^b |x(t)|^2 dt \leqslant (b-a)\|x\|_\infty^2$$

10. 我们有 $\langle Tx,x\rangle = 0$， $\langle Ty,y\rangle = 0$，因此有

$$0 = \langle T(x+y), x+y\rangle = \langle Tx,y\rangle + \langle Ty,x\rangle$$

用iy代替y并乘以i，便得

$$0 = i[\langle Tx,iy\rangle + \langle iTy,x\rangle] = \langle Tx,y\rangle - \langle Ty,x\rangle$$

与上式相加便得 $\langle Tx,y\rangle = 0$；取$y=Tx$，又得$\|Tx\|^2=0$，从而对一切x有$Tx=0$。

在实的情形，若旋转角是90°，则$\langle Tx,x\rangle = 0$。

§3.3

1．据假设和§3.1中平行四边形等式(4)，我们可得到

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x_n + x_m\|^2$$
$$\leqslant 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - 4d^2$$

故(x_n)是柯西序列。

2．M是闭的，因为对于$w=(\omega_i)\in M$，在M中有序列(y_m)满足$y_m=(\eta_i^{(m)})\longrightarrow w$，且由$\sum\eta_i^{(m)}=1$可得到$\sum\omega_i=1$，于是$w\in M$。因此据1.4-7知$M$是完备的。

M是凸的。事实上，若$y\in M$，$z=(\zeta_i)\in M$，$\alpha\in[0, 1]$，则由

$$\sum[\alpha\eta_i + (1-\alpha)\zeta_i] = \alpha\sum\eta_i + (1-\alpha)\sum\zeta_i = 1$$

知$\alpha y+(1-\alpha)z\in M$。此外，$y=(1/n,\cdots,1/n)$在$M$中有最小范数。

3. (略)

4．(*a*)M是凸的，且据1.4-7知M是完备的。

(*b*)在§3.1习题5中令$z=x$，$x=y_m$，$y=y_n$便得

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(y_m+y_n)\|^2$$
$$\leqslant 2(\delta_m^2 + \delta_n^2) - 4\delta^2$$

5. (*a*) $\{z\,|\,z=\alpha(\xi_2, -\xi_1), \alpha\in\mathbf{R}\}$，(*b*) $\{0\}$。

6. $\{x\in l^2\,|\,\xi_{2n-1}=0, n\in N\}$；

$\{x\in l^2\,|\,\xi_j=0, j=1,2,\cdots,n\}$

7. (*a*) $x\in A\Rightarrow x\perp A^\perp\Rightarrow x\in A^{\perp\perp}\Rightarrow A\subset A^{\perp\perp}$

(*b*) $x\in B^\perp\Rightarrow x\perp B\supset A\Rightarrow x\in A^\perp\Rightarrow B^\perp\subset A^\perp$

(c) 据(a) $A^{\perp\perp\perp}=(A^{\perp})^{\perp\perp}\supset A^{\perp}$；而据(b)有$A\subset A^{\perp\perp}\Rightarrow A^{\perp}\supset(A^{\perp\perp})^{\perp}$

8. $M^{\perp}$是一个矢量空间，参见课文。$M^{\perp}$是闭的，因为对一切$v\in M$及$x\in\overline{M^{\perp}}$有 $x_n\in M^{\perp}$满足$x_n\longrightarrow x$（见1.4-6）且据3.2-2有 $\langle x_n, v\rangle\longrightarrow\langle x,v\rangle$。

9. 设$Y=Y^{\perp\perp}=(Y^{\perp})^{\perp}$，则据习题8知$Y$是闭的。其逆在引理3.3-6中曾陈述过。

10. 由(8*)知$M\subset M^{\perp\perp}$，而据习题8知$M^{\perp\perp}$是闭子空间。考察任一子空间$Y\subset M$，则由习题7(b)知有$Y^{\perp}\subset M^{\perp}$及$Y^{\perp\perp}\supset M^{\perp\perp}$，再据(8)有$Y=Y^{\perp\perp}$。

§3.4

1. 这是格拉姆-施密特过程的一个直接结果。

2. 对于矢量$x\in\mathbf{R}^r$，x在n个互相正交的方向上的分量的平方和不得超过x的长度的平方。

3. 对任一x和$y\neq0$，置$e=\|y\|^{-1}y$，则从(12*)($n=1$时) 得到

$$|\langle x,e\rangle|^2\leqslant\|x\|^2$$

而再用$\|y\|^2$去乘便得$|\langle x,y\rangle|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2$。

4. 例如，令$e_k=(\delta_{k,j-1})$及$x=(\xi_k)$且$\xi_1\neq0$，则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2=\sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k|^2<\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2=\|x\|^2$$

5. $y\in Y_n$，$x=y+(x-y)$且$x-y\perp e_m$，因为有

$$\langle x-y,\ e_m\rangle=\langle x-\sum\alpha_k e_k,\ e_m\rangle=\langle x,e_m\rangle-\alpha_m=0$$

6. 令$\gamma_j=\langle x,e_j\rangle$，则有

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2&=\langle x-\sum\beta_j e_j,\ x-\sum\beta_j e_j\rangle\\&=\|x\|^2-\sum\bar{\beta}_j\gamma_j-\sum\beta_j\bar{\gamma}_j+\sum|\beta_j|^2\\&=\|x\|^2-\sum|\gamma_j|^2+\sum|\beta_j-\gamma_j|^2\end{aligned}$$

且对给定的x和e_j，当且仅当$\beta_j=\gamma_j$时它有最小值。

7. 从§1.2的柯西-许瓦兹不等式(12)可得

$$\sum|\langle x,e_k\rangle\ \langle y,e_k\rangle|\leqslant[\sum|\langle x,e_k\rangle|^2]^{1/2}[\sum|\langle x,e_k\rangle|^2]^{1/2}\leqslant\|x\|\ \|x\|。$$

8. (12)中相应项的和大于η_m/m^2，因此据(12)有

$$\frac{\eta_m}{m^2}<\sum|\langle x,e_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2$$

用m^2去乘便得所要求之结果。

9. $1/\sqrt{2}$，$(3/2)^{1/2}t$，$(5/8)^{1/2}(3t^2-1)$。

10. $(5/2)^{1/2}t^2$，$(3/2)^{1/2}t$，$8^{-1/2}(3-5t^2)$。

§3.5

1. 利用正交性和3.5-2中的记法，我们有

$$\|s_n\|^2=\|\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n\|^2=|\alpha_1|^2+\cdots+|\alpha_n|^2=\sigma_n$$

而据3.2-2，当$s_n \longrightarrow x$时便有$\|s_n\|^2 = \langle s_n, s_n\rangle \longrightarrow \langle x,x\rangle$。

2．令$t=2\pi\tau/p$，则$\tau=pt/2\pi$，这时$x(t)=\tilde{x}(pt/2\pi)$定义了一个周期为2π的函数，于是由（1）和（2）得

$$\tilde{x}(\tau)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2k\pi}{p}\tau+b_k\sin\frac{2k\pi}{p}\tau\right)$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{x}\left(\frac{pt}{2\pi}\right)dt=\frac{1}{p}\int_0^p\tilde{x}(\tau)d\tau$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{x}\left(\frac{pt}{2\pi}\right)\cos kt\,dt=\frac{2}{p}\int_0^p\tilde{x}(\tau)\cos\frac{2k\pi\tau}{p}d\tau$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{x}\left(\frac{pt}{2\pi}\right)\sin kt\,dt=\frac{2}{p}\int_0^p\tilde{x}(\tau)\sin\frac{2k\pi\tau}{p}d\tau$$

3．这个和可以与x相差一个函数$z\perp(e_k)$。例如，取$x=(1,1,1)\in\mathbf{R}^3$，$\{e_1,e_2\}$在$\mathbf{R}^3$中，其中$e_1=(1,0,0)$，$e_2=(0,1,0)$。

4．对于$n>m$有

$$\|s_n-s_m\|=\left\|\sum_{j=m+1}^{n}x_j\right\|\leqslant\sum_{j=m+1}^{n}\|x_j\|\leqslant\sum_{j=m+1}^{\infty}\|x_j\|\longrightarrow 0\ (m\longrightarrow\infty)。$$

5．对于(s_n)，其中$s_n=x_1+\cdots+x_n$，由于

$$\|s_n-s_m\|\leqslant\sum_{j=m+1}^{n}\|x_j\|\leqslant\sum_{j=m+1}^{\infty}\|x_j\|\longrightarrow 0\quad(m\longrightarrow\infty)$$

故是柯西序列，从H的完备性知(s_n)是收敛的。也可参考§2.3中习题7至9。

6．据假设，有

$$s_n=\sum_{j=1}^{n}\alpha_je_j\longrightarrow x,\quad \tilde{s}_n=\sum_{j=1}^{n}\beta_je_j\longrightarrow y$$

因此由引理3.2-2可推得

$$\langle s_n,\ \tilde{s}_n\rangle=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\bar{\beta}_j\longrightarrow\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\bar{\beta}_j=\langle x,y\rangle$$

7．该级数收敛并据3.5-2(*c*)定义了y，并且据3.5-2(*b*)有$\langle x,e_k\rangle=\langle y,e_k\rangle$，故从下式

$$\langle x-y,\ e_k\rangle=\langle x,e_k\rangle-\langle y,e_k\rangle=0$$

推出$x-y\perp e_k$。

8．若x能够用那种方法表示，则由3.5-2(*c*)知级数（6）收敛，并且据1.4-6(*a*)知$x\in\bar{M}$。部分和序列是使$x_n\longrightarrow x$的序列(x_n)。

反过来，若令$x\in\bar{M}$且令$\tilde{x}$表示（6）在$\alpha_k=\langle x,e_k\rangle$时的和，则$\tilde{x}\in\bar{M}$。于是也有$v=x-\tilde{x}\in\bar{M}$。因此

$$\langle v, e_m\rangle = \langle x - \sum \langle x, e_k\rangle e_k, e_m\rangle$$

$$= \langle x, e_m\rangle - \langle x, e_m\rangle = 0$$

即对一切$m\in N$有$v\perp e_m$，于是$v\perp M$，$v\perp \bar{M}$，$v\perp v$，（因为$v\in \bar{M}$）$v=0$及$x=\bar{x}$。

9．习题8证明了：$e_n\in \bar{M}_2$当且仅当(a)成立，而$\tilde{e}_n\in \bar{M}_1$当且仅当(b)成立。则(a)蕴含着(e_n)落在$\bar{M}_2$内，而(b)蕴含着($\tilde{e}_n$)落在$\bar{M}_1$之内；因此$\bar{M}_1=\bar{M}_2$。

10．设K_m个系数$c_a=\langle x, e_a\rangle$的绝对值都大于$1/m$，则$1/m^2<|c_a|^2$。取所有这$K_m$个系数之和，并利用§3.4中的(12)得

$$\frac{K_m}{m^2}<\sum |c_a|^2\leqslant \|x\|^2$$

因此$K_m<m^2\|x\|^2$。若$c_a\neq 0$，则对某个$m\in N$有$|c_a|>1/m$。因此，所有$c_a\neq 0$构成的集合是有限集$A_m=\{c_a \mid |c_a|>1/m\}$的可数并，故亦为可数的。

§3.6

1．否

2，有限的完全标准正交集$E=\{e_1,\cdots,e_n\}\subset H$，在代数意义下可作为矢量空间$H$的基。这一事实可从定理3.6-2看出。反之，若矢量空间H的维数是n，则它有一个含有n个元素的基B，而由格拉姆-施密特方法可从B得到含n个元素的完全标准正交基。

3．勾股定理。

4．设H是复的，则由（3）得

$$\|x+\beta y\|^2=\sum |\langle x+\beta y, e_k\rangle|^2=\sum \langle x+\beta y, e_k\rangle \overline{\langle x+\beta y, e_k\rangle}$$

作乘法并利用（3），便有

$$\bar{\beta}\langle x,y\rangle+\beta\langle y,x\rangle=\bar{\beta}\sum\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y, e_k\rangle}+\beta\sum\langle y,e_k\rangle\overline{\langle x, e_k\rangle}$$

分别取$\beta=1$和$\beta=i$，可得等式

$$\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle=\sum\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}+\sum\langle y,e_k\rangle\overline{\langle x,e_k\rangle} \qquad (\mathrm{I})$$

$$-i\langle x,y\rangle+i\langle y,x\rangle=-i\sum\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}+i\sum\langle x,e_k\rangle\overline{\langle x,e_k\rangle} \qquad (\mathrm{II})$$

将式(II)两端用i去除，有

$$-\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle=-\sum\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}+\sum\langle y,e_k\rangle\overline{\langle x,e_k\rangle} \qquad (\mathrm{II})$$

(I)减去(II)便得所希望的结果。若H是实的，则$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$，说明内积是实数，故从(I)可得到所希望的结果。

5．从定理3.6-3和这样的事实："习题4中的关系蕴含着(3)，而(3)也蕴含着习题4中的关系。"可推出所希望的结论。

6．假设$0\notin M$，由于M是可数的，所以可将它排成一个序列(x_n)。在排列的过程中，从x_1开始，后面的元素凡能用其前的元素线性表出则略去，便得到线性无关的子列$(y_k)=(x_{n_k})$。

注意，(y_k)有可能是有限的。令$V=\mathrm{span}(y_k)$。由于任一$x\in M$都是$y_1,y_2,\cdots,y_k$（k充分大）的线性组合，故$M\subset V$，于是V在H中稠密，由格拉姆-施密特正交化过程从(y_k)可得一标准正交集(e_k)，使得对每个$m\in N$都有

$$\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_m\}=\mathrm{span}\{y_1,\cdots,y_m\}$$

因此$\mathrm{span}(e_k)=\mathrm{span}(y_k)=V$在$H$中稠密。于是根据定义知$(e_k)$在$H$中是完全的。

7．在这种情况下，象习题6中的证明那样，我们能够利用格拉姆-施密特过程。

8．F在闭子空间$Y=\overline{\mathrm{span}F}$中是完全的，且$\tilde{F}=F\cup F_0$，此处$F_0$是$Y^\perp$中的完全标准正交列，$F_0$的存在是习题7的推论，这里$Y^\perp\neq\{0\}$。情形$Y^\perp=\{0\}$是显而易见的。

9．$\langle v-w,\ x\rangle=0$对一切$x\in M$成立，意味着$v-w\perp M$，因此据3.6-2(a)有$v-w=0$。

10．利用3.6 2。

§3.7

1．首先有

$$\int_{-1}^{1}P_m[(1-t^2)P_n']'dt-\int_{-1}^{1}P_n[(1-t^2)P_m']'dt$$
$$=(m-n)(m+n+1)\int_{-1}^{1}P_nP_m dt$$

对左端使用分部积分可得零。因此当$m-n\neq0$时，右端的积分必定为零。

2．应用二项式定理并与(2c)比较得

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right]=\frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}t^{2n-2m}\right]$$
$$=\sum_{m=0}^{N}(-1)^m\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!}t^{n-2m}$$
$$=2^n n!P_n(t)$$

3．用二项式定理把$(1-q)^{-1/2}$展开。然后作代换$q=2tw-w^2$。用二项式定理把q的幂展开。证明在所得到的展开式中，w^n的系数象(2c)所给出的为$P_n(t)$。

4．在习题3中令$w=r_1/r_2$，$t=\cos\theta$。

6．记$z(w)=\exp(2wt-w^2)=\exp(t^2)\exp[-(t-w)^2]$在马克劳林级数中$w^n$的系数是$z^{(n)}(0)/n!$，并且

$$z^{(n)}(0)=e^{t^2}\frac{d^n}{dw^n}[e^{-(t-w)^2}]|_{w=0}$$
$$=e^{t^2}(-1)^n\frac{d^n}{dv^n}(e^{-v^2})|_{v=t}=H_n(t)$$

9．$y(t)=e^{-t^2/2}H_n(t)$

10．（略）

11．我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)w^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\frac{t^m w^n}{m!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}w^n$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^m}{m!}\ \frac{w^m}{(1-w)^{m+1}} = \frac{e^{-wt/(1-w)}}{1-w}$$

12．直接求导并化简便得到

$$(1-w^2)\psi_w = (1-w-t)\psi$$

将$\psi(t,w)$及$\psi_w(t,w) = \sum nL_n(t)w^{n-1}$代入，并合并一切含有$w^n$的项可得$(a)$。此外，求导还可得

$$(1-w)\psi_t + w\psi = 0$$

用ψ及ψ_t代入可得(b)。

13．微分习题12中的(a)。在这个结果中用习题12中的(b)表示L'_{n+1}和L'_{n-1}，便给出(c)。从(c)和(b)可推出

$$(d)\qquad nL'_{n-1} = nL_n + (n-t)L'_n$$

微分(c)，代入(d)并化简便得到(11)。

14．由$(10c)$可得$L_n^{(n)}(t) = (-1)^n$；因此用分部积分法得到

$$\|e_n\|^2 = \int_0^{\infty} e^{-t}L_n^2(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} L_n(t)(t^n e^{-t})^{(n)}\,dt$$

$$= -\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} L'_n(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}\,dt$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\infty} L_n^{(n)}(t)\,t^n e^{-t}\,dt = 1\text{。}$$

15．考虑

$$\int_0^{\infty} e^{-t}L_m L_n\,dt \qquad (m<n)$$

只要证明下式成立就够了：

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^k L_n\,dt = 0 \qquad (k<n)$$

为此，反复用分部积分便能证明。

§3.8

1．在R^3中，每个线性泛函都是有界的，并且（1）中的内积就是点积。

2. 从定理3.8-1及l^2上的内积定义便可得到。

3. 首先有

$$|f(x)| = |\langle x,z\rangle| \leqslant \|x\| \|z\|, \quad |f(x)|/\|x\| \leqslant \|z\|, \ (x \neq 0)$$

因此$\|f\| \leqslant \|z\|$。若$z=0$，还有$\|f\| = \|z\|$。设$z \neq 0$，则有

$$\|f\| \|z\| \geqslant |f(z)| = \langle z, z\rangle = \|z\|^2, \quad \|f\| \geqslant \|z\|。$$

4. 记$z \mapsto f_z$等。设(z_n)在X中是柯西序列，则$\|f_{z_n}\| = \|z_n\|$表明(f_{z_n})在X'中是柯西序列，且收敛（见2.10-4）。不妨设$f_{z_n} \longrightarrow f$，则由满射性可知存在$z \in X$使$z \mapsto f$，并且有

$$\|z_n - z\| = \|f_{z_n} - f\| \longrightarrow 0, \quad z_n \longrightarrow z$$

从而证明了X是完备的。

5. $f \mapsto z_f$是$l^{2\prime}$到l^2上的一个同构，其中z_f被定义为（见3.8-1）

$$f(x) = \langle x, z_f\rangle$$

（注意，对于复空间l^2来说，由于$\alpha f \mapsto \bar{\alpha} z_f$，故该映射是共轭线性的。）

6. 据（2）有

$$\|f_z - f_v\| = \|f_{z-v}\| = \|z - v\|$$
$$f_{\alpha z+\beta v}(x) = \langle x, \alpha z + \beta v\rangle = \bar{\alpha}\langle x,z\rangle + \bar{\beta}\langle x,v\rangle$$
$$= \bar{\alpha} f_z(x) + \bar{\beta} f_v(x)$$

7.（略）

8. 习题6中的T是对射，并且是共轭线性的，因此两个这种等距映射的合成是H到H''上的同构。

9. 我们有

$$M^a = \{f \mid f(x) = \langle x, z_f\rangle, \text{ 对一切} x \in M\}$$

因此$f \in M^a \Longleftrightarrow z_f \in M^\perp$。

10. 由许瓦兹不等式可得到有界性，并且若$X = \{0\}$，则有$\|h\| = 1$。

11. 第一个论断是相当明显的，而从下式

$$f_2(\alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{h(x_0, \alpha y_1 + \beta y_2)} = \alpha\overline{h(x_0, y_1)} + \beta\overline{h(x_0, y_2)}$$

可推得第二个论断。

12. 我们有：当$\Delta x \longrightarrow 0$，$\Delta y \longrightarrow 0$时

$$|h(x+\Delta x, y+\Delta y) - h(x,y)|$$
$$= |h(x,y) + h(x,\Delta y) + h(\Delta x, y) + h(\Delta x, \Delta y) - h(x,y)|$$
$$\leqslant |h(x,\Delta y)| + |h(\Delta x, y)| + |h(\Delta x, \Delta y)|$$
$$\leqslant \|h\| [\|x\| \|\Delta y\| + \|\Delta x\| \|y\| + \|\Delta x\| \|\Delta y\|] \longrightarrow 0$$

13. $h(x,y) = h(y,x)$；则h叫做对称双线性形。正定的条件是，对一切$x \in X$有$h(x,x)$

$\geqslant 0$，且当$x\neq 0$时有$h(x,x)>0$。

14．若$h(y,y)\neq 0$，则有$h(y,y)>0$，故可从下式出发

$$(a)\qquad 0\leqslant h(x-\alpha y,\ x-\alpha y)$$
$$=h(x,x)-\bar{\alpha}h(x,y)-\alpha h(y,x)+|\alpha|^2 h(y,y)$$

选取$\alpha=h(x,y)/h(y,y)$，象§3.2中那样进行化简，便得到

$$h(x,x)-\frac{|h(x,y)|^2}{h(y,y)}\geqslant 0$$

它便给出所要求的不等式。若$h(x,x)\neq 0$，证明是类似的。若$h(x,x)=h(y,y)=0$，则据(a)有

$$-\bar{\alpha}h(x,y)-\alpha h(y,x)\geqslant 0$$

选取$\alpha=h(x,y)$便得

$$-2|h(x,y)|^2\geqslant 0，\text{故}h(x,y)=0。$$

15．习题14中的许瓦兹不等式以类似于§3.2中的方式给出了三角不等式。

§3.9

1．(略)

2．确实假定T^{-1}有界是多余的，因后面(4.12-2)将会见到。将3.9-2用于T^{-1}，便知$(T^{-1})^*$存在且有界，因此对一切x，y都有

$$\langle x,y\rangle=\langle T^{-1}Tx,y\rangle=\langle Tx,(T^{-1})^*y\rangle=\langle x,T^*(T^{-1})^*y\rangle$$
$$\langle x,y\rangle=\langle TT^{-1}x,y\rangle=\langle T^{-1}x,T^*y\rangle=\langle x,(T^{-1})^*T^*y\rangle$$
$$T^*(T^{-1})^*=(T^{-1})^*T^*=I，\text{故}(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}。$$

3．$\|T_n^*-T^*\|=\|(T_n-T)^*\|=\|T_n-T\|\longrightarrow 0$

4．考虑任一$z\in M_2^{\perp}$及任一$x\in M_1$，则有$z\perp M_2$及$Tx\in T(M_1)\subset M_2$，因此$\langle z,Tx\rangle=0$，$\langle T^*z,\ x\rangle=0$，$T^*z\perp x$，$T^*(M_2^{\perp})\subset M_1^{\perp}$，其中用到$z\in M_2^{\perp}$及$x\in M_1$的任意性。

5．设$T(M_1)\subset M_2$，则据习题4有$M_1^{\perp}\supset T^*(M_2^{\perp})$。反之，设$M_1^{\perp}\supset T^*(M_2^{\perp})$，则据习题4有$T^{**}(M_1^{\perp\perp})\subset M_2^{\perp\perp}$，其中据3.9-4有$T^{**}=T$，据3.3-6有$M_1^{\perp\perp}=M_1$，$M_2^{\perp\perp}=M_2$。

6．(a) 根据习题4，由$T(M_1)\subset\{0\}$可得

$$M_1^{\perp}\supset T^*(\{0\}^{\perp})=T^*(H_2)$$

(b) 令$J=T(H_1)$，则$T(H_1)\subset J$，由习题4有

$$T^*(J^{\perp})\subset H_1^{\perp}=\{0\}，T^*(J^{\perp})=\{0\}，J^{\perp}\subset\mathcal{N}(T^*)。$$

(c) 据(a)有$T^*(H_2)\subset M_1^{\perp}$；故$[T^*(H_2)]^{\perp}\supset M_1^{\perp\perp}\supset M_1$。由(b)，再应用$T^*$以代替$T$，便得$[T^*(H_2)]^{\perp}\subset\mathcal{N}(T)=M_1$。

7．利用3.9-3(b)。

8．据许瓦兹不等式有

$$\|x\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = \langle x,x\rangle + \langle T^*Tx,x\rangle$$
$$= \langle Sx,x\rangle \leqslant \|Sx\|\,\|x\|$$

因此据$Sx=0$可知$\|x\|=0$。于是据定理2.6-10知S^{-1}: $S(H)\longrightarrow H$是存在的。

9. 设$\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$是$T(H)=\mathscr{R}(T)$的一个标准正交基,又设$x\in H$, $Tx=\sum\alpha_j(x)b_j$,则有

$$\langle Tx,b_k\rangle=\alpha_k(x)=\langle x,T^*b_k\rangle, \quad Tx=\sum\langle x,v_j\rangle w_j,\ \text{其中} v_j=T^*b_j,$$

$w_j=b_j$。

10. 首先有$\mathscr{R}(T)=\overline{\text{span}(e_1,e_2,\cdots)}$, $\mathscr{N}(T)=\{0\}$, $\|T\|=1$。此外,由于(e_n)是正交的,故对于一切$k\in N$有

$$\langle T^*e_1,\ e_k\rangle=\langle e_1 Te_k\rangle=\langle e_1,e_{k+1}\rangle=0$$

因此$T^*e_1=0$。对于$j>1$有

$$\langle T^*e_j,\ e_k\rangle=\langle e_j,\ Te_k\rangle=\langle e_j,\ e_{k+1}\rangle$$
$$=\begin{cases}0 & ,\ k\neq j-1\\ 1 & \ \ k=j-1\end{cases}$$

亦即$\langle T^*e_j,\ e_{j-1}\rangle=1$,因此$T^*e_j=e_{j-1}$, $j=2,3,\cdots$;而对$k\neq j-1$,则有$\langle T^*e_je_k\rangle=\langle e_{j-1},\ e_k\rangle=0$。

§3.10

1. 利用3.9-4。

2. 由于$T_n\longrightarrow T$及$\|T_nx-Tx\|=\|(T_n-T)x\|\leqslant\|T_n-T\|\,\|x\|$,故对一切$x$有$T_nx\longrightarrow Tx$。因此据3.2-2有$\langle T_nx,x\rangle\longrightarrow\langle Tx,x\rangle$,再据3.10-3知$\langle Tx,x\rangle$是实的,并且$T$是自伴的。

3. 利用3.10-4。

4. 我们有

$$T_1^*=\frac{1}{2}(T+T^*)^*=\frac{1}{2}(T^*+T^{**})=\frac{1}{2}(T^*+T)=T_1$$

对于T_2有类似于推导。为证明唯一性,设

$$T_1+iT_2=S_1+iS_2$$

取伴随算子再利用§3.9中的(6c)及T_1,T_2,S_1,S_2的自伴性,便得到$T_1-iT_2=S_1-iS_2$,与上式相加和相减,便分别得到$T_1=S_1$, $T_2=S_2$。

5. $T^*x=(\xi_1+\xi_2,\ -i\xi_1+i\xi_2)$,因此有

$$T_1x=\left(\xi_1+\frac{1+i}{2}\xi_2,\ \frac{1-i}{2}\xi_1\right),$$

$$T_2x=\left(\frac{1+i}{2}\xi_2,\ \frac{1-i}{2}\xi_1-\xi_2\right)。$$

6.（a）对于某个$x\in H$，$Tx\neq 0$，因此有

$$0<\|Tx\|^2=\langle Tx,Tx\rangle=\langle T^2x,x\rangle$$

于是$T^2\neq 0$，等等。

（b）由$T^n=0$可得对每个$p>n$都有

$$T^p=T^{p-n}(T^n)=0$$

如果取$p=2^k>n$，便与（a）矛盾。

7. 从$\bar{U}^TU=U^{-1}U=I$便可推出。

8. 据§3.1中的（9）和（10）可知T使内积保持不变，因此对一切x,y有

$$0=\langle x,y\rangle-\langle Tx,Ty\rangle=\langle x,y\rangle-\langle x,T^*Ty\rangle$$
$$=\langle x,(I-T^*T)y\rangle$$

且对一切y有$(I-T^*T)y=0$，故$I-T^*T=0$。

9. 据2.6-9知$\mathscr{R}(T)$是一个子空间$Y\subset H$。对于$y\in\bar{Y}$，存在Y中的序列(y_n)满足$y_n\longrightarrow y$。令$y_n=Tx_n$，则据等距性知(x_n)是柯西序列。由于H是完备的，故$x_n\longrightarrow x$，据1.4-8有$y=Tx\in Y$，所以Y是闭的。若$Y=H$，则T将是酉算子。

10. $\mathscr{R}(T)$是矢量空间，并且据2.6-9有$\dim\mathscr{R}(T)\leqslant\dim X$。§3.1中的习题8和9表明，$T$将$X$中的一个标准正交基变换成$\mathscr{R}(T)$中的一个标准正交集；故$\dim\mathscr{R}(T)\geqslant\dim X$。合在一起有$\dim\mathscr{R}(T)=\dim X$及$\mathscr{R}(T)=X$，于是$T$是酉变换。

11. $S^*=(UTU^*)^*=UT^*U^*=UTU^*=S$；见3.9-4。

12. 可从下式得到：

$$TT^*=(T_1+iT_2)(T_1-iT_2)=T_1^2+T_2^2+i(T_2T_1-T_1T_2)$$
$$T^*T=(T_1-iT_2)(T_1+iT_2)=T_1^2+T_2^2-i(T_2T_1-T_1T_2)$$

同样地也可从下面等式得到：

$$4iT_1T_2=T^2-T^{*2}+(T^*T-TT^*)$$
$$4iT_2T_1=T^2-T^{*2}-(T^*T-TT^*)$$

13. $\|TT^*-T^*T\|\leqslant\|TT^*-T_nT_n^*\|+\|T_nT_n^*-T_n^*T_n\|+\|T_n^*T_n-T^*T\|$，右端的第二项为零。据§3.9习题3，$T_n\longrightarrow T$蕴含着$T_n^*\longrightarrow T^*$，故右端的另外两项在$n\longrightarrow\infty$时趋于零。

14. 据假设和下面关系

$$(S+T)(S+T)^*=SS^*+ST^*+TS^*+TT^*$$
$$(S+T)^*(S+T)=S^*S+T^*S+S^*T+T^*T$$

可推出$S+T$是正规的。从下面关系式

$$(ST)(ST)^*=STT^*S^*=ST^*TS^*=T^*SS^*T=T^*S^*ST$$
$$=(ST)^*(ST)$$

可看出ST是正规的。

15．利用3.9-3（b），对一切x有

$$\|T^*x\|^2=\|Tx\|^2 \Longleftrightarrow \langle T^*x,\ T^*x\rangle=\langle Tx,\ Tx\rangle$$
$$\Longleftrightarrow \langle TT^*x,\ x\rangle=\langle T^*Tx,\ x\rangle$$
$$\Longleftrightarrow \langle [TT^*-T^*T]x,x\rangle=0$$
$$\Longleftrightarrow TT^*=T^*T。$$

在$\|T^*x\|=\|Tx\|$中用$x=Tz$代入便有$\|T^*Tz\|=\|T^2z\|$，并且据§3.9中的（6e）有

$$\|T\|^2=\sup_{\|z\|=1}\|T^2z\|=\sup_{\|z\|=1}\|T^*Tz\|=\|T^*T\|=\|T\|^2$$

§4.1

1．（略）

2．否，否。

3．（略）

4．（a）3，8；（b）M的每个元素。

5．关于A的元素的个数用归纳法证明。

6．设对一切$x\in M$有$a\leqslant x$，若还有c对一切$x\in M$满足$c\leqslant x$，则$c\leqslant a$且$a\leqslant c$，于是由（P01）知$c=a$。

7．12，24，36，…（能被4和6整除的所有$x\in N$）。1,2。

8．（a）若x_1,x_2都是A的最大下界，则$x_1\leqslant x_2$，$x_2\leqslant x_1$，因此$x_1=x_2$。

（b）$A\cap B$，$A\cup B$。

9．（略）

10．2，3 。

§4.2

1．～3．（略）

4．首先有$p(0)=p(0x)=0p(x)=0$。由此可得

$$0=p(0)=p(x-x)\leqslant p(x)+p(-x)。$$

5．$p(x)\leqslant\gamma$，$p(y)\leqslant\gamma$，$\alpha\in[0,\ 1]$蕴含着$1-\alpha\geqslant 0$和

$$p(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha p(x)+(1-\alpha)p(y)\leqslant\alpha\gamma+(1-\alpha)\gamma=\gamma$$

6．对于每个x和h有

$$p(x)=p(x+h-h)\leqslant p(x+h)+p(-h)$$

因此有

$$p(x)-p(-h)\leqslant p(x+h)\leqslant p(x)+p(h)$$

令$h\longrightarrow 0$并利用p在0点的连续性便得

$$p(x)-p(0)=p(x)\leqslant\underline{\lim}\, p(x+h)\leqslant\overline{\lim}\, p(x+h)$$
$$\leqslant p(x)+p(0)=p(x)$$

其中用到$p(0)=0$。从而证明了p在每个x处连续。

7.（略）

8. 对每个满足$\|x\|<r$的$x\neq 0$,都存在$n\in N$使得$\|nx\|=n\|x\|>r$,因此$p(nx)\geqslant 0$。据（1）有$p(nx)=np(x)$；因此$p(0)\geqslant 0$。

9. 若$\alpha>0$，则$f(x)=p(\alpha x_0)=p(x)$。若$\alpha<0$，则据习题4有

$$f(x)=\alpha p(x_0)\leqslant-\alpha p(-x_0)=p(\alpha x_0)=p(x)。$$

10. 将定理4.2-1用到习题9中的f上，可得$\tilde{f}$在X上满足$\tilde{f}(x)\leqslant p(x)$，且从$-f(x)=\tilde{f}(-x)\leqslant p(-x)$可推得$-p(-x)\leqslant\tilde{f}(x)$。

§4.3

1. $p(0)=p(0x)=0p(x)=0$；这蕴含着

$$0=p(0)=p(x+(-x))\leqslant p(x)+p((-1)x)=2p(x)。$$

2. 由$p(x)=p(x-y+y)\leqslant p(x-y)+p(y)$可得

$$p(x)-p(y)\leqslant p(x-y)=p(y-x)$$

等。

3.（略）

4. 在$Z=\{x\mid x=\alpha x_0\}$上用$f(\alpha x_0)=\alpha p(x_0)$定义一个线性泛函$f$,那么$f(x_0)=p(x_0)$ $|f(\alpha x_0)|=p(\alpha x_0)$。应用定理4.3-1。

5.（略）

6. $\tilde{f}=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3$，因此有

$$\|\tilde{f}\|=(\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2)^{1/2}\geqslant\|f\|$$

当且仅当$\alpha_3=0$时$\|\tilde{f}\|=\|f\|$。

7. 据黎斯定理3.8-1有$\tilde{f}(x)=\langle x,x_0\rangle/\|x_0\|$。

8. 在子空间$X_1=\{x\in X\mid x=\alpha x_1,\ x_1\neq 0\}$上定义$f(x)=\alpha\|x_1\|$，则$f$是$X_1$上的有界线性泛函，且范数为$\|f\|=1$，应用定理4.3-2。

9. 把f延拓到空间$Z_1=\mathrm{span}(Z\cup\{y_1\})$，$y_1\in X-Z$，置$g_1(z+\alpha y_1)=f(z)+\alpha c$，象定理4.2-1的证明（$c$）中那样关于本节（9）中的$p$来确定$c$。经过可数多个这样的步骤便得到$f$到$X$的稠密集上的延拓，而定理2.7-11给出了要证明的结果。

10. 据定理4.3-3知存在$\tilde{f}\in X'$满足$\tilde{f}(x_0)=\|x_0\|$，且由$\tilde{f}(x_0)=0$得到$x_0=0$。

11. $f(x)-f(y)=f(x-y)=0$。应用4.3-4。

12. $x_0=(\xi_1{}^{(0)},\xi_2{}^{(0)})$，$x=(\xi_1,\xi_2)$，$\tilde{f}(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2$，$\alpha_j=\xi_j{}^{(0)}/\|x_0\|$，此处$\|x_0\|^2=\xi_1{}^{(0)2}+\xi_2{}^{(0)2}$ 其实也可从习题7得出，因为对这里的情形有

$$\langle x,x_0\rangle=x\cdot x_0=\xi_1\xi_1{}^{(0)}+\xi_2\xi_2{}^{(0)}$$

13. $\tilde{f}=\|x_0\|^{-1}\tilde{f}$。

14. 据定理4.3-3，存在$\tilde{f}\in X'$满足$\|\tilde{f}\|=1$及$\tilde{f}(x_0)=\|x_0\|$；并且由于$x_0\in H_0$，$x\in\tilde{B}(0;r)$当且仅当$\|x\|<r$，所以$\tilde{f}(x)=r$表示H_0；但这时有

$$\tilde{f}(x)\leqslant\|\tilde{f}\|\ \|x\|=\|x\|<r,$$

它表示由H_0所确定的半空间；见§2.8习题15。

15. 据定理4.3-3，$\|x_0\|>c$将蕴含着存在$\tilde{f}\in X'$满足$\|\tilde{f}\|=1$及$\tilde{f}(x_0)=\|x_0\|>c$。

§4.5

1. (略)

2. $0^\times$是Y'上的零算子，而$I^\times$是$Y'=X'$上的恒等算子。

3. $$((S+T)^\times g)(x)=g((S+T)x)=g(Sx)+g(Tx)$$
$$=(S^\times g)(x)+(T^\times g)(x)。$$

4. 我们有
$$((\alpha T)^\times g)(x)=g((\alpha T)x)=g(\alpha Tx)$$
$$=\alpha g(Tx)=\alpha(T^\times g)(x)$$
$$=((\alpha T^\times)g)(x)$$

5. $$((ST)^\times g)(x)=g(STx)=(S^\times g)(Tx)$$
$$=(T^\times(S^\times g))(x)=(T^\times S^\times g)(x)$$

6. (11) 的直接推论。

7. $(AB)^T=B^TA^T$

8. $(T^{-1})^\times$：$X'\longrightarrow Y'$存在，由$T^{-1}T=I_{X'}$ 可知
$$(T^{-1}T)^\times=T^\times(T^{-1})^\times=I_{X'}$$

而且由$TT^{-1}=T$，可知

$$(a)\ (T^{-1})^\times T^\times=I_{Y'},$$

因此，$T^\times$：$Y'\longrightarrow X'$是对射。故$(T^\times)^{-1}$存在且由(a)可得
$$(T^{-1})^\times=(T^{-1})^\times T^\times(T^\times)^{-1}=(T^\times)^{-1}$$

9. $g\in M^a\Longleftrightarrow 0=g(Tx)=(T^\times g)(x)$对一切$x\in X$成立
$$\Longleftrightarrow T^\times g=0$$
$$\Longleftrightarrow g\in\mathscr{N}(T^\times)$$

10. 设$y\in\mathscr{R}(T)$，则对某个x有$y=Tx$。设$g\in\mathscr{N}(T^\times)$，则$0=T^\times g(x)=g(Tx)=g(y)$。于是

$$y\in{}^a[\mathscr{N}(T^\times)]$$

且由于$y\in\mathscr{R}(T)$是任意的，故$\mathscr{R}(T)\subset{}^a[\mathscr{N}(T^\times)]$。方程$Tx=y$有解$x$的必要条件为：对一切$g\in\mathscr{N}(T^\times)$都有$g(y)=0$。

§4.6

1. $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$f(x)=\alpha_1\xi_1+\cdots+\alpha_n\xi_n$，$g_x(f)=\alpha_1\xi_1+\cdots+\alpha_n\xi_n$.（$\xi_j$固定）

2. 首先有$x_0=y_0+z_0$，其中$y_0\in Y, z_0\in Y^{\perp}$；还有$\delta=\|z_0\|$。于是据黎斯定理3.8-1，有$\tilde{f}(x)=\langle x,z_0\rangle/\|z_0\|$

3 设$h\in X'''$。由于X是自反的，故对每个$g\in X''$有一个$x\in X$使得$g=Cx$。因此$h(g)=h(Cx)=f(x)$在X上定义了一个有界线性泛函f，并且$C_1f=h$，其中C_1：$X'\longrightarrow X'''$是一个典范映射。故C_1是满射，从而X'是自反的。

4. (a)若X是自反的，则由习题3知X'也是自反的。(b)设X'是自反的，则由(a)知X''也是自反的，且由4.6-4知是完备的。由于X是完备的且与X''的一个子空间同构(见4.6-2)，所以该子空间是完备的。因此，由1.4-7知它是闭的，再由给出的启示知是自反的，从而据4.6-2知X是自反的。

5. $h=\delta^{-1}\tilde{f}$

6. 设$x_0\in Y_2$，$x_0\notin Y_1$，则$\delta=\inf_{y\in Y_1}\|y-x_0\|>0$。设$\tilde{g}\in X'$使得$\tilde{g}|_{Y_1}=0$，$\tilde{g}(x_0)=1$（见习题5）。因此$\tilde{g}\in Y_1^a$，但是$\tilde{g}\notin Y_2^a$。

7. 若$Y\neq X$，则存在一个$x_0\in X-Y$，并且由于Y是闭的，故$\delta=\inf_{y\in Y}\|y-x_0\|>0$。据引理4.6-7。存在一个$\tilde{f}\in X'$在$Y$上为零，但在$x_0$不为零，这与我们的假设矛盾。

8. 若$x_0\in A$，则x_0是序列(x_n)的极限，而其中x_n为M的元素的线性组合。在所有x_n点皆为零的$f\in X'$，根据其连续性，它在x_0点也为零。若$x_0\notin A$，则由引理4.6-7存在$\tilde{f}$使得$\tilde{f}|_A=0$，并且$\tilde{f}(x_0)\neq 0$。

9. 若M不是完全的，则$Y=\overline{\text{span}M}\neq X$。而引理4.6-7表明存在一个$\tilde{f}\in X'$在$Y$上处处为零，因此在$M$上也为零，但在$x_0\in X-Y$不为零。若$M$是完全的，则$Y=X$且习题中的条件是满足的。

10. 设所指集合为$\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$，则由习题5（它是引理4.6-7的直接推论）存在X上的n个有界线性泛函$f_1,f_2,\cdots,f_n$，使得

$$f_j(x_j)=1,\quad f_j(x_k)=0 \qquad (k\neq j)$$

这些泛函构成一个线性无关集，因为若令$x=x_1$，$\cdots$，x_n，则由

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_jf_j(x)=0,\quad x\in X$$

逐次给出$\gamma_1=\cdots=\gamma_n=0$

§4.7

1. (a)第一个，(b)第一个。

2. (a) 第一，(b)第二（据4.7-2）。

3. ϕ因为X的每个子集都是开的。

4. 具有有理坐标的一切点构成的集合。

5. $(\bar{M})^c$的闭包为整个X当且仅当$\bar{M}$没有内点，所以每个$x\in\bar{M}$都是$(\bar{M})^c$的一个聚点。

6. 否则，$M\cup M^c$将是贫乏的，这将与$Baire$范畴定理矛盾。

7. 为定理4.7-3的直接结果。

8. 当$n \longrightarrow \infty$时，$f_n(x) \longrightarrow 0$，但是$\| f_n \| = n$。

9. $\| x \|$；$\| T_n x \|^2 = |\xi_{2n+1}|^2 + |\xi_{2n+2}|^2 + \cdots \longrightarrow 0$，$(n \longrightarrow \infty)$；1；1。

10. 由于c_0在l^∞中是闭的，故它是完备的（见1.4-7）。令$f_n(x) = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n$，它便在$c_0$上定义了一个有界线性泛函$f_n$，其中$n = 1, 2, \cdots$，从而有$\| f_n \| = |\eta_1| + \cdots + |\eta_n|$；见§2.10的习题8。由假设，对每个$x \in c_0$，$\lim f_n(x)$都存在，因此据定理4.7-3，$(\| f_n \|)$是有界的，且$\Sigma |\eta_j| < \infty$。

11. 利用如下事实：每个柯西序列都是有界的（见§1.4），再应用定理4.7-3。

12. 由于Y是完备的，故$T_n x \longrightarrow y \in Y$。$y$依赖于$x$，不妨设$y = Tx$。因为$T_n$是线性的，故$T$也是线性的。又由于$\| T_n \| \leqslant c$（据习题11），故有$\| T_n x \| \leqslant \| T_n \| \| x \| \leqslant c \| x \|$。于是据范数的连续性便得$\| Tx \| \leqslant c \| x \|$。

13. 让我们记$f(x_n) = g_n(f)$，则$(g_n(f))$对每个f是有界的，所以据4.7-3知$(\| g_n \|)$是有界的，并且据4.6-1有$\| x_n \| = \| g_n \|$。

14. (c)蕴含(b)（见习题13），而由4.7-3知，它蕴含(a)。又因$|g(T_n(x))| \leqslant \| g \| \| T_n \| \| x \|$，故$(a)$蕴含$(c)$。

15. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots)$

§4.8

1. 在$C[a, b]$上由$\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$定义了一个有界线性泛函，其中$t_0 \in [a, b]$。而$\delta_{t_0}(x_n) \longrightarrow \delta_{t_0}(x)$意味着$x_n(t_0) \longrightarrow x(t_0)$。

2. 任取$h \in Y'$，并用$f(x) = h(Tx)$定义f，其中$x \in X$。由于$h \in Y'$且T是有界的，故有

$$|f(x)| = |h(Tx)| \leqslant \| h \| \| Tx \| \leqslant \| h \| \| T \| \| x \|$$

因此$f \in X'$，于是由$x_n \xrightarrow{w} x_0$知$f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$，亦即$h(Tx_n) \longrightarrow h(Tx_0)$。由于$h$是$Y'$中的任意元，这意味着$Tx_n \xrightarrow{w} Tx$。

3. 从X上的该泛函的线性性便可推出。

4. 由于$(\| x_n \|)$有界（见4.8-3），故$\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \| x_n \|$存在。情形$x_0 = 0$是不足论的。设$x_0 \neq 0$，则$\| x_0 \| > 0$。若$\lambda < \| x_0 \|$，则$(x_n)$有子列$(x_{n_j})$满足：对一切$j$有$\| x_{n_j} \| \leqslant \gamma < \| x_0 \|$。据4.3-3知，存在$\tilde{f}$满足$\| \tilde{f} \| = 1$，$\tilde{f}(x_0) = \| x_0 \|$。但是从下式

$$|\tilde{f}(x_{n_j})| \leqslant \| \tilde{f} \| \| x_{n_j} \| = \| x_{n_j} \| \leqslant \gamma < \| x_0 \|$$

可以看出$(\tilde{f}(x_{n_j}))$不收敛于$\tilde{f}(x_0) = \| x_0 \|$。因此$(\tilde{f}(x_n))$不可能收敛于$\tilde{f}(x_0)$。这与$x_n \xrightarrow{w} x_0$发生矛盾。

推论4.3-4给出另一证明：

$$\|x_0\| = \sup_{\substack{f\in X' \\ f\neq 0}} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f\in X' \\ f\neq 0}} \frac{1}{\|f\|}\left|\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right|$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \quad .$$

5．否则，从x_0到$\bar{Y}$的距离δ是正的。据4.6-7存在$\tilde{f}\in X'$满足$\tilde{f}(x_0)=\delta$且对一切$x\in\bar{Y}$有$\tilde{f}(x)=0$。因此$\tilde{f}(x_n)=0$，故$(\tilde{f}(x_n))$不收敛于$\tilde{f}(x_0)$。但这与$x_n \xrightarrow{w} x_0$发生矛盾。

6．令$Y=\operatorname{span}(x_n)$，则据习题5知$x_0\in\bar{Y}$。据1.4-6($a$)知存在$Y$中的序列（$y_m$）满足$y_m\longrightarrow x_0$。由于$y_m\in Y=\operatorname{span}(x_n)$，故$y_m$是$(x_n)$中元素的线性组合。

7．利用习题6。

8．设(x_n)是弱柯西序列，用$g_n(f)=f(x_n)$定义$g_n\in X''$；见4.6。由于$(f(x_n))$是柯西序列，故是有界的，不妨设$|f(x_n)|=|g_n(f)|\leqslant c_f$。则由于$X'$是完备的，所以据4.6-1和4.7-3有$\|x_n\|=\|g_n\|\leqslant c$。

9．否则，A将含有一个无界序列(x_n)且满足$\lim\|x_n\|=\infty$。则对(x_n)的每个子序列(x_{n_j})都有$\lim\|x_{n_j}\|=\infty$，故(x_n)不会有弱柯西子列（据习题8）。这与假设矛盾。

10．设(x_n)是X中任一弱柯西序列，则对每个$f\in X'$，$(f(x_n))$均收敛。而对于$x_n\in X$又存在$g_{x_n}\in X''$使得$f(x_n)=g_{x_n}(f)$，因此$(g_{x_n}(f))$是收敛的，不妨设$g_{x_n}(f)\longrightarrow g(f)$。由于$(x_n)$是有界的（见习题8），且$\|g_{x_n}\|=\|x_n\|$（见4.6-1)，故可看出是有界的，$g$又是线性的，故$g\in X''$。而由于$X$是自反的，所以存在$x$使得$g(f)=f(x)$。从而有

$$f(x_n)=g_{x_n}(f)\longrightarrow g(f)=f(x)$$

据$f\in X'$的任意性，便知$x_n \xrightarrow{w} x$。又据(x_n)的任意性，故证明了X是弱完备的。

§4.9

1．当$n\longrightarrow\infty$时，$\|T_nx-Tx\|=\|(T_n-T)x\|\leqslant\|T_n-T\|\,\|x\|\longrightarrow 0$。

2．当$n\longrightarrow\infty$时，对每个$x\in X$有

$$\|(S_n+T_n)x-(S+T)\|\leqslant\|S_nx-Sx\|+\|T_nx-Tx\|\longrightarrow 0。$$

3．把定理4.8-4(a)中的x_n和x换成$y_n=Tx_n$和$y=Tx$，立即可推出所希望的结果。

4．设对一切$g\in X''$有$g(f_n)\longrightarrow g(f)$，则有

$$f_n(x)-f(x)=g_x(f_n)-g_x(f)\longrightarrow 0$$

其中$g_x=Cx$，而$C: X\longrightarrow X''$是典范映射。若X是自反的，则其逆亦成立。因为这时对每个$g\in X''$都存在一个$x\in X$满足$f(x)=g(f)$，并且弱星收敛蕴含着

$$g(f_n)-g(f)=f_n(x)-f(x)\longrightarrow 0$$

5．由于$x\in l^1$，故级数$\sum|\xi_n|$收敛。因此对每个$x\in l^1$我们都有$\xi_n=f_n(x)\longrightarrow 0$（$n\longrightarrow\infty$）。但$\|f_n\|=1$。

6．若$T_n\longrightarrow T$且$\|x\|=1$，则有

反之，若习题中的条件成立，则$\| T_n y - T y \| < \varepsilon$ ($n > N$，$\| y \| = 1$)。任取固定的$x \neq 0$，并令$y = \| x \|^{-1} x$，则$\| T_n x - T x \| = \| x \| \, \| T_n y - T y \| < \varepsilon \| x \|$，且对一切$n > N$有$\| T_n - T \| \leqslant \varepsilon$。

7．据假设，$(T_n x)$对每个$x \in X$都是收敛的。因此据1.4-2知$(T_n x)$是有界的，$(\| T_n \|)$也是有界的；见4.7-3。

8．显然，对充分大的r，$K \subset \tilde{B}(0; r)$。故存在$N$使得对一切$n > N$有$\| T_n - T \| < \varepsilon / r$。因此对一切$x \in K$和$n > N$有

$$\| T_n x - T x \| \leqslant \| T_n - T \| \, \| x \| < \frac{\varepsilon}{r} \cdot r = \varepsilon$$

9．$(\| T_n \|)$是有界的。由于$\| T_n x \| \leqslant \| x \|$及范数的连续性，可得

$$\| T x \| \lim_{n \to \infty} \| T_n x \| \leqslant \lim_{n \to \infty} \| T_n \| \, \| x \|$$

10．M中的任一序列(f_n)都是有界的，不妨设$\| f_n \| \leqslant r$。由于X是可分的，所以它含有可数的稠密子集V，把它排成序列(x_m)。由于有

$$|f_n(x_m)| \leqslant \| f_n \| \, \| x_m \| \leqslant r \| x_m \|$$

这表明对固定的m，序列$(f_n(x_m))$是有界的。于是它有子列A_1在x_1处收敛，而A_1又有子列A_2在x_2处收敛，如此下去，因此有$(f_{n_k}(x))$，其中$f_{n_1} \in A_1$，$f_{n_2} \in A_2$，…，它是在V的每个元处都收敛的子列。而又由V在X中的稠密性及X的完备性，根据4.9-7便可推出所希望的结论。

§4.10

1．矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

2．$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2} \cdots\right)$，$c_1$－limit $\frac{1}{2}$；

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right)$，$c_1$－limit 0（＝limit）

3．$\xi_1 = \eta_1$，$\xi_n = n\eta_n - (n-1)\eta_{n-1}$；　$(1, 0, 0, \cdots)$。

4．例如，$(1, -1, 3, -3, 5, -5, \cdots)$有$c_1$-变换序列：$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots)$。

5．H_1给出$(1, -1, 1, -1, \cdots)$；H_2给出$\left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \cdots\right)$；因此该序列是$H_2$-可和的，但不是$H_1$-可和的。

6．由著名公式

$$S_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

可得

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu = \frac{1}{1-z} - \frac{z(1-z^{n+1})}{(n+1)(1-z)^2} \longrightarrow \frac{1}{1-z}$$

7．关于k用归纳法证明。

8.9．（略）

10．这个习题说明了，欧拉方法并不是总能改进收敛性的。但可以指出，对于这种在达到某一阶时残差都是正的交错级数，其改进通常是值得考虑的。

§4.11

1～3．（略）

4．取$n=1$，以t代替b，并令

$$\varepsilon_n^*(x(t))=\frac{t-a}{2}[x(a)+x(t)]-\int_a^t x(\tau)d\tau$$

微分两次便有

$$\frac{1}{2}(t-a)m_2^*\leqslant\varepsilon_n^{*\prime\prime}(x(t))\leqslant\frac{1}{2}(t-a)m_2$$

从a到t积分两次，并令$t=a+h$，便得

$$m_2^*\frac{h^3}{12}\leqslant\varepsilon_n^*(x(a+h))\leqslant m_2\frac{h^3}{12}$$

它对应长度为$h=^{(b-a)}/n$的子区间，并且共有n个这样的子区间。

5.～7.（略）

8．可得到

$$|r(t)|=\left|\int_{-h}^{h}x(t)dt-2hx(0)\right|=\left|\int_{-h}^{h}\left(\int_0^t x'(\tau)d\tau\right)dt\right|$$

$$\leqslant p(x)\int_{-h}^{h}\left|\int_0^t dt\right|dt=p(x)h^2$$

9．公式（16）不含有$x'''(0)$。

10．对傅立叶系数的欧拉公式连续使用两次分部积分。将能证明这些系数都含因子$1/m^2$，a_0除外。

§4.12

1．T映一开球到开区间上，所以从§1.3习题4可推出这一论断。一否。

2．习题1中的T：$\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}$将闭集$\{(\xi_1,\xi_2)|\xi_1\xi_2=1\}\subset\mathbf{R}^2$映到了集合$\mathbf{R}-\{0\}$上，而该集合在$\mathbf{R}$中不是闭集。

3．$\{\alpha,2\alpha,3\alpha,4\alpha\}\{1+w,2+w,3+w,4+w\}$，$\{2,3,\cdots,8\}$

4．（略）

5．$\|T\|=1$；$1=\|x\|=\|T^{-1}y\|=k\|y\|$，其中$x=(\delta_{kj})$，即其第$k$项为1，而其余项为零。因而$\|T^{-1}\|\geqslant k$。否，由于$X$不是完备的。

6．(a)若$\mathscr{R}(T)$在Y中是闭的，则它是完备的，有界性可从4.12-2得到。

(b)假设T^{-1}有界，$y\in\overline{\mathscr{R}(T)}\subset Y$，$\mathscr{R}(T)$中的$(y_n)$适合$y_n\longrightarrow y$，并假定$x_n=T^{-1}y_n$。则由于$T^{-1}$是连续的且$X$是完备的，故据1.4-8知$(x_n)$收敛，不妨设$x_n\longrightarrow x$。据$T$的连续性有$y_n=Tx_n\longrightarrow Tx$。因此$y=Tx\in\mathscr{R}(T)$，于是$\mathscr{R}(T)$是闭的，其中用到$y\in\overline{\mathscr{R}(T)}$的任意

性。

7. 从有界逆定理可以推出。

8. 由$x \longmapsto x$定义的线性算子T：$X_1 \longrightarrow X_2$是连续的，故是有界的，据4.12-2知它还是对射。

9. 由$x \longmapsto x$所定义的T：$X_2 \longrightarrow X_1$：是对射，而且由于$\|x\|_1/\|x\|_2 \leqslant c$，故是连续的，据4.12-2知$T^{-1}$也是连续的。

10. 由$x \longmapsto x$所定义的线性算子T：$X_1 \longrightarrow X_2$是连续的（见1.3-4），并且是对射。于是据4.12-2知T^{-1}是连续的。集合M在X_1中是开的当且仅当M在X_2中也是开的。

§4.13

1. （略）

2. 设$z_j=(x_j,y_j)$，则从下式

$$\begin{aligned}\|z_1+z_2\| &= \max\{\|x_1+x_2\|,\ \|y_1+y_2\|\}\\ &\leqslant \max\{\|x_1\|+\|x_2\|,\ \|y_1\|+\|y_2\|\}\\ &\leqslant \max\{\|x_1\|,\ \|y_1\|\}+\max\{\|x_2\|,\ \|y_2\|\}\end{aligned}$$

可推出三角不等式。对于$\|\cdot\|$，使用柯西-许瓦兹不等式（§1.2）直接计算便可推出三角不等式。

3. （略）

4. 参见闭图象定理证明中的第一部分。

5. 据2.6-10知T^{-1}是线性的。T^{-1}的图能够记为$\mathscr{G}(T^{-1})=\{(Tx,x)\mid x\in\mathscr{D}(T)\}\subset Y\times X$，并且是闭的，这是由于$\mathscr{G}(T)\subset X\times Y$是闭的而由$(x,y)\longrightarrow(y,x)$所定义的映射$X\times Y\longrightarrow Y\times X$是等距的。

6. 从定理4.13-3立即可以推出。

7. $T: X\longrightarrow Y$是有界和线性的，且$\mathscr{D}(T)=X$是闭的。因此据4.13-5(a)知T是闭的。据假设T^{-1}：$Y\longrightarrow X$存在，T^{-1}是闭的（习题5的答案中的证明），并且因为$\mathscr{D}(T^{-1})=Y$是闭的，据闭图象定理知T^{-1}是连续的。

8. (a)考虑任一$a\in\overline{A}$。令$a_n\longrightarrow a$且$a_n\in A$，又设$c_n\in C$满足$a_n=Tc_n$，则由于C是紧的，故(c_n)有收敛的子列(c_{n_j})，不妨设$c_{n_j}\longrightarrow c\in C$，又$Tc_{n_j}\longrightarrow a$从而据定理4.13-3有$Tc=a\in A$。

(b) 考虑任一$b\in\overline{B}$。令$b_n\longrightarrow b$且$b_n\in B$，又设$k_n=Tb_n$。由于K是紧的，故(k_n)有收敛的子列(k_{n_j})，不妨设$k_{n_j}\longrightarrow k\in K$，又$b_{n_j}\longrightarrow b$，据定理4.13-3有$Tb=k\in K=T(B)$，于是$b\in B$，故$B$是闭的。

9. 任一闭子集$K\subset Y$都是紧的（§2.5习题9），而且其逆象是闭的（习题8）。因此T是连续的（§1.3习题14），且据2.7-9知是有界的。

10. T^{-1}是闭的（习题5），故有界（习题9）。

11. 利用定理4.13-3。

12. 据引理4.13-5(a)知，T_2是闭的，应用定理4.13-3。

13. T^{-1}是闭的（习题5），因此据4.13-5(*b*)知，$\mathscr{R}(T)\mathscr{D}=(T^{-1})$是闭的。

14. 部分和$x_n=u_1+\cdots+u_n$所构成的序列(x_n)是一致收敛的，即在$C[0,1]$上有$x_n\longrightarrow x$。类似地(y_n)也一致收敛，不妨设在$C[0,1]$上有$y_n\longrightarrow y$，其中$y_n=Tx_n=x_n'=u_1'+\cdots+u_n'$。由于T是闭的，故据定理4.13-3可得$x\in\mathscr{D}(T)$及$y=Tx=x'$。

15. (*a*) 由于线性算子把0映成0，故条件是必要的。

(*b*)由于$\mathscr{G}(T)$是一个矢量空间，故$\overline{\mathscr{G}(T)}$也是一个矢量空间。假定$(x,y_1)$，$(x,y_2)\in\overline{\mathscr{G}(T)}$，则有

$$(x,y_1)-(x,y_2)=(0,y_1-y_2)\in\overline{\mathscr{G}(T)}$$

而据条件有$y_1-y_2=0$，所以$\tilde{T}$是一个映射。由于$\overline{\mathscr{G}(T)}$是一个矢量空间，故$\tilde{T}$是线性的。由于$\overline{\mathscr{G}(T)}$是闭的，故$\tilde{T}$是一个闭线性算子。

§5.1

1. (*a*) 一致扩张，(*b*) 平面反射，在空间中绕定轴的旋转，平面到任一直线上的投影恒等映射。

2. 1/2。

3.4. (略)

5. 两个不动点x和$y\neq x$的存在将蕴含着这样的矛盾

$$d(x,\ y)=d(Tx,\ Ty)<d(x,\ y)$$

6. 首先有$d(T^nx,\ T^ny)\leqslant\alpha^nd(x,y)$，$\alpha<1$。由$(\xi_1,\xi_2)\longmapsto(\xi_2,0)$定义的映射$T$：$R^2\longrightarrow R^2$不是压缩的，但是$T^2$由$(\xi_1,\xi_2)\longrightarrow(0,0)$给出。

7. 对于$d(x_1,x_2)<\delta=\varepsilon/\alpha$有$d(Tx_1,\ Tx_2)<\varepsilon$。

8. 在（3）中用$m-1$代替m可得到第二个结论：

$$d(x_{m-1},\ x_m)\leqslant\alpha^{m-1}d(x_0,x_1)$$

9. (略)

10 g是压缩的，因为据微分中值定理有

$$|g(x)-g(y)|=|x-y||g'(\xi)|\leqslant\alpha|x-y|,$$

其中ξ位于x与y之间。

11. 据微分中值定理有

$$|g(x)-g(y)|=|x-y||g'(\xi)|\leqslant\alpha|x-y|$$

其中ξ位于x与y之间。应用5.1-4，利用习题9。

12. $x_n=g(x_{n-1})$，$g(x)=x-f(x)/2k_2$，这时有

$$\frac{1}{2}\leqslant g'(x)\leqslant 1-k_1/2k_2<1\text{（见习题10）。}$$

13. (*a*)$x_1=0.500$，$x_2=0.800$，$x_3=0.610$。是。

(b) $|g'(x)| \leqslant 3\sqrt{3}/8 < 0.65 = \alpha$（由$g''(x)=0$给出$x=1/\sqrt{8}$，$|g'|$有最大值）；这一$\alpha$提供了误差界限0.93，0.60，0.39（误差分别为0.18，0.12，0.07）。(c) $1-x^3$的导数在根（0.682328）的附近其绝对值大于1，所以不能指望收敛。

14. 0.707107，0.686589，0.683097。导数g'在1处为零，并且在根的附近很小。

15. 由于$f(\hat{x})=0$，故中值定理给出

$$|f(x)| = |f(x)-f(\hat{x})| = |f'(\xi)||x-\hat{x}| \leqslant k_1 |x-\hat{x}| \quad (k_1>0)。$$

由于$\hat{x}$是单根，故$f'(x)$在$\hat{x}$的一个闭邻域N上不等于零，$N\subset[a,b]$，f''在N上是有界的，并且对任一$x\in N$在$|x-\hat{x}|<1/2k_1k_2$的前提下，有

$$|g'(x)| = \frac{|f(x)f''(x)|}{f'(x)^2} \leqslant k_2 |f(x)| \leqslant k_1k_2 |x-\hat{x}| < \frac{1}{2}$$

16. $x=\sqrt{c}$，$f(x)=x^2-c=0$，$f'(x)=2x$，并且由牛顿法可得所述公式。条件是$x>\sqrt{c/3}$，诸值为

$x_1=1.500000$，$x_2=1.416667$，$x_3=1.414216$，

$x_4=1.414240$（精确到6位小数）。

17. 当$m=1$时是真的。假定公式对任一$m\geqslant 1$都是成立的，则有

$$d(T^{m+1}x,\ S^{m+1}x) \leqslant d(TT^mx,\ TS^mx)+d(TS^mx,\ SS^mx)$$

$$\leqslant \alpha d(T^mx,\ S^mx)+\eta \leqslant \alpha\eta\frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}+\eta$$

18. 据假设$x=Tx=T^nx$，$y=S^ny$，又据习题17知，有

$$d(x,y)=d(T^nx,S^ny) \leqslant d(T^nx,T^ny)+d(T^ny,S^ny)$$

$$\leqslant \alpha^n d(x,y)+\eta\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

因此有

$$(1-\alpha^n)d(x,y) \leqslant \eta\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

两边用$1-\alpha^n$除便得所要求的结果。

19. 该公式是对y_m的一个误差估计，且从

$$d(x,y_m) \leqslant d(x,T^my_0)+d(T^my_0,S^my_0)$$

$$\leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha}d(y_0,Ty_0)+\eta\frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}$$

$$\leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha}[d(y_0,Sy_0)+\eta]+\eta\frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}$$

推得。

20. (a)若$k<1$。(b)由微分中值定理得

$$|Tx-Ty| = |T'_{\xi}||x-y|$$

其中ξ位于x与y之间。(c) 否。

§5.2

1.(略)

2.(a) $\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$。($b$) 是，$\begin{pmatrix}1.60\\2.70\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1.94\\2.88\end{pmatrix}$，0.146，0.219，误差为0.120。

(c) $C=\begin{pmatrix}0 & 0.20\\0 & 0.06\end{pmatrix}$，是。$\begin{pmatrix}1.60\\2.88\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1.976\\2.993\end{pmatrix}$，0.094，0.094，误差为0.024。

3.

(a) $\begin{pmatrix}1.00\\1.00\\0.75\\0.75\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0.9375\\0.9375\\0.6875\\0.6875\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0.90625\\0.90625\\0.65625\\0.65625\end{pmatrix}$，…

(b) $\begin{pmatrix}1.0000\\1.0000\\0.7500\\0.6875\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0.9375\\0.9063\\0.6563\\0.6407\end{pmatrix}$，…

4.据(5)及盖尔斯果林定理可得，对C的每个特征值λ有$|\lambda|<1$。数μ为$K=I-C$的特征值当且仅当$\mu=1-\lambda$，其中λ为C的某一特征值。因此，$|\lambda|=|1-\mu|<1$，据此可知$\mu\neq0$。

5.对应于这两个方法的两个序列为

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\cdots$$

及

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2.0\\1.0\\0.5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1.2500\\1.1250\\0.8125\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1.0312500\\1.0781250\\0.9453125\end{pmatrix},\cdots$$

6.对于雅可比和高斯-赛德尔迭代，分别对应着矩阵

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\1 & 0 & 0\\1/3 & 2/3 & 0\end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\0 & 0 & -1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

前一个矩阵的特征方程为$\lambda^3+\lambda/3+2/3=0$。用牛顿法所得到的第一个特征根为$\lambda_1=-0.748$，于是另外两个特征根的绝对值必小于1，因为它们是一对共轭复数且三根之积的绝对值等于2/3(特征方程的常数项)。另一矩阵的特征值是-1和0。

7. $d_1(Tx,Tz)=\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}c_{jk}(\xi_k-\zeta_k)\right|$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|c_{jk}\right|\left|\xi_k-\zeta_k\right|$$

$$\leqslant\Bigl(\max_k\ \sum_{j=1}^{n}\left|c_{jk}\right|\ \sum_{k=1}^{n}\left|\xi_k-\zeta_k\right|$$

8. 据柯西-许瓦兹不等式（§1.2）有

$$d(Tx,Tz)^2=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}c_{jk}(\xi_j-\zeta_j)\right]^2$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}c_{jk}^2\sum_{s=1}^{n}(\xi_s-\zeta_s)^2\right]$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{k=1}^{n}c_{jk}^2\right]d(x,z)^2$$

9. 在(10)中有$D^{-1}=\mathrm{diag}(1/a_{jj})$。

10. 例如，$\begin{pmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.8 & -0.1\end{pmatrix}$。

§5.3

1. 应用微分中值定理。

2. 这可从下式

$$\left|\sin x_2-\sin x_1\right|=2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\left|\cos\frac{x_2+x_1}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\frac{x_2-x_1}{2}\right|\cdot 1=\left|x_2-x_1\right|$$

得出。$Lipschitz$条件比可微性弱。

3. 在包含t-轴（$x=0$）上的点的区域内不满足。

4. $x(0)=x_0\neq 0$，$x(0)=0$，$x(t_0)=x_0$（$t_0\neq 0$）。

5. 据（2），，解曲线必定落在穿过(t_0,x_0)的两条直线之间，并且这两直线的斜率为$-c$和c；而对于任一满足$|t-t_0|<b/c$的$t\in[t_0-a,\ t_0+a]$，该曲线不能离开R。此外，$\beta k=\alpha<1$意味着T是压缩的。

6. 对于任一$x\in\overline{\tilde{C}}$，存在$x_n\in\tilde{C}$使得当$n\longrightarrow\infty$时有$d(x_n,\ x)\longrightarrow 0$。因此有

$$|x(t)-x_0|\leqslant|x(t)-x_n(t)|+|x_n(t)-x_0|$$
$$\leqslant d(x,x_n)+c\beta\longrightarrow c\beta$$

7. 课文中的证明表明了，对于新的选择，T仍是$\tilde{C}$到自己的一个压缩。

8. $x_3(t)=t+(1/3)t^3+(2/15)t^5+(1/63)t^7$，$x(t)=\tan t$。

9. 在含有$x=0$的一个区域内不满足。

10. 否，$x_3(t)=\max\{0,t|t|/4\}$，$x_4(t)=\max\{0,t|t|/4\}$。

§5.4

1. 我们得到

$$x_n(t)=v(t)+\mu k_0 e^t(1+\mu+\cdots+\mu^{n-1}),$$

$$x(t)=v(t)+\frac{\mu}{1-\mu}k_0 e^t,\ \ k_0=\int_0^1 e^{-\tau}v(\tau)d\tau。$$

2. 将给定的方程写为$x=Tx$，便定义了映射T：$C[a,b]\longrightarrow C[a,b]$，则据

$$|Tx(t)-Ty(t)|<|\mu|(b-a)l\max|x(t)-y(t)|$$
$$<d(x,y)$$

知T是压缩的。

3. (a)非线性Volterra方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(\tau,x(\tau))d\tau$$

(b) 经过两次微分便可验证该方程为

$$x(t)=\int_{t_0}^t (t-\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau+(t-t_0)x_1+x_0$$

4. (略)

5. (a) $x(t)=1+\mu+\mu^2+\cdots=1/(1-\mu)$。

(b) 该积分是一个未知常数c。因此$x(t)=1+\mu c$。将它代入到积分号内,便得到$c=1/(1-\mu)$。

6. 该积分是一个未知常数，因此$x(t)=v(t)+k_0$。将它代入方程便有

$$v(t)+k_0-\mu c\int_a^b(v(\tau)+k_0)d\tau=v(t)$$

由此可解出k_0，利用这个k_0便得到

$$x(t)=v(t)+k_0=v(t)+\frac{\mu c}{1-\mu c(b-a)}\int_a^b v(\tau)d\tau$$

对于$|\mu c(b-a)|<1$，即$|\mu|<1/c(b-a)$，右边的表达式可展为μ的幂级数。如果我们选取c使得$|k(t,\tau)|\leqslant c$，并选取v满足$|v(t)|\leqslant v(t)$,则该诺伊曼级数就优于(1)中的Neumann级数。

7.8. (略)

9. $k_{(2)}=0$，$k_{(3)}=0\cdots$，$x(t)=v(t)+\mu\int_0^{2\pi}k(t,\tau)v(\tau)d\tau$。

§6.2

1. 当且仅当$x\in Y$ (据2.4-3)。

2. 设$\delta=\delta(x,y)=\inf\limits_{y\in Y}d(x,y)$。由于$d$连续地依赖于$y$，故它在紧集$Y$上的某一$y_0$上取最小值（见2.5-7）。因此$\delta=d(x,y_0)$，并且据定义，$y_0$是$x$在$Y$中的最佳逼近。

3. 这个可从三角不等式推出；事实上，令$\beta=(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_n)$，利用§2.2中的（2）可得到

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\leqslant\|\sum(\beta_j-\alpha_j)e_j\|\leqslant\max_k|\beta_k-\alpha_k|\sum\|e_j\|$$

4. 设$\mu=1-\lambda$，则$x=\lambda x+\mu x$且

$$\begin{aligned}f(\lambda\alpha+\mu\beta)&=\|x-\sum(\lambda\alpha_j+\mu\beta_j)e_j\|\\&\leqslant\lambda\|x-\sum\alpha_je_j\|+\mu\|x-\sum\beta_je_j\|\\&=\lambda f(\alpha)+\mu f(\beta)\end{aligned}$$

5. 取$x=(1,0)$，$y=(0,1)$便有$\|x+y\|_1=2$。

6. $\delta=1$，$y=(1,0)$。本题说明对某些点仍有唯一的最佳逼近。

7. $\|(1,0)+(1,1)\|=2=\|(1,0)\|+\|(1,1)\|$

8. (a)$(1,1)$，$(1,-1)$；(b)$(\xi_1,\ \xi_2)$ 适合$2-\sqrt{2}\leqslant\xi_1\leqslant\sqrt{2}$，$\xi_2=\pm\sqrt{2}$。

9. (a)$(0,0)$，(b)线段$\xi_1=0$，$-1\leqslant\xi_2\leqslant1$，(c)$(0,0)$。

10. $x=(2/3,\ 1/3,\ 0,\ 0,\ \cdots)$，$y=(1/3,\ 2/3,\ 0,\ 0,\ \cdots)$，$\|x\|=1$，$\|y\|=1$，$\|x+y\|=2$。

11. 从引理6.2-1立即可以推出。

12. 据三角不等式得

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|\leqslant1$$

如果该式对某个$\alpha=\alpha_0\in(0,1)$有等号成立，则据3.2-1知α_0x与$(1-\alpha_0)y$是线性相关的，不妨设

$$\alpha_0x=c(1-\alpha_0)y,\quad c>0$$

因此有

$$\|x\|=c\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\|y\|$$

因为$\|x\|=\|y\|=1$，故$c(1-\alpha_0)/\alpha_0=1$。此时便有$x=y$。这与$x\neq y$矛盾。为证明充分性，只要取$\alpha=1/2$便得到$\|x+y\|/2<1$。

13. 我们置

$$x_1=\|x\|^{-1}x,\ \ y_1=\|y\|^{-1}y,\ \ \alpha=\|x\|/(\|x\|+\|y\|)$$

便有$\|x_1\|=\|y_1\|=1$，且给定的等式提供了

$$\begin{aligned}1=\frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|}&=\left\|\frac{x}{\|x\|+\|y\|}+\frac{y}{\|x\|+\|y\|}\right\|\\&=\|\alpha x_1+(1-\alpha)y_1\|\end{aligned}$$

由于X是严格凸的，据习题12有$x_1=y_1$，因此有$x=cy$，其中$c=\|x\|/\|y\|>0$。

14．若假设条件成立但X不是严格凸的，则由严格凸的定义，存在范数为1的x和$y\neq x$，且满足$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$。据假设$x=cy$对某个实数$c>0$成立，故$\|x\|=c\|y\|=1$，$c=1$，$x=y$；但这与$x\neq y$矛盾。

15．从以下事实立即可以推出：在严格凸性的情况，单位球面不含有直线段。

§6.3

1．从包括（1）的论断便可推出，它是说（1）中的n个行矢量是线性无关的。

2．(a) 是．(b) 否。

3．这些是（1）中行列式的列矢量，在线性无关的情形下，该行列式正好不为零。

4．设$p(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_{n-1}t^{n-1}$，若在$t_1,t_2,\cdots,t_n$处取指定值$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$，则便给出$n$个条件$p(t_j)=\beta_j$，$j=1,2,\cdots,n$，该方程组的系数行列式是一个不为零的范德蒙行列式，因为诸t_j互不相等。这就唯一地确定了系数$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$。

5．否则，存在$y_0\in Y$满足

$$\|x-y_0\|<\min_j|x(t_j)-y(t_j)|$$

则$y_0-y=x-y-(x-y_0)\in Y$在$n+1$个点$t_1,t_2,\cdots,t_{n+1}$处必定和$x-y$取相同的符号；因此它必定在$[a,b]$中的n个或更多的点上为零，据哈尔条件这是不可能的。

6．$\tilde{y}(t)=1-(e-1)t$在0和1处有偏差0，且在$t=\ln(e-1)$处有极大偏差$k=2-e+(e-1)\ln(e-1)$，在该点$(e^t-\tilde{y}(t))'=0$。因此得到$y(t)=\tilde{y}(t)-k/2$，偏差$\delta=k/2=0.11$。对于由$1+t$所定义的台劳多项式，其偏差要大的多（0.72）。

7．$\tilde{y}(t)=t$在0和1和$x(t)$是一致的，并且$(x(t)-\tilde{y}(t))'=0$给出了$\cos(\pi t/2)=2/\pi$，$t=t_0=(2/\pi)\arccos(2/\pi)=0.56$。此外，$x(t_0)-\tilde{y}(t_0)=0.211$。$y(t)=\tilde{y}(t)+0.211/2$。

8．α_2是弦AB的斜率且在c点的切线与弦平行。y表示与AB及切线保持等距的直线，见图P 2，此处$x''(t)>0$。

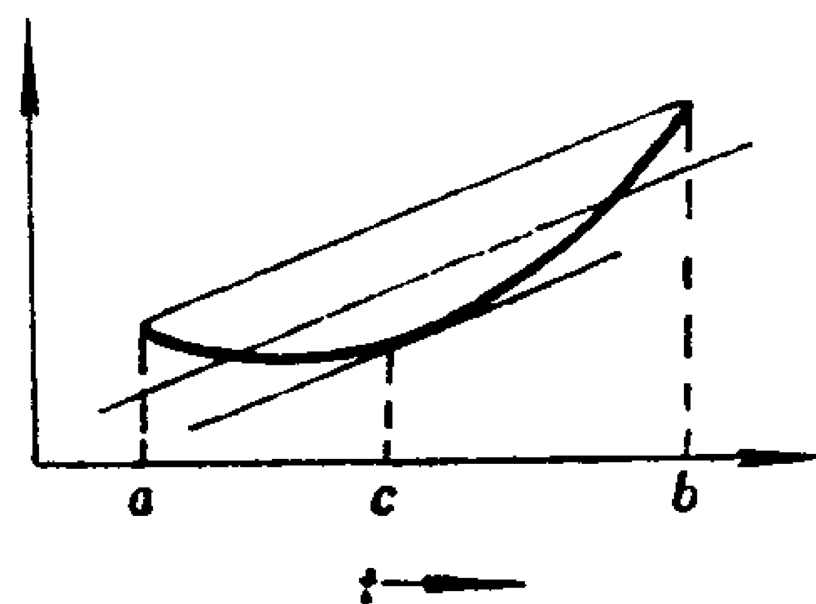


图 p2　习题8

9．把$\beta_1,\cdots,\beta_r$看作为函数x在$t_1,\cdots,t_r$的r个值，并且把$\gamma_{1k},\cdots,\gamma_{rk}$（$k$固定）看作为$y_k$在$t_1,\cdots,t_r$的值，则可看到，在$y=\sum\alpha_k y_k$中$\zeta_1$，$\zeta_2,\cdots,\zeta_n$对应于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，并且（1）成为

$$\begin{vmatrix} \gamma_{j_1 1} & \gamma_{j_2 1} & \cdots & \gamma_{j_n 1} \\ \gamma_{j_1 2} & \gamma_{j_2 2} & \cdots & \gamma_{j_n 2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \gamma_{j_1 n} & \gamma_{j_2 n} & \cdots & \gamma_{j_n n} \end{vmatrix} \neq 0$$

其中$\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}$是从$\{1, 2, \cdots, r\}$中取出的$n$个数。

10．$\max\{|1-\zeta|, |2-\zeta|\}$将是极小。若画出$1-\zeta$，$\zeta-1$，$2-4\zeta$，$4\zeta-2$，可看出极小在$\zeta=3/5$取到，从$1-\zeta=4\zeta-2$可以得到。见图$P$3。

§6.4

1. $T_6(t)=32t^6-48t^4+18t^2-1$

2. 由（8）及（11*）有

$$y(t)=t^3+t^2-T_3(t)/4=t^2+3t/4$$

极大偏差为1/4。

3. 在[0，π]中的$\theta_j=(2j-1)\pi/2n$，$j=1,\cdots n$上有$\cos n\theta=0$，且$t=\cos\theta$，所以零点是$t=\cos\left[(2j-1)\pi/2n\right]$。

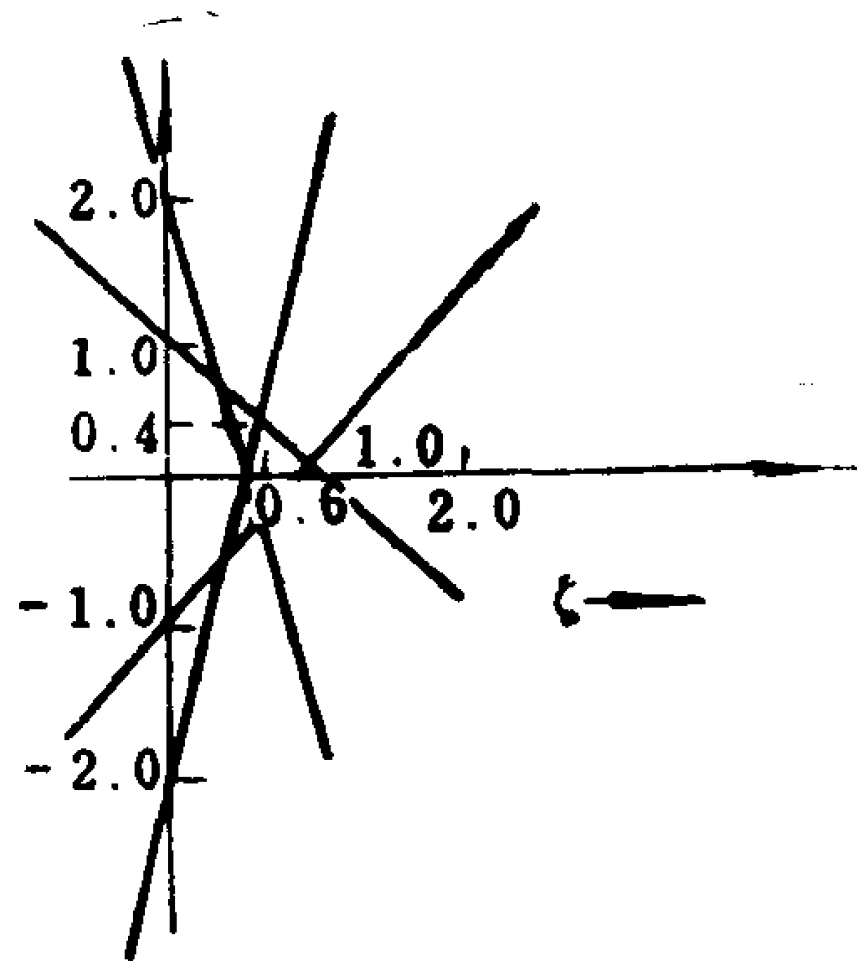


图 p3 习题10

4. T_n的相邻零点为

$$t_k^{(n)}=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\qquad t_{k+1}^{(n)}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

现证T_{n-1}在$t_k^{(n-1)}=\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n-2}$处的第$k$个零点位于上两个零点之间。由于余弦函数在（0，π）上是单调的，故只须证明

$$\frac{2k-1}{2n}<\frac{2k-1}{2n-2}<\frac{2k+1}{2n}$$

即可。前一个不等式是显然的，而第二个不等式等价于$2k<2n-1$；由于$k<n$，故该不等式成立。由于T_n有n个零点，所以存在有$n-1$个由相邻零点所分成的区间，每个这样的区间都含有T_{n-1}的一个零点。又由于T_{n-1}是$n-1$次的，所以它不能有更多的零点，故证明了我们的断言。

5. 否则，据(10)T_{n-2}将在同一个点等于零，重复这一结论，将会得到：对某个t有$T_0(t)=0$，而由于$T_0(t)=1$，这是不可能的。

6. 设$x(\tau)=\beta_n\tau^n+\cdots$，$\tau\in[a,b]$。令$\tau=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2}t$，则$t\in[-1,1]$且有

$$x(\tau)=\gamma_n t^n+\cdots,\ 其中\gamma_n=\beta_n\left(\frac{b-a}{2}\right)^n$$

由于$n\geqslant1$时T_n的首项系数是2^{n-1}且$\|T_n\|=1$，故据定理6.4-3知

$$\|x\|\geqslant\frac{|\gamma_n|}{2^{n-1}}=|\beta_n|\cdot\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

7. 设$v(\theta)=\cos n\theta$，则$v''+n^2v=0$。置$t=\cos\theta$。

8. 若a或b是负整数或零，则级数变成有限和。若令$\tau=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\theta$，$a=-n$，$b=n$，$c=\dfrac{1}{2}$，则由超几何微分方程可得

$$\frac{d^2v}{d\theta^2}+n^2v=0$$

这里$w(z)=v(\theta)$。解$v(\theta)=T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$由$v(0)=1$及$\dot{v}(0)=1$确定，其中$\dot{v}=\dfrac{dv}{d\theta}$，$\theta=0$与$\tau=0$对应。我们有$w(0)=1$，还有

$$\frac{dw}{d\tau}=\frac{dv}{d\theta}\Big/\frac{d\tau}{d\theta}=\frac{-n\sin n\theta}{(\sin\theta)/2}\longrightarrow -2n^2 \qquad (\theta\longrightarrow 0)$$

这与从超几何级数所得到的$w'(0)=-2n^2$是一致的。

9．置$t=\cos\theta$，则可看出积分变成

$$\int_\pi^0\frac{1}{\sin\theta}\cos n\theta\cos m\theta\ (-\sin\theta)d\theta$$

10．从欧拉公式（见4.7-5）得到

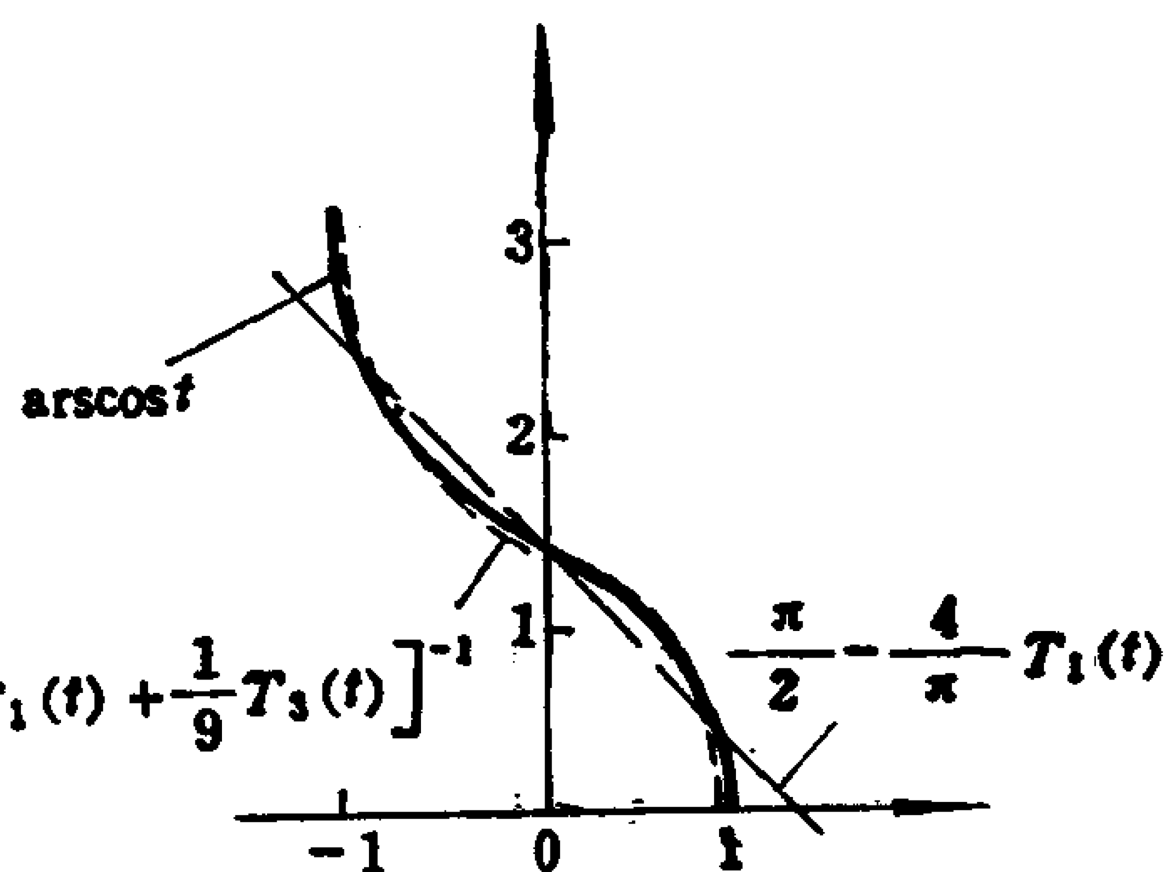
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{x}(\theta)\cos n\theta d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\theta\cos n\theta d\theta$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi}\qquad (n=1,3,5,\cdots)$$

因此有

$$\tilde{x}(\theta)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\Big(\cos\theta+\frac{1}{9}\cos 3\theta+$$

$$+\frac{1}{25}\cos 5\theta+\cdots\Big)$$



图P4 习题10

$$\text{arc}\cos t=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\Big[T_1(t)+\frac{1}{9}T_3(t)+\frac{1}{25}T_5(t)+\cdots\Big]$$

见图$P4$。

§6.5

1.2.（略）

3．利用定理6.5-1和线性无关集合的子集是线性无关的事实，便可证得。类似地，

$$G(y_1,\ \cdots,\ y_n,\ y_{n+1},\ y_p)=0$$

4．$G(x,\ y)\geqslant 0$，此外，当且仅当$\{x,y\}$是线性相关集时有$G(x,y)=\|x\|^2\|y\|^2-|\langle x,\ y\rangle|^2=0$。

5．当$n=1$时不等式成立。假若它对任一n都成立，利用（5），并将x换成y_{n+1}，便得到

$$G(y_1,\cdots,y_{n+1})=G(y_{n+1},y_1,\cdots y_n)=\|z\|^2G(y_1,\cdots,y_n)\geqslant 0$$

现从定理6.5-1立即可得到第二个结论

6．$x=y+z$，其中$z\perp\text{span}\{y_1,\cdots,y_n\}$，并且

$$G(x,y_1,\cdots,y_k)=G(z,y_1,\cdots,y_k)=\begin{vmatrix}\langle z,z\rangle & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \langle y_1,y_1\rangle & \cdots & \langle y_1,y_k\rangle\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & \langle y_k,y_1\rangle & \cdots & \langle y_k,y_k\rangle\end{vmatrix}$$

$$=\|z\|^2G(y_1,\cdots,y_k)$$

7．利用（5）和下面的不等式，由定理6.5-2关于z的解释这些不等式是显而易见的，有

$$\min_{\alpha}\|y_k-\alpha_{k+1}y_{k+1}-\cdots-\alpha_n y_n\|$$

$$\leqslant\min_{\beta}\|y_k-\beta_{k+1}y_{k+1}-\cdots-\beta_m y_m\|$$

及

$$\min_{\alpha}\|y_m-\alpha_{m+1}y_{m+1}-\cdots-\alpha_n y_n\|\leqslant\|y_m\|$$

8．由于

$$\frac{G(y_1,\cdots,y_n)}{G(y_1,\cdots,y_m)}\leqslant\frac{G(y_2,\cdots,y_n)}{G(y_2,\cdots,y_m)}\leqslant\cdots\leqslant$$

$$\leqslant\frac{G(y_m,\cdots,y_n)}{G(y_m)}\leqslant G(y_{m+1},\cdots,y_n)$$

从而由习题7立即得到所要求的不等式。等号成立当且仅当

$$\min_{\alpha}\|y_m-\alpha_{m+1}y_{m+1}-\cdots-\alpha_n y_n\|=\|y_m\|$$

由此可得$y_m\perp M_2$，且

$$\min_{\alpha}\|y_k-\alpha_{k+1}y_{k+1}-\cdots-\alpha_n y_n\|$$
$$=\min_{\beta}\|y_k-\beta_{k+1}y_{k+1}-\cdots-\beta_n y_n\|$$

由此可得$y_{m-1}\perp M_2$（$k=m-1$），$y_{m-2}\perp M_2$（$k=m-2$）等等。

9．从习题8立即可推出第一个论断，为证明第二个论断，取$y_j=(\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jn})$。则从类似于行列式乘积的公式直接可推出$(\det A)^2=G(y_1,\cdots,y_n)$。还有$\langle y_j,y_j\rangle=a_j$。

10．由定理6.5-2推出。

§6.6

1．$n+3$。

2．据定理6.6-1可证明存在性及唯一性。$\{y_0,\cdots,y_{n+2}\}$是一个基，其中$y_{n+1}(t)=t$，$y_{n+2}(t)=t^2$。

3．我们求得

$$y(t)=\begin{cases}-2t^3-t^2, & -1\leqslant t<0\\ 2t^3-t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

4．$\tilde{y}(t)=x(t)-T_4(t)/8=t^2-1/8$。否。

5. 1/8对1/16，但这与契比雪夫多项式的极小性并不矛盾，因为样条函数不是一个多项式。

6. (略)

7. $y(t)=-4t^3/\pi^3+3t/\pi$。

8. 曲率是$x''/(1+x'^2)^{3/2}$。若$|x'|$很小，则它近似地等于x''。

9. 正交性$\langle y,x-y\rangle_2=0$蕴含着

$$p(x-y)^2=p(x)^2-p(y)^2\geqslant 0$$

所以$p(x)^2\geqslant p(y)^2$，此即（6）。

10. 可以得到

$$\begin{aligned}\|x-y\|_2^2&=\langle x-y,x-y\rangle_2\\&=\langle x,x\rangle_2-2\langle x-y,\ y\rangle_2-\langle y,y\rangle_2\\&=p(x)^2-p(y)^2\\&\leqslant p(x)^2\end{aligned}$$

§7.1

1. 3，$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，9，$\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$；$a+ib$，$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$，$a-ib$，$\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$。

2. 首先有

$Ax=\lambda x\quad(x\neq 0)$，$\bar{x}^TAx=\bar{x}^T\lambda x=\lambda\bar{x}^Tx$，因此得到

$$\lambda=\frac{\bar{x}^TAx}{\bar{x}^Tx}$$

$\bar{x}^Tx$是实的，而由于分子$N=\bar{x}^TAx$满足

$$\begin{aligned}\bar{N}=\bar{N}^T&=\overline{(\bar{x}^TAx)}^T=(x^T\bar{A}\bar{x})^T\\&=\bar{x}^T\bar{A}^Tx=\bar{x}^TAx=N\end{aligned}$$

故也是实的。

3. 首先有$Ax=\lambda x(x\neq 0)$，$\bar{x}^TAx=\bar{x}^T\lambda x=\lambda\bar{x}^Tx$；因此有

$$\lambda=\frac{\bar{x}^TAx}{\bar{x}^Tx}$$

$\bar{x}^Tx$是实的，由于分子$N=\bar{x}^TAx$满足

$$\bar{N}=\bar{N}^T=\overline{(\bar{x}^TAx)}^T=(x^T\bar{A}\bar{x})^T=\bar{x}^T\bar{A}^Tx=-\bar{x}^TAx=-N$$

故是纯虚数或零。

4. 因为

$$\begin{aligned}Ax=\lambda x(x\neq 0)&\Rightarrow(\bar{A}\bar{x})^T=\bar{x}^T\bar{A}^T=\bar{\lambda}\bar{x}^T\\&\Rightarrow\bar{x}^TA^{-1}=\bar{\lambda}\bar{x}^T\end{aligned}$$

把第一个等式与最后一个等式相乘，便有

$$\bar{x}^T A^{-1} A x = \bar{\lambda}\bar{x}^T \lambda x \Rightarrow \bar{x}^T x = |\lambda|^2 \bar{x}^T x,$$

由于$\bar{x}^T x \neq 0$，故$|\lambda|^2 = 1$。

5．从习题2和4可以推出。也可看3.10-2。

6．若$\alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0 = 0$，则诸根之积为$(-1)^n \alpha_0/\alpha_n$；而对于特征多项式有$\alpha_n = (-1)^n$，且$\alpha_0 = \det A$；诸根之和为$-\alpha_{n-1}/\alpha_n$，由此便得第二个结果。

7．A^{-1}存在当且仅当$\det A \neq 0$，由于$\det A$是特征多项式的常数项，故$\det A$是A的n个特征值的积，这时要求特征多项式的首项系数为$(-1)^n$。为了得到第二个论断，只要在$Ax_j = \lambda_j x_j$的两端左乘上A^{-1}就够了。

8．注意A^{-1}的特征方程可写成

$$(a_{22} - \mu)(a_{11} - \mu) - a_{12}a_{21} = 0$$

其中$\mu = \lambda D$，$D = \det A = \lambda_1 \lambda_2$，于是有

$$\lambda = \mu/D = \lambda_1/\lambda_1\lambda_2 = 1/\lambda_2$$

等等。

9．利用归纳法，并用A左乘$A^{m-1}x_j = \lambda_j^{m-1}x_j$，便得到

$$A^m x_j = \lambda_j^{m-1} A x_j = A_j^{m-1} \lambda_j x_j$$

10．用归纳法。对于任一零次多项式结论为真。假设结论对于任一$m-1$次多项式p_{m-1}亦真，即

$$p_{m-1}(A)x_j = p_{m-1}(\lambda_j)x_j$$

则对于任一m次多项式p_m，由习题9有

$$\begin{aligned} p_m(A)x_j &= [k_m A^m + p_{m-1}(A)]x_j \\ &= k_m \lambda_j^m x_j + p_{m-1}(\lambda_j)x_j \\ &= p_m(\lambda_j)x_j \end{aligned}$$

11．由于$x_j = Cy_j$，故有

$$C^{-1}ACy_j = C^{-1}Ax_j = C^{-1}\lambda_j x_j = \lambda_j C^{-1}x_j = \lambda_j y_j$$

12．$\lambda = 1$，$(1, 0)^T$。

13．$\lambda = 1$，代数重数为n，几何重数为1，特征矢量为$(1,0,0\cdots,0)^T$。

14．设Y_0为A的对应于特征值λ_0的特征空间，并设$\dim Y_0 = m$，则A将Y_0映到Y_0中。设A_0是这一映射$Y_0 \longrightarrow Y_0$的矩阵，则有

$$\det(A_0 - \lambda I_0) = (\lambda_0 - \lambda)^m$$

（I_0是m阶单位矩阵）且它是$\det(A - \lambda I)$的一个因子，于是从代数重数的定义可得所希望的结果。

15．$Tx = x' = \lambda x$，$\lambda = 0$，$x(t) = 1$，因为在$\lambda \neq 0$时$x(t) = e^{\lambda t}$不是一个多项式；代数

重数为n，几何重数为1。

§7.2

1. $\sigma(I)=\{1\}=\sigma_p(I)$，对应于1的特征空间是$X$，且$R_\lambda(I)=(1-\lambda)^{-1}I$对一切$\lambda\neq 1$是有界的。

2. 从诸定义可直接得到。

3. （略）

4. 表示T的矩阵的后$n-m$行与前m列的交叉处的元皆为零。

5. $Y_n=\operatorname{span}\{e_n, e_{n+1}, \cdots\}$

6. 由$\lambda\in\sigma_p(T)$可得$\lambda\in\sigma_p(T_1)$，扩张不仅保留已有的特征矢量，还有可能引入新的特征矢量。

7. 设$\lambda\in\sigma_r(T_1)$，则$T_{1\lambda}^{-1}$存在且其定义域在X中不是稠密的。而$\mathscr{D}(T_1)\supset\mathscr{D}(T)$意味着$\mathscr{D}(T_{1\lambda})\supset\mathscr{D}(T_\lambda)$及$\mathscr{R}(T_{1\lambda})\supset\mathscr{R}(T_\lambda)$，故$\mathscr{R}(T_\lambda)$在$X$中不能是稠密的，并且$\lambda\in\sigma_r(T)$。

8. 设$\lambda\in\sigma_c(T)$，则T_λ^{-1}存在，无界且其定义域$\mathscr{R}(T_\lambda)$在X中稠密。由于T_1是T的一个扩张，所以有$\mathscr{D}(T)\subset\mathscr{D}(T_1)$。因此$\mathscr{R}(T_\lambda)\subset\mathscr{R}(T_{1\lambda})$。于是$\mathscr{R}(T_{1\lambda})$在$X$中稠密。由于$T_\lambda^{-1}$是无界的，故要末$T_{1\lambda}^{-1}$无界（此时$\lambda\in\sigma_c(T_1)$），要末$T_{1\lambda}^{-1}$不存在（此时有$\lambda\in\sigma_p(T_1)$）。

9. 设$\lambda\in\rho(T_1)$，则$T_{1\lambda}^{-1}$存在且有界，$\mathscr{R}(T_{1\lambda})$在$X$中是稠密的。因此，$T_\lambda^{-1}$存在，有界且其定义域$\mathscr{R}(T_\lambda)\subset\mathscr{R}(T_{1\lambda})$可以在$X$中稠密（则$\lambda\in\rho(T)$），也可在$X$中不稠密（则$\lambda\in\sigma_r(T)$）。

10. 首先有

$$\rho\cup\sigma_p\cup\sigma_c\cup\sigma_r=\rho_1\cup\sigma_{p_1}\cup\sigma_{c_1}\cup\sigma_{r_1}$$

等式左端诸项是关于算子T的，而右端诸项是关于T_1的。据习题6和8有

$$\sigma_p\cup\sigma_c\subset\sigma_{p_1}\cup\sigma_{c_1}$$

因此，由于等式右端的诸集是不相交的，故可得所希望的结果：

$$\rho\cup\sigma_r\supset\sigma_{r_1}\cup\rho_1$$

§7.3

1. $\sigma(T)$是v的值域，而由于v是连续的，在紧集$[0,1]$上有极大和极小值，故$\sigma(T)$是一个闭区间。

2. 例如，$Tx=vx$，此处$v(t)=a+(b-a)t$。

3. $\{\lambda\}$。

4. $\sigma_p(T)=(\alpha_j)$；$\sigma(T)$是闭的，$\sigma(T)=[0,1]$。

5. $T_\lambda(l^2)$在l^2中稠密，因此$\lambda\notin\sigma_r(T)$，所以$\lambda\in\sigma_c(T)$。

6. 由于C是可分的（见1.3-7），所以K也是可分的，设(α_j)在K中稠密，则诸α_j是T

的特征值，且$\sigma(T)=K$。

7．设$|\lambda|>\|T\|$且$y=T_\lambda x$，则

$$\|y\|=\|\lambda x-Tx\|\geqslant|\lambda|\,\|x\|-\|Tx\|\geqslant(|\lambda|-\|T\|)\|x\|;$$

因此有

$$\|R_\lambda(T)\|=\sup_{y\neq 0}(\|x\|/\|y\|)\leqslant 1/(|\lambda|-\|T\|)\|$$

8．$\lambda=-n^2(n\in N)$是特征值，于是谱无界。

9．(*a*) $\|T\|=1$；利用7.3-4。(*b*) $T_\lambda x=(\xi_2-\lambda\xi_1,\xi_3-\lambda\xi_2,\cdots)=0,Y=\{x\in X|\,x=(\alpha,\alpha\lambda,\alpha\lambda^2,\cdots),\ \alpha\in\mathbf{C}\}$。

10．否，因为$(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)\notin l^p\ (p<+\infty)$。

§7.4

1．关于$(T-\lambda I)(T-\mu I)=(T-\mu I)(T-\lambda I)$取逆。

2．我们有

$$R_\mu R_\lambda=\frac{R_\mu-R_\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{R_\lambda-R_\mu}{\lambda-\mu}=R_\lambda R_\mu$$

3．由于$R_\lambda(S)S_\lambda=I$，$T_\lambda R_\lambda(T)=I$，故有

$$\begin{aligned}R_\lambda(S)(T-S)R_\lambda(T)&=R_\lambda(S)(T_\lambda-S_\lambda)R_\lambda(T)\\&=(R_\lambda(S)T_\lambda-I)R_\lambda(T)\\&=R_\lambda(S)-R_\lambda(T)\end{aligned}$$

4．假定有可解性，则$x=p(T)^{-1}y$，其中$p(T)^{-1}$定义在整个X上。因此$0\in\rho(p(T))$，$0\notin\sigma(p(T))=\rho(\sigma(T))$，并且对一切$\lambda\in\sigma(T)$有$p(\lambda)\neq 0$。反之，若对一切$\lambda\in\sigma(T)$有$p(\lambda)\neq 0$，则$0\in\rho(p(T))$，且将7.2-3用于$p(T)$知$p(T)^{-1}$定义在整个$X$上，故对于一切$y$都可解。

5．（略）

6．若该矩阵有n个不同的特征值。

7．利用7.4-2。

8．-1，1。

9．(*a*)对于$|\lambda|>1$ 可得

$$R_\lambda(T)=-\lambda^{-1}[I-T+T(1+\lambda^{-1}+\lambda^{-2}+\cdots)$$

故有

$$R_\lambda(T)=-\lambda^{-1}(I-T)-(\lambda-1)^{-1}T$$

对于任意的$\lambda\neq 0,1$，它都是成立的。

(*b*) $p(T)=T^2-T=0$，$p(\lambda)=\lambda^2-\lambda=0$。

10．$\{0,1\}$。对应的特征矢量为

$(1,-1,0)^T$及$(1,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$

因此特征空间是$\xi_1\xi_2$平面中的直线$\xi_2=-\xi_1$和平面$\xi_1=\xi_2$。

§7.5

1. $\sigma(T)=\{0\}$，根据（10）得到。
2. 式$R_\lambda(T)=-\sum_{j=0}^{m-1}T^j\lambda^{-j-1}$对每个$\lambda\neq0$都成立。
3. $(1-\lambda^2)^{-1}(A+\lambda I)$。
4. 用结论$\|T^n\|\leqslant\|T\|^n$；见2.7。
5. 从（10）可得到

$$r_\sigma(ST)=\lim\|(ST)^n\|^{1/n}=\lim\|S^nT^n\|^{1/n}$$
$$\leqslant\lim\|S^n\|^{1/n}\lim\|T^n\|^{1/n}=r_\sigma(S)r_\sigma(T)$$

6. 对于矩阵

$$S=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix},\quad ST=\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}$$

可得到$r_\sigma(S)=0$，$r_\sigma(T)=1$，但$r_\sigma(ST)=2$。

7. $\|T\|=2$，$\|T^2\|^{1/2}=\sqrt{2}$，$\|T^3\|^{1/3}=\sqrt[3]{4}$，等等。
8. 由舒尔（Schur）不等式立即可得

$$r_\sigma(A)\leqslant\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|^2\right]^{1/2}$$

9. 利用（10）和§3.10中的习题15。
10. 由$\|T^{m+n}\|\leqslant\|T^m\|\|T^n\|$可得$b_{m+n}\leqslant b_m\cdot b_n$

只要注意α是有限的即可。设$\varepsilon>0$且$b_m/m<\alpha+\varepsilon$，则每个$n\in N$都可写成$n=gm+r$，其中r是满足$0\leqslant r\leqslant m-1$的整数。记$b_0=0$，则有

$$\frac{b_n}{n}=\frac{b_{gm+r}}{gm+r}\leqslant\frac{gb_m+b_r}{gm+r}$$
$$=\frac{b_m}{m}\cdot\frac{gm}{gm+r}+\frac{b_r}{n}$$

因此有

$$\alpha\leqslant\frac{b_n}{n}<(\alpha+\varepsilon)\frac{gm}{gm+r}+\frac{b_r}{n}$$

于是有

$$\frac{b_n}{n}=\frac{\ln a_n}{n}=\ln a_n^{\frac{1}{n}}\longrightarrow\alpha$$

且$(a_n^{1/n})=(\|T_n\|^{1/n})$收敛。

§7.6

1. $\dim X<\infty$；见2.4-2。

2．我们有

$$\|xy\| = \max|x(t)y(t)|$$
$$\leqslant \max|x(t)|\max|y(t)| \leqslant \|x\|\|y\|$$

3．利用$\|x\| = \max(|\xi_1|, \cdots, |\xi_n|)$，并用

$$(\xi_1, \cdots, \xi_n)(\eta_1, \cdots, \eta_n) = (\xi_1\eta_1, \cdots, \xi_n\eta_n)$$

定义乘法。

4．(*a*) 一切$x \neq 0$；(*b*) 对一切$t \in [a, b]$满足$x(t) \neq 0$的所有x；(*c*) 一切满秩的$n \times n$阶矩阵。

5．(略)

6．$[-1, 1] \subset \mathbf{R}$，$x$的值域。

7．(略)

8．我们有$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z$。

9．$x^{-1}y = x^{-1}y(xx^{-1}) = x^{-1}xyx^{-1} = yx^{-1}$。

10．若$x, y \in A$可以与A的所有元交换，则xy和$\alpha x + \beta y$亦然。此外，由于$a, b \in C$可与每个$x \in A$交换，所以它们彼此亦可换。

§7.7

1．定理7.7-1的明显结果。

2．由（1）得

$$\|(e-x)^{-1} - e - x\| = \|x^2 + x^3 + \cdots\| \leqslant \sum_{j=2}^{\infty}\|x\|^j = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$$

3．定理7.7-1的直接结果。

4．$\sigma(x) = \{\alpha, 0\}$

5．(略)

6．与7.4-1中的证明一样。

7．否则，A将包含一个x，它对一切$\lambda \in \mathbf{C}$都不满足$x = \lambda e$，所以对一切$\lambda \in \mathbf{C}$有$x - \lambda e \neq 0$，且$\sigma(x) = \phi$，这与定理7.7-4矛盾。

8．设$x_0 \in G$且$x \in G$满足

$$\|x - x_0\| < \frac{1}{2\|x_0^{-1}\|}$$

则

$$\|x_0^{-1}x - e\| = \|x_0^{-1}(x - x_0)\| \leqslant \|x_0^{-1}\|\|x - x_0\| < \frac{1}{2}$$

于是由习题1，$x_0^{-1}x \in G$，并且据定理7.7-1有

$$x^{-1}x_0 = (x_0^{-1}x)^{-1} = e + \sum_{j=1}^{\infty}(e - x_0^{-1}x)^j$$

从而可以得到连续性：

$$\|x^{-1}-x_0^{-1}\| = \|(x^{-1}x_0-e)x_0^{-1}\| \leqslant \|x_0^{-1}\|\,\|x^{-1}x_0-e\|$$
$$= \|x_0^{-1}\|\,\Big\|\sum_{j=1}^{\infty}(e-x_0^{-1}x)^j\Big\|$$
$$\leqslant \|x_0^{-1}\|\sum_{j=1}^{\infty}\|e-x_0^{-1}x\|^j$$
$$= \frac{\|x_0^{-1}\|\,\|e-x_0^{-1}x\|}{1-\|e-x_0^{-1}x\|}$$
$$< 2\|x_0^{-1}\|\,\|e-x_0^{-1}x\|$$
$$\leqslant 2\|x_0^{-1}\|^2\,\|x-x_0\|$$

9．考虑任一$x\neq 0$。据假设，对某一$v\in A$有$vx=e$。则$v\neq 0$，否则$0=vx=e$。令$xv=w$，则$w\neq 0$，否则

$$v=ev=vxv=vw=0$$

根据假设，对某一$y\in A$有$yw=e$，即$yxv=e$。因此v有一个左逆yx和一个右逆x。这两者是相等的（见§7.6中习题8），即$yx=x$。由于$yxv=e$（见前），故有$xv=e$。它与$vx=e$合在一起便证明了任一$x\neq 0$都有一个逆。

10．柯西序列是有界的（见§1.4的习题4），且由§7.4(6)知

$$\|x_n y_n - x_m y_m\| \leqslant \|(x_n-x_m)y_n\| + \|x_m(y_n-y_m)\|$$
$$\leqslant \|x_n-x_m\|\,\|y_n\| + \|x_m\|\,\|y_n-y_m\|$$

这就证明了$(x_n y_n)$是柯西序列。若$x_n\longrightarrow x$，$y_n\longrightarrow y$，则由此可知

$$\|x_n y_n - xy\| \leqslant \|x_n-x\|\,\|y_n\| + \|x\|\,\|y_n-y\|$$

于是便证明了$x_n y_n\longrightarrow xy$。

§8.1

1．（略）

2．若(x_n)有界，则它有子列(y_k)使得$(T_1 y_k)$收敛，且(y_k)有子列(z_m)使得$(T_2 z_m)$收敛，于是$(T_1 z_m+T_2 z_m)$收敛。

3．考虑任一$T\in\overline{C(X,Y)}$。据1.4-6(a)，在$C(X,Y)$中存在序列(T_n)按$B(X,Y)$中的范数收敛到T。因此据8.1-5 T是紧的，即$T\in C(X,Y)$。

4．由8.1-5知$C(X,Y)$在$B(X,Y)$中是闭的，因此由1.4-7及2.10-2知，$C(X,Y)$是完备的。

5．（略）

6．M有界，因此，若T是紧的，则$\overline{T(M)}$也是紧的。反之，设$\overline{T(M)}$是紧的，若B是X的任一有界子集，则有$B\subset rM=\{x\in X\mid x=ry,\ y\in M\}$对充分大的固定的$r$成立。由于$T$是线性的，所以$T(B)\subset T(rM)=rT(M)$且$\overline{T(B)}\subset r\overline{T(M)}$是紧的。

7．从定理8.1-3可以推出。

8．由于f是线性的，所以T也是线性的。由于f有界，故有

$$\|Tx\| = |f(x)|\,\|z\| \leqslant c\|x\|,\quad c = \|f\|\,\|z\|$$

因此T有界。由于$\dim T(X) \leqslant 1$，从定理8.1-4(a)可得结论。

9. 参见8.1-4(a)。

10. 将定理8.1-4及定理8.1-5结合一块来证明之。

11. 从8.1-4(a)可以推出。

12. 象8.1-6中那样处理。

13. （略）

14. 用8.1-6中定义的T_n: $l^\infty \longrightarrow l^\infty$，可得到

$$\|(T - T_n)x\| = \sup_{j>n} \frac{|\xi_j|}{j} \leqslant \frac{\|x\|}{n+1}$$

再应用8.1-5。

15. $\overline{A}$是紧的。$T(\overline{A})$是紧的（据2.5-6）且是闭的（据2.5-2）。因此$T(A) \subset T(\overline{A})$蕴含着$\overline{T(A)} \subset \overline{T(\overline{A})} = T(\overline{A})$，所以$\overline{T(A)}$是紧的（据§2.5习题9）且$T(A)$是相对紧的。

§8.2

1. 对于一个给定的$\varepsilon>0$，空间X有一个$\varepsilon/2$-网$M = \{x_1, \cdots, x_s\}$。因此Y落在s个球$B(x_1; \varepsilon/2)$，…，$B(x_s; \varepsilon/2)$的并集内。由于Y是无限集，故这些球之一必定包含Y的一个无限子集Z。

2. 设(x_n)是X中的柯西序列，由于X是紧的，所以(x_n)有收敛的子列(x_{n_k})，不妨设当$k \longrightarrow \infty$时有$x_{n_k} \longrightarrow x \in X$。设$\varepsilon>0$，则由于$(x_{n_k})$收敛和$(x_n)$是柯西序列，故存在$N$使得

$$d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2,\quad d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon/2 \qquad (n_k, n > N)$$

又由于

$$d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon \qquad (n_k, n > N)$$

故(x_n)收敛，并且由于柯西序列(x_n)是任意的，也就推出了X是完备的。第二个论断可以用$\mathbf{R}$来说明。

3. （略）

4. 若X是紧的，则由8.2-2(a)知X是全有界的。且由习题2知X是完备的。逆命题，在8.2-2(b)中令$B = X$便可得证，因为$X = \overline{X}$。

5. 由于X是紧的，故它是全有界的。

6. 由$T_n x = y_n = (\eta_1, \cdots, \eta_n, 0, 0, \cdots)$（$\eta_j$是题中所给定的）定义的算子$T_n$: $l^\infty \longrightarrow l^\infty$是线性和有界的，于是由8.1-4($a$)知$T_n$是紧的。此外，由§1.2中的柯西-许瓦兹不等式可得到

$$\|(T - T_n)x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\eta_j|^2$$

$$= \sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk}\xi_k\right|^2$$

$$\leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\alpha_{jk}\right|^2 \sum_{l=1}^{\infty} \left|\xi_l\right|^2$$

由此可得 $\|T - T_n\| \longrightarrow 0$，再应用8.1-5。

7．$Tx = (\eta_j) = (\xi_j/\sqrt{j})$定义了一个紧线性算子，但$\Sigma\Sigma|\alpha_{jk}|^2 = \Sigma n^{-1}$是发散的。

8．否，因为l^∞是不可分的（见1.3-9，8.2-3）。

9．是。

10．设$T_n x = (\lambda_1\xi_1, \cdots, \lambda_n\xi_n, 0, 0, \cdots)$，则由8.1-4(a)知，$T_n$是紧的。设$\varepsilon>0$，$|\lambda_j|<\varepsilon$对一切$j>N$成立，并令$n>N$，则有

$$\|Tx - T_n x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j \xi_j|^2$$

$$\leqslant \varepsilon^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \leqslant \varepsilon^2 \|x\|^2$$

即$\|T - T_n\| \leqslant \varepsilon$。因此，据8.1-5知$T$是紧的。

§8.3

1．由于$S = T^p$是紧的，故论断关于S是成立的。再应用谱映射定理7.4-2。

2．X中的有界序列(x_n)含有这样的子列，它在T_1之下的象收敛，于是该子列在T_1之下的象有界，且有这样的子列，它在T_2之下的象收敛；因此T_2T_1是紧的。参见8.1-3。

另一证明可由8.3-2及8.1-2(a)得到。

3．利用8.3-1和8.3-3。

4．设$B_1 \subset X_1$有界，则$T_1(B_1)$有界（见§2.7习题2），于是$M = T_2T_1(B_1)$是相对紧的，且$\overline{M}$是紧的，$T_3(\overline{M})$是紧的(由2.5-6)，是闭的(由2.5-2)。于是由$T_3(M) \subset T_3(\overline{M})$得$\overline{T_3(M)} \subset T_3(\overline{M})$且$\overline{T_3(M)}$是紧的（由§2.5习题9）。

第二个证明。设X_1中的(X_n)有界，则(T_1x_n)有界(见2.7)，据8.1-3知，$(T_2T_1x_n)$有收敛的子列(y_k)。于是由2.7-9及1.4-8知(T_3y_k)收敛。而由8.1-3知$T_3T_2T_1$是紧的。

5．设(x_n)有界，不妨设对一切n有$\|x_n\| \leqslant c$，则由于$\|Sx_n\| \leqslant \|S\| \|x_n\| \leqslant \|S\|c$故$(Sx_n)$是有界。因此$(Sx_n)$含有一个子序列$(Sx_{n_k})$使得$(TSx_{n_k})$收敛。这便证明了$TS$是紧的。

6．若T是紧的，则据引理8.3-2知T^*T也是紧的。反过来，若T^*T是紧的，设(x_n)有界。不妨设$\|x_n\| \leqslant c$，且$(T^*Tx_{n_k})$收敛，则对每个$\varepsilon>0$，存在N使得

$$\|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_j}\| < \frac{\varepsilon}{2c} \quad (k, j>N)$$

由此可得

$$\begin{aligned}\|Tx_{n_k} - Tx_{n_j}\|^2 &= \langle T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_j},\ x_{n_k} - x_{n_j}\rangle \\ &\leqslant \|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_j}\| \|x_{n_k} - x_{n_j}\| \\ &\leqslant \|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_j}\| \cdot 2c < \varepsilon \\ &(j,\ k>N)\end{aligned}$$

因此（Tx_{n_k}）收敛而T是紧的。

7．T^*是线性有界的(见3.9-2)，据引理8.3-2TT^*是紧的，据习题6知$TT^*=(T^*)^*T^*$和T^*是紧的。

8．否则，据引理8.3-2知$TT^{-1}=T^{-1}T=I$将是紧的，这与引理8.1-2(b)矛盾。

9．我们记$\mathscr{N}=\mathscr{N}(T_\lambda)$。假定$\dim\mathscr{N}=\infty$，则$\mathscr{N}$有一个无穷的线性无关子集，不妨设为$(x_n)$。考虑$K_m=\mathrm{Span}\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，则$K_1\subset K_2\subset\cdots$是$\mathscr{N}$的闭子空间，并且所有这些包含关系都是真包含。设$y_1=\|x_1\|^{-1}x_1$，据2.5-4(取$\theta=1/2$)，存在$y_2\in K_2$使得$\|y_2\|=1$，$\|y_2-y_1\|\geqslant 1/2$，并且存在$y_3\in K_3$使得$\|y_3\|=1$，$\|y_3-y_2\|\geqslant 1/2$，$\|y_3-y_1\|\geqslant 1/2$，如此等等。这就给出了一个无穷序列$(y_m)$满足$\|y_m\|=1$，若$m\neq q$，还满足$\|y_m-y_q\|\geqslant 1/2$。因此有

$$(A)\qquad \|\lambda y_m-\lambda y_q\|\geqslant|\lambda|/2\qquad(m\neq q)$$

由于$y_m\in\mathscr{N}$，故有$0=T_\lambda y_m=(T-\lambda I)y_m$。因此有

$$(B)\qquad Ty_m=\lambda y_m$$

由于$\lambda\neq 0$，关系式（A）和（B）表明(Ty_m)没有收敛的子序列，但由于(y_m)是有界的，T是紧的，故发生矛盾。因此$\dim\mathscr{N}=\infty$是不可能的。

10．如前，我们有$Ty_m=\lambda y_m$，因此$T^py_m=\lambda^py_m$，由于T^p是紧的，所以序列$(T^py_m)=(\lambda^py_m)$应有一个收敛的子列。但这是不可能的，因为$\lambda\neq 0$及习题9的解答中（A）给出了

$$\|\lambda^py_m-\lambda^py_q\|\geqslant|\lambda^p|/2\qquad(m\neq q)$$

11．若$\dim X=\infty$，则$T=I$不是紧的〔见8.1-2(b)〕而当$\lambda=1$时我们有$\dim\mathscr{N}(T_\lambda)=\dim X=\infty$。算子$T=0$是紧的，但若$\dim X=\infty$，则关于$\lambda=0$有$\dim\mathscr{N}(T_\lambda)=\dim X=\infty$。

12．若$\dim\mathscr{N}(T_\lambda)=\infty$，则$\mathscr{N}(T_\lambda)$含有一个（无穷的）标准正交序列$(x_n)$，因此$T_\lambda x_n=0$，即$Tx_n=\lambda x_n$，并且利用§3.4中的(8)，对每个$m$及$n\neq m$可得

$$\begin{aligned}\|Tx_n-Tx_m\|^2&=\|\lambda x_n-\lambda x_m\|^2\\&=|\lambda|^2\|x_n-x_m\|=2|\lambda|^2\end{aligned}$$

由此可见(Tx_n)不能含有收敛的子列，这与T的紧性矛盾。

13．如同习题9的解答，若假设$\dim\mathscr{N}(T_\lambda{}^p)=\infty$，则据2.5-4有一序列$(y_m)$，$\|y_m\|=1$，$y_m\in\mathscr{N}(T_\lambda{}^p)$；对$m\neq q$还有$\|y_m-y_q\|\geqslant 1/2$。因此（见课文中8.3-4的证明中接近结束的一段）

$$0=T_\lambda{}^py_m=(W-\mu I)y_m$$

由于T^p是紧的，S^p是有界的，故可推出$W^p=(TS)^p=(ST)^p=S^pT^p$是紧的。因此$(W^py_m)=(\mu^py_m)$将有一个收敛的子列，但这是不可能的，因为$\lambda\neq 0$，因此$\mu\neq 0$，且

$$\|\mu^py_m-\mu^py_q\|\geqslant|\mu^p|/2\qquad(m\neq q)$$

14．若$0\in\rho(T)$，则$T^{-1}=R_0(T)$存在，有界且在整个X上有定义（据8.1-2(a)及7.2-3)，于是据8.3-2知$T^{-1}T=TT^{-1}=I$是紧的，但这与8.1-6(b)矛盾。

15．若$\lambda=0$，有$\{x \mid \xi_{2k}=0\}$，若$\lambda=1$，有$\{x \mid \xi_{2k-1}=0\}$，若$\lambda\neq 0,1$，有$\{0\}$。否。

§8.4

1．把T作用到（3）则对$n>m$得到

$$T^2 y_n - T^2 y_m = \lambda^2 (y_n - x_2),\quad x_2 \in \mathscr{N}_{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T^p y_n - T^p y_m = \lambda^p (y_n - x_p),\quad x_p \in \mathscr{N}_{n-1}$$

$$\| T^p y_n - T^p y_m \| \geqslant |\lambda^p| / 2$$

等等。

2．设$n>m$且$\mathscr{N}_m = \mathscr{N}_{m+1}$，则由$x\in\mathscr{N}_{n+1}$可得

$$0 = T_\lambda^{n+1} = T_\lambda^{m+1}(T_\lambda^{n-m} x)$$

于是有$T_\lambda^{n-m} x \in \mathscr{N}_{m+1} = \mathscr{N}_m$，且$T_\lambda^n x = T_\lambda^m (T_\lambda^{n-m} x) = 0$，即$x\in\mathscr{N}_n$。

3．$\lambda\in\rho(\tilde{T})$蕴含着$\lambda\in\rho(T)\cup\sigma_r(T)$；见§7.2习题9。

4．$(1,0,\cdots)$是对应于$\lambda=0$的特征矢量。若$\lambda\neq 0$，则由$Tx=\lambda x$可得$\xi_{n+1}=n!\lambda^n\xi_1$，且由$x\in l^2$可得$\xi_1=0$，于是$x=0$。

5．$Tx=\lambda x$，$0=\lambda\xi_1, \xi_{n-1}/(n-1)=\lambda\xi_n\ (n=2,3,\cdots)$，$x=0$。每个$\lambda\neq 0$都属于$\rho(T)$。若$\lambda=0$，则$\eta_1=0$，其中$Tx=(\eta_j)$，$\overline{\mathscr{R}(T)}\neq l^2$，$0\notin\sigma_c(T)$，因此$0\in\sigma_r(T)$，这是由于$\sigma_p(T)=\phi$。

6．0，特征矢量$x_n=(0, 0, \cdots, 0, 1)$。

7．每个α_j都是T的一个特征值。应用8.3-1。

8．$\{x\in l^2 \mid \xi_j=0, j>m\}$。否。$n_0=0$。

9．若$\lambda\notin[0, 1]$，则$T_\lambda^{-1}x(t)=x(t)/(t-\lambda)$；$\sigma(T)=[0,1]$。利用8.3-1和8.4-4。

10．$\sigma(T)=\{0,2\}$，$r(0)=1$，$r(2)=1$。若$\lambda\neq 0,2$，则$r(\lambda)=0$，并且有

$$\mathscr{N}(T_0)=\{\alpha(1,1)\},\quad T_0(\mathbf{R}^2)=\{\beta(1,-1)\}$$

$$\mathscr{N}(T_2)=\{\gamma(1,-1)\},\quad T_2(\mathbf{R}^2)=\{\delta(1,1)\}$$

§8.6

1．（略）

2．方程组$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k=\eta_j$，$j=1,2,\cdots,n$有解$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$当且仅当$\sum_{j=1}^{n}\beta_j\eta_j=0$关于方程组$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jk}\beta_j=0\ (k=1,\cdots,n)$的一切解$b=(\beta_j)$成立。

3．我们有$\sum_k\alpha_{jk}\xi_k=\eta_j$。设$f=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$满足

$$\sum_k \alpha_{kj}\varphi_k = 0$$

用φ_j乘上第一个公式并求和，便得到

$$\sum\sum\alpha_{jk}\xi_k\varphi_j=\sum\sum\alpha_{kj}\varphi_k\xi_j=\sum\varphi_j\eta_j=f(y)=0$$

4．在有限维空间上，据8.1-4(*b*)知任一线性算子都是紧的，而结论可由8.6-1得到。

5．设$A=T-\lambda I$。则(1)变成$Ax=y$，它有解x当且仅当任一满足$\sum_j \alpha_{jk}\omega_j=0\ (k=1,\cdots,n)$的$w=(\omega_j)$也满足$\sum_j \eta_j\omega_j=0$。利用点积和$A$的列矢量$a_1,\cdots,a_n$，可以看出条件变成

$$w\cdot a_k=0\ (k=1,\cdots,n)\Rightarrow w\cdot y=0;$$

也就是说，和A的所有列矢量都正交的矢量也是和A的增广矩阵的所有列矢量正交，故这两个矩阵的秩相等。

6．(1)的解与(2)的解之和是(1)的一个解。

7．(略)

8．(*a*)假定所求的(f_j)存在，如果对某一m_0有$z_{m_0}\in\overline{A}_{m_0}$，则由§4.6中的习题8，$f_{m_0}(z_{m_0})=0$，这与$f_{m_0}(z_{m_0})=1$矛盾。

(*b*)反过来，设对每个m_0都有$z_{m_0}\notin\overline{A}_{m_0}$，则由§4.6中的习题5有$g_{m_0}\in X'$存在，它在$\overline{A}_{m_0}$上为零，而在$z_{m_0}$为1。因此$g_{m_0}(z_k)=0$对一切$k\neq m_0$成立，而$g_{m_0}(z_{m_0})=1$。

9．(略)

10．取y_j(j固定)与$\sum\alpha_k z_k=0$的内积则得到

$$\sum\alpha_k\langle z_k,y_j\rangle=\alpha_j=0,\quad j=1,\cdots,n$$

对于另一集的线性无关性，其证明是类似的。

11．$z_1,z_2,\cdots$；$y_1,y_2,\cdots$；作为黎斯定理3.8-1的结论，$\langle z_k,y_j\rangle=\delta k_j$。

12．对于线性无关集$\{y_1,\cdots,y_m\}$，存在集合$\{z_1,\cdots,z_m\}$使得$\langle z_k,\ y_j\rangle=\delta_{kj}$。其证明如下：将$\{y_1,\cdots,y_m\}$标准正交化便得到$\{e_1,\cdots,e_m\}$；见§3.4。则有$y_j=\sum_{s=1}^{m}\alpha_{js}e_s$，$e_s=\sum_{r=1}^{m}\beta_{sr}y_r$，其中若有$s>j$，有$\alpha_{js}=0$，而若$r>s$，有$\beta_{sr}=0$。因此

$$y_j=\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\alpha_{js}\beta_{sr}y_r=\sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{m}\alpha_{js}\beta_{sr}\right)y_r$$

于是有

$$\sum_{s=1}^{m}\alpha_{js}\beta_{sr}=\delta_{jr}=\begin{cases}0 & 若j\neq r\\ 1 & 若j=r\end{cases}$$

选取

$$z_k=\sum_{t=1}^{m}\overline{\beta}_{tk}e_t$$

便得到所要求的结果

$$\begin{aligned}\langle z_k,\ y_j\rangle&=\langle\sum_{t=1}^{m}\overline{\beta}_{tk}e_t,\ \sum_{s=1}^{m}\alpha_{js}e_s\rangle\\&=\sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\overline{\beta}_{tk}\overline{\alpha}_{js}\delta_{ts}\\&=\sum_{s=1}^{m}\overline{\beta}_{sk}\overline{\alpha}_{js}=\delta_{jk}\end{aligned}$$

13. 方程组

$$\sum_k \alpha_{jk}\xi_k = 0 \qquad (j=1,\cdots,n)$$

和方程组

$$\sum_j \alpha_{jk}\eta_j = 0 \qquad (k=1,\cdots,n)$$

有相同个数的线性无关解（当$r=\operatorname{rank}A=n$时，只有平凡解，若$r<n$，则有$n-r$个线性无关解)。

14. 设$\dim\mathscr{R}(T)=n$,$\{y_1,\cdots,y_n\}$是$\mathscr{R}(T)$的一个基,又设$\{g_1,\cdots,g_n\}$满足$g_k(y_j)=g_{jk}$，据引理4.6-7这样的g_k是存在的；参看定理8.6-3的证明中(a)部分。设$x\in X$，则$Tx\in\mathscr{R}(T)$有表达式

$$Tx=f_1(x)y_1+\cdots+f_n(x)y_n$$

由此可得

$$g_k(Tx)=(T^\times g_k)(x)=f_k(x)$$

诸f_k必是线性无关的，否则将有

$$f_k=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{kj}h_j,\quad (h_j\in X',\ m<n)$$

及

$$Tx=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{kj}h_j(x)y_k=\sum_{j=1}^{m}h_j(x)v_j$$

其中

$$v_j=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}y_k$$

由于x是任取的，故得到$\dim\mathscr{R}(T)=m<n$，这与$\dim\mathscr{R}(T)=n$发生矛盾。

15. 给定的级数是一致收敛的，通过逐项积分可得到Tx的傅立叶级数表示，由于$Tx\in C[0,\pi]$，故$Tx=0$当且仅当$x=0$。但是由于该级数的每一项在$s=0$处都为零，所以若$y(0)\neq 0$，$Tx=y$便是不可解的。

§8.7

1. 在这一情况下，(2)中的T是一个n阶方阵而x和y是列矢量。不是非齐次方程组关于右端每一给定的y有唯一的解，就是对应齐次方程至少有一非平凡解。在第一种情况中，对转置方程组同样成立。在第二种情况下，齐次方程组和它的转置方程组有相同个数$(n-r)$的线性无关解，其中r是系数矩阵的秩。

2. 用一个连续函数z乘(1)式并求积分：

$$\int_a^b x(s)z(s)ds-\mu\int_a^b\int_a^b k(s,t)x(t)dt\,z(s)ds$$

$$=\int_a^b\tilde{y}(s)z(s)ds$$

由于这些函数是连续的，故可交换积分次序；将s改成t，然后再改回来，便得到

$$\int_a^b [z(s) - \mu\int_a^b k(t,s)z(t)dt]x(s)ds$$

$$\int_a^b \tilde{y}(s)z(s)ds$$

因此，若对某个$z\neq 0$，方括号[…]中的表达式为零，则（1）无解，除非$\tilde{y}$能使得满足[…]$=0$的一切z有

$$\int_a^b \tilde{y}(s)z(s)ds = 0$$

这部分地说明了定理8.5-1。

3．例如，若$s<1/2$，$k(s,t)=1$，若$s\geqslant 1/2, k(s,t)=0$，$s,t\in[0,1]$。因此，T不是到$C[0,1]$的一个映射。

4．据7.3-1可得收敛性，且

$$|(T\tilde{y})(s)| \leqslant (b-a)M\|\tilde{y}\|$$

$$\|T\tilde{y}\|/\|\tilde{y}\| \leqslant (b-a)M$$

$$\|\mu T\| < 1$$

5．注意到该积分是一个未知常数c。因此有$x(s)=1+\mu c$。代入到给定的方程中便有$c=1/(1-\mu)$，$\mu\neq 1$，且$x(s)=1/(1-\mu)$，$\mu\neq 1$。Neumann级数是几何级数

$$x(s) = 1+\mu+\mu^2+\cdots = 1/(1-\mu), \quad (|\mu|<1)$$

对于齐次方程，我们得到：若$\mu\neq 1$，$x(s)=0$，若$\mu=1$，$x(s)=c$（任意的)。这与8.7-3是一致的。

6．$x(s)=\tilde{y}(s)+\dfrac{\mu k_0 c}{1-\mu k_0(b-a)}$，其中$c=\int_a^b \tilde{y}(t)dt$，并且

$$x(s) = \tilde{y}(s)+\mu k_0 c+\mu^2 k_0{}^2 c(b-a)+\mu^3 k_0{}^3 c(b-a)^2+\cdots$$

7．(略)

8．$\tilde{k}(s,t,\mu)=k(s,t)+\mu k_{(2)}(s,t)$，其中

$$k_2(s,t) = 2^{-1}\pi a_1 a_2 \sin s \sin 3t$$

9．$k_{(2)}=0$，$k_{(3)}=0,\cdots, x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\int_0^{2\pi} k(s,t)\tilde{y}(t)dt$

10．我们有

$$x(s)-\mu s\int_0^1 (1+t)x(t)dt = \tilde{y}(s)$$

此积分是一未知常数，因此$x(s)=\tilde{y}(s)+cs$。若将它代入给定的方程并化简，便得到

$$c\left(1-\frac{5}{6}\mu\right) = \mu\int_0^1 (1+t)\tilde{y}(t)dt$$

因此$\lambda=1/\mu=5/6$是一个特征值，且从$\mu=\dfrac{6}{5}$的齐次方程可得到一个特征函数$x(s)=ks$（k任意)。若$\mu\neq 6/5$，则唯一的解是

$$x(s) = \tilde{y}(s)+cs = \tilde{y}(s)+\left(1-\frac{5}{6}\mu\right)^{-1}\mu s\int_0^1 (1+t)\tilde{y}(t)dt$$

11．$\lambda=1/\mu=e^2-1$；特征函数e^s。

12. 先用$\cos s$乘，再于$[0, 2\pi]$上取积分，便得

$$x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\int_0^{2\pi}\sin s\cos t\ \tilde{y}(t)\,dt$$

13. (x_n)，$x_n(t)=|t|^{1/n}$，$t\in[-1, 1]$；由于极限函数不是连续的，故收敛性不能是一致的。另一个例子是(x_n)，$x_n(t)=t^n$，$t\in[0, 1]$。

14. 将k代入(1)立即得到x的公式和各个c_j的公式。

15. (a)我们得到

$$\left(1-\frac{1}{2}\mu\right)c_1-\mu c_2=y_1,\qquad -\frac{1}{3}\mu c_1+\left(1-\frac{1}{2}\mu\right)c_2=y_2,$$

$$x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\int_0^1\frac{6(\mu-2)(s+t)-12\mu st-4\mu}{\mu^2+12\mu-12}\tilde{y}(t)\,dt$$

(b) 特征值和特征函数是

$$\mu_1=-6+4\sqrt{3},\qquad \mu_2=-6-4\sqrt{3},\qquad \lambda_1=1/\mu_1,\qquad \lambda_2=1/\mu_2$$

$$x(s)=\frac{2\mu}{2-\mu}s+1\qquad(\mu=\mu_1,\mu_2)$$

§9.1

1. 若A是一个n阶厄米特矩阵，则对每个$x\in\mathbf{C}^n$，$\bar{x}^TAx$取实值，参见3.10-2。厄米特矩阵有实特征值，并且对应不同特征值的特征矢量是正交的。

2. $\sigma(T)$由矩阵的主对角线的元素组成，据定理9.1-3，它们必定是实的。

3. 记$T_\lambda x=y$，便有$\|x\|=\|R_\lambda y\|\leqslant c^{-1}\|y\|$。

4. $T=\lambda_0 I$，$T_\lambda=(\lambda_0-\lambda)I$，$R_\lambda=(\lambda_0-\lambda)^{-1}I$，$c=|\lambda_0-\lambda|$。

5. $\langle W^*TWx,y\rangle=\langle TWx,Wy\rangle=\langle Wx,TWy\rangle=\langle x,W^*TWy\rangle$。

6. 是。否。$Sx=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$。

7. $Tx=\lambda_j x$，其中$x=(\xi_n)$，$\xi_n=\delta_{nj}$，若(λ_j)在$[a,b]$上稠密，则$\sigma(T)\supset[a,b]$；这里我们利用到$\sigma(T)$是闭的结论；参见7.3-2。

8. 设K是所指的闭包，则由7.3-2知$K\subset\sigma(T)$。只要能通过$\lambda\notin K$推得$\lambda\in\rho(T)$，便获得证明。据9.1-1，我们可只考虑实直线。若$\lambda\notin K$，则存在不包含特征值λ_j的区间$(\lambda-\delta,\lambda+\delta)$，$\delta>0$。于是对一切$j$有$|\lambda-\lambda_j|\geqslant\delta$，且由于

$$T_\lambda x=Tx-\lambda x=((\lambda_j-\lambda)\xi_j)$$

所以有

$$\|T_\lambda x\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|(\lambda_j-\lambda)|^2|\xi_j|^2\geqslant\delta\|x\|^2$$

于是据定理9.1-2有$\lambda\in\rho(T)$。

9. $T|_X$的自伴性据t是实的便可推出；并且对于$L^2[0,1]$上的T，其自伴性也可从内积的积分表示推出，这里的积分是一个勒贝格积分。$R_\lambda(T)x(t)=(t-\lambda)^{-1}x(t)$说明了：$\sigma(T)=[0,1]$，并且对于$\lambda\in[0,1]$，可以看出

$$T_\lambda x(t)=(t-\lambda)x(t)=0$$

蕴含着对一切$t \neq \lambda$有$x(t)=0$，即$x=0$（$L^2[0,1]$中的零元素），所以λ不能是T的特征值。

10．否则，存在序列(y_n)使得$\|y_n\|=1$及$\|Ty_n\|\longrightarrow\infty$。设$f_n(x)=\langle Tx,y_n\rangle=\langle x,Ty_n\rangle$，则$f_n$定义在整个$H$上，且是线性的。每个$f_n$都是有界的，这是因为

$$|f_n(x)|=|\langle x,Ty_n\rangle|\leqslant\|x\|\|Ty_n\|。$$

对每个$x\in H$，序列$(f_n(x))$有界，这是因为

$$|f_n(x)|=|\langle Tx,y_n\rangle|\leqslant\|Tx\|\|y_n\|=\|Tx\|$$

从一致有界性定理4.7-3知$(\|f_n\|)$有界，不妨设$\|f_n\|\leqslant k$。因此$|f_n(x)|\leqslant k\|x\|$，且取$x=Ty_n$，便有

$$|f_n(Ty_n)|=\langle Ty_n,\ Ty_n\rangle=\|Ty_n\|^2\leqslant k\|Ty_n\|,$$

故有$\|Ty_n\|\leqslant k$，矛盾！刚才证明的定理叫做海林格-托普里兹定理。所给出的证明也包含在涉及到无界算子的研究的§10.1中。在研究无界算子时，这个定理的意义将会完全清楚的。

§9.2

1．（略）

2．A的所有特征值λ都位于闭区间$[m,M]$中。这里$\langle Ax,x\rangle=x^TAx=\sum\sum\alpha_{jk}\xi_j\bar{\xi}_k$（这是特征值包含定理的一个特例）。

3．$m=0$，$M=1$。

4．假若$m\leqslant M\leqslant 0$，则$|m|=\|T\|$，等等。

5．从定理9.2-3立即可以推出。

6．$T=0$有特征值0。设$T\neq 0$，则m与M不全为零。因为据定理9.2-3有$m,M\in\sigma(T)$，所以再从定理8.4-4便得到所希望的结论。

7．特征值为$1,1/2,\ 1/3,\ \cdots$，且$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\{0\}$。因为$Tx=0$蕴含着$x=0$，故有$0\notin\sigma_p(T)$。由于$T$是自伴的，从定理9.2-4便可推出$\sigma_r(T)=\{0\}$。

8．（略）

9．从定理9.2-1和9.2-3可推出第一个断论，而由于A是映Y_1到Y_1的，故可推出第二个论断。

10．A是紧的（参见8.1-4）且是自伴的（参见3.10-2）；据$\alpha_{jk}>0$可得$M>0$，于是从9.2-3可得结论。

§9.3

1．$0\leqslant\langle(T-S)x,x\rangle$，$0\leqslant\langle(S-T)x,x\rangle$，因此对一切$x$有$\langle(T-S)x,x\rangle=0$，且据引理3.9-3(b)有$T-S=0$。

2．$T\leqslant T$，此关系是反对称的（见习题1）和传递的。此外，由于$\langle T_1x,x\rangle\leqslant\langle T_2x,x\rangle$对一切$x\in H$成立，故有

$$\begin{aligned}\langle(T_1+T)x,x\rangle&=\langle T_1x,\ x\rangle+\langle Tx,x\rangle\\&\leqslant\langle T_2x,x\rangle+\langle Tx,x\rangle\end{aligned}$$

$$= \langle (T_2 + T)x, x\rangle$$

即对一切$x\in H$有$T_1 + T\leqslant T_2 + T$。又

$$\alpha\langle T_1x, x\rangle \leqslant \alpha\langle T_2x, x\rangle \qquad (\alpha\geqslant 0)$$

3．$S = B - A\geqslant 0$，$ST = TS$，并且定理9.3-1蕴含着$ST\geqslant 0$；这就给出了结果。

4．TT^*的自伴性可从下式看出

$$\langle TT^*x, y\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle = \langle x, TT^*y\rangle。$$

对于$y = x$，上式又给出

$$\langle TT^*x, x\rangle = \|T^*x\|^2\geqslant 0$$

即$TT^* > 0$。对于T^*T类似。据此和定理9.2-1可得第二个结论。它蕴含着$\bar{A}^TA$和$A\bar{A}^T$有非负的实特征值。

5．从定理9.2-1和9.2-3可以推出。设A是一个n阶厄米特矩阵（见§3.10）。则$\bar{x}^TAx$对一切$x\in C^n$都大于等于零的充分必要条件是，A的所有特征值都是非负的。

6．自伴性由下式可以看出：

$$\langle W^*TWx, y\rangle = \langle TWx, Wy\rangle = \langle Wx, TWy\rangle$$
$$= \langle x, W^*TWy\rangle$$

令$y = Wx$并利用$T\geqslant 0$，从下式

$$0\leqslant\langle Ty, y\rangle = \langle TWx, Wx\rangle = \langle Sx, x\rangle$$

可得$S > 0$。

7．从下式明显地可看出自伴性：

$$\langle T_1^2T_2x, y\rangle = \langle x, T_2T_1^2y\rangle = \langle x, T_1^2T_2y\rangle$$

记$y = T_1x$，便得到

$$\langle T_1^2T_2x, x\rangle = \langle T_2T_1x,\ T_1x\rangle = \langle T_2y, y\rangle\geqslant 0$$

（注意，这个结果也能从习题6中推出。）

8．设$x\in H$及$y = Tx$，则

$$\langle TSTx, x\rangle = \langle STx, Tx\rangle = \langle Sy, y\rangle\geqslant 0$$

9．设$(I + T)x = 0$，则有$-x = Tx$，又由于$T\geqslant 0$，故有

$$0\leqslant\langle Tx, x\rangle = -\langle x, x\rangle = -\|x\|^2\leqslant 0$$

这意味着$x = 0$，所以$(I + T)^{-1}$存在；见2.6-10。

10．$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2\geqslant 0$说明$T^*T\geqslant 0$再用习题9。

11．（略）

12．我们得到

$$\langle T^2x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2\geqslant 0$$

若A是厄米特矩阵，则$\bar{x}^T A^2 x \geqslant 0$。

13．从习题12和定理9.2-1可以推出。

14．T^*T 是紧的（参见§8.3中习题6）。设(x_n)有界，且 $T^*Tx_{n_k} \longrightarrow T^*Tx$，则 $\| x_{n_k} - x \| \leqslant c$

且有

$$0 \leqslant \| S(x_{n_k} - x) \|^2 = \langle S^* S(x_{n_k} - x), x_{n_k} - x \rangle$$
$$\leqslant \langle T^*T(x_{n_k} - x), x_{n_k} - x \rangle$$
$$\leqslant \| T^*T(x_{n_k} - x) \| c \longrightarrow 0 \qquad (k \longrightarrow \infty)$$

由于(x_n)是任一有界序列，故证明了S是紧的。

15．$\langle Tx, Tx \rangle \geqslant c^2 \langle x, x \rangle$，$T^*T \geqslant c^2 I$，$T^*T$不是紧的（据8.1-2(b)和习题14），$T$也不是紧的（见§8.3中习题6）。

§9.4

1．例如，用下列矩阵表示的算子，其中a_{12}和a_{21}是任意的。$I^{1/2} = I$。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2．$A = T^{1/2}$。由$(Ax)(t) = t^{1/2}x(t)$定义。

3．是。是。是。$Ax = (0, 0, \xi_3, \xi_4, \cdots)$。

4．利用$T^{1/2}$的自伴性及定理3.9-4，便得

$$\| T \| = \| T^{1/2} T^{1/2} \| = \| (T^{1/2})^* T^{1/2} \| = \| T^{1/2} \|^2$$

5．由于$T = T^{1/2} T^{1/2}$和$T^{1/2}$是自伴的，故有

$$| \langle Tx, y \rangle | = | \langle T^{1/2}x, T^{1/2}y \rangle | \leqslant \| T^{1/2}x \| \| T^{1/2}y \|$$
$$= \langle T^{1/2}x, T^{1/2}x \rangle \langle T^{1/2}y, T^{1/2}y \rangle^{1/2}$$
$$= \langle Tx, x \rangle^{1/2} \langle Ty, y \rangle^{1/2}。$$

6．首先假定$\langle Ty, y \rangle \neq 0$，并令$\alpha = - \langle Tx, y \rangle / \langle Ty, y \rangle$则

$$0 \leqslant \langle T(x + \alpha y), x + \alpha y \rangle$$
$$= \langle Tx, x \rangle + \alpha \langle Ty, x \rangle + \bar{\alpha} \langle Tx, y \rangle + \alpha \bar{\alpha} \langle Ty, y \rangle$$
$$= \langle Tx, x \rangle - \frac{\langle Tx, y \rangle \langle Ty, x \rangle}{\langle Ty, y \rangle}$$

由于$\langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$，故由此可得

$$| \langle Tx, y \rangle |^2 \leqslant \langle Tx, x \rangle \langle Ty, y \rangle$$

若$\langle Ty, y \rangle = 0$但$\langle Tx, x \rangle \neq 0$，则证明是类似的。若$\langle Ty, y \rangle = \langle Tx, x \rangle = 0$，则利用$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \overline{\langle Ty, x \rangle}$，首先可得

$$0 \leqslant \alpha \langle Ty, x \rangle + \bar{\alpha} \langle Tx, y \rangle = 2\mathrm{Re}\,\alpha \langle Ty, x \rangle$$

取$\alpha=1$及$\alpha=-1$，可看出有$\mathrm{Re}\langle \tilde{T}y,x\rangle=0$；取$\alpha=i$及$\alpha=-i$，可得$\mathrm{Im}\langle \tilde{T}y,x\rangle=0$。

7．若$Tx=0$，不等式成立。设$Tx\neq 0$，记$y=Tx$，便得到

$$\|Tx\|^2\leqslant\langle Tx,x\rangle^{1/2}\langle T^2x,Tx\rangle^{1/2}$$

由于

$$\langle T^2x,Tx\rangle\leqslant\|T^2x\|\,\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|Tx\|^2$$

故有

$$\|Tx\|^2\leqslant\langle Tx,x\rangle^{1/2}\|T\|^{1/2}\|Tx\|$$

再用$\|Tx\|$去除便得到所希望的结果。

8．由于

$$C^T=(BB^T)^T=B^{TT}B^T=C$$
$$(Cx)^Tx=x^TBB^Tx=(B^Tx)^TB^Tx\geqslant 0$$

故C是对称的。

9．$DD^T=D^TD=I$。

10．由定理9.4-2立即可推出。

§9.5

1．利用定理9.5-2。很显然，若P是到$\{0\}$上的投影，则$P=0$，而若P是到H上的投影，则$P=I$。

2．我们有

$$Q^2=S^{-1}PSS^{-1}PS=S^{-1}P^2S=S^{-1}PS=Q$$

且由§3.9中的(6g)有

$$Q^*=(S^{-1}PS)^*=S^*P^*(S^{-1})^*=S^{-1}PS=Q$$

3．例如，用下面矩阵表示的T，其中a_{21}是任意不为零的，

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ a_{21} & 0\end{bmatrix}$$

4．(略)

5．若空间$Y_j=P_j(H)$，$j=1,\cdots,m$，是两两正交的，则由归纳法可推出P是投影。反之，若P是一个投影，则

$$\|Px\|^2=\langle P^2x,x\rangle=\langle Px,x\rangle,\ \|P_kx\|^2=\langle P_kx,x\rangle$$

因此对一切x

$$\|P_1x\|^2+\|P_2x\|^2\leqslant\sum_{k=1}^{m}\langle P_kx,x\rangle=\langle Px,x\rangle$$
$$=\|Px\|^2\leqslant\|x\|^2$$

对每个y和$x=P_1y$，因而有$P_1x=P_1^2y=P_1y$且

$$\|P_1y\|^2+\|P_2P_1y\|^2\leqslant\|x\|^2=\|P_1y\|^2$$

所以$P_2P_1y=0$，即$P_2P_1=0$，且据9.5-3有$Y_1\perp Y_2$。类似地，对一切j和$k\neq j$有$Y_j\perp Y_k$。

6．由$P_jx_k=P_jP_kx=0(k\neq j)$可得唯一性。

7．（略）

8．利用定理9.5-4及定理9.5-2。

9．设(e_k)是内积空间X中的一个标准正交序列，则由$P_kx=\langle x,e_k\rangle e_k$所定义的$P_k$是到空间$Y_k=P_k(X)$上的投影。从定理9.5-4可以看出$\sum_{j=1}^{n}P_j$是一个投影。由于

$$\|P_kx\|^2=|\langle x,e_k\rangle|^2\|e_k\|^2=|\langle x,e_k\rangle|^2$$

习题8给出了§3.4的(12*)，而(12*)蕴含了3.4-6中的(12)。

10．$I-P_1$是到$Y_1^{\perp}$上的投影，且

$$(I-P_1)P_2=P_2(I-P_1)$$

因此由定理9.5-3可知$P_3=(I-P_1)P_2$是到$Y_3=Y_1^{\perp}\cap Y_2$上的投影。由于$Y_3\perp Y_1$，所以由定理9.5-4可知，$P_3+P_1=P_1+P_2-P_1P_2$是到$Y_1\oplus Y_3=Y_1+Y_2$上的投影。最后一个等式可这样推导，显然$Y_1\oplus Y_3\subset Y_1+Y_2$。反之，若$y_1\in Y_1$且$y_2\in Y_2$，则$y_1+y_2=z_1+z_3$，其中$z_1=y_1+P_1y_2\in Y_1$，而$z_3=y_2-P_1y_2=(I-P_1)y_2\in Y_1^{\perp}\cap Y_2=Y_3$。

§9.6

1．（略）

2．由定理9.6-1和定理9.6-2(a)可以推出。

3．$(P_2-P_1)x=([\xi_1-\xi_2]/2,[\xi_2-\xi_1]/2,0)$。否（参见9.5-4）。

4．据$P_n^2=P_n$及$P_n\longrightarrow P$可得$P^2=P$。据定理3.10-5可知P是自伴的，因此P是投影（参见9.5-1）。

5．例如，设P_n是l^2到子空间Y上的投影，而Y是由所有的这样的序列$x=(\xi_j)$所构成：对一切$j>n$有$\xi_j=0$。

6．例如，设P_n是l^2到子空间Z上的投影，而Z是由这样的序列$x=(\xi_j)\in l^2$所构成：对于$j=1,2,\cdots,n$，有$\xi_j=0$。

7．$P(H)=\bigcap_{n=1}^{\infty}P_n(H)$

8．将定理9.6-3应用于

$$P_n=Q_1+\cdots+Q_n,\quad n=1,2,\cdots$$

Q投影到$Q(H)=Y_1\oplus Y_2\oplus\cdots$上，其中$Y_j=Q_j(H)$。

9．$T^*(Y^{\perp})\subset Y^{\perp}$当且仅当$Y^{\perp\perp}\supset(T^*)^*(Y^{\perp\perp})$（据§3.9中习题5），据§3.3中(8)有$Y^{\perp\perp}=Y$，而据3.9-4有$(T^*)^*=T$。

10．若$y\in Y$，则$Ty=TP_1y=P_1Ty\in Y$，因此有$T(Y)\subset Y$。类似地，若$z\in Z=$

$Y^{\perp}$，则有$P_1Tz=TP_1z=To=0$，因此$Tz\in Z$且$T(Z)\subset Z$。

11．若$\dim Y=r$，$\dim Y^{\perp}=n-r$，$Y=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_r\}$，其中$(e_1,\cdots,e_n)$是$H$的一个基，则该矩阵在前$r$行和后$n-r$列的交叉处以及在后$n-r$行和前$r$列的交叉处都有零元。

12．根据投影定理3.3-4，对于每个$x\in H$都有$x=y+z$,其中$y\in Y$和$z\in Y^{\perp}$都是唯一的。据假设，$P_1(H)=Y$，故$P_1x=y$且$TP_1x=Ty$，又有

$$Tx=T(y+z)=Ty+Tz$$

式中$Ty\in Y$且$Tz\in Y^{\perp}$，因为Y约化了T。因此

$$P_1Tx=P_1(Ty+Tz)=Ty$$

合在一起，对一切$x\in H$有$P_1Tx=TP_1x$，即

$$P_1T=TP_1$$

13．我们得到

$$TP_2=T(I-P_1)=T-TP_1=T-P_1T=(I-P_1)T=P_2T。$$

14．(a)设$P_n(H)=Y_n$，则$TP_ne_{n-1}=0$，但$P_nTe_{n-1}=e_n$，因此$P_nT\neq TP_n$。

(b)我们有$Y_n{}^{\perp}=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}$及$Te_{n-1}=e_n\notin Y_n{}^{\perp}$，故$T(Y_n{}^{\perp})$不全在$Y_n{}^{\perp}$中。

15．设$y\in Y$和$z\in Y^{\perp}$。则据假设$Ty\in Y$，因为

$$\langle Tz,y\rangle=\langle z,Ty\rangle=0$$

故从自伴性可推出$Tz,y\in Y^{\perp}$。

§9.8

1．$F_\lambda=E_{\lambda-0}$。

2．$\tilde{E}_\lambda=E_{\lambda+0}$。

3．（略）

4．可得到

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix},$$

且T^2的其它平方根为

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2&0\\0&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2&0\\0&-3\end{pmatrix}。$$

5．(a) 用零代替所有负元素。(b) 用零代替所有正元素，并略去负元素的负号。(c) 略去负元素的负号。

6．(a) 在$\tilde{T}^{+}$中将正元素换成零，将$\tilde{T}^{+}$的主对角线上的其它元素换成1。(b) 将$\tilde{T}_\lambda{}^{+}$的一切正元素换成零，将$\tilde{T}_\lambda{}^{+}$的主对角线上的其它元素换成1。

7．主对角元为 $(a)\,t_{jj}-\lambda$（t_{jj}是$\tilde{T}$的主对角元），$(b)\max(t_{jj}-\lambda,\ 0)$，$(c)\max(-t_{jj}+\lambda,0)$，$(d)\ |t_{jj}-\lambda|$ 的对角矩阵。

8. 在这种情形下有$B=T$。

9. 若$\lambda<0$则$E_\lambda=0$，若$\lambda\geqslant0$，则$E_\lambda=I$。

10. $B_\lambda=|1-\lambda|I$；若$\lambda<1$，则$T_\lambda^+=(1-\lambda)I$，若$\lambda\geqslant1$，则$T_\lambda^+=0$；若$\lambda<1$，则$\mathscr{N}(T_\lambda^+)=\{0\}$，若$\lambda\geqslant1$，则$\mathscr{N}(T_\lambda^+)=H$；若$\lambda<1$，则$E_\lambda=0$，若$\lambda\geqslant0$，则$E_\lambda=I$。

§9.9

1. 若$\lambda<0$，则$E_\lambda=0$，若$\lambda\geqslant0$，则$E_\lambda=I$，

$$T=\int_{0-0}^{0}\lambda dE_\lambda=0(E_0-E_{0-0})=0(I-0)=0$$

2. 斯蒂杰积分成为有限和$T=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kP_k$，而谱$\sigma(T)=\sigma_p(T)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$。特征空间是各个投影到其上的子空间。

3. 若$\lambda<1$，则$E_\lambda=0$，若$\lambda\geqslant1$，则$E_\lambda=I$。因此有

$$T=\int_{1-0}^{1}\lambda dE_\lambda=1(E_1-E_{1-0})=1(I-0)=I$$

4. 若$\lambda<-1$，则$E_\lambda=0$；若$-1\leqslant\lambda<1$，则E_λ是到直线$\xi_2=-\xi_1,\xi_3=0$上的投影，若$\lambda\geqslant1$，则$E_\lambda=I$。

5. E_λ是到该矩阵的所有不超过λ的特征值的特征空间之和上的投影。

6. 这可从定理8.3-1及定理8.4-4得到。对于无穷级数的情形，据定理8.3-1，当$n\to\infty$时必有$\lambda_n\to0$。

7. (略)

8. T是紧的和自伴的，对应于特征矢量$x_j=(\delta_{jn})$的特征值是$\lambda_j=1/j$ $(j=1,2,\cdots)$；这些特征矢量构成一个标准正交序列。E_λ是到所有满足$\lambda_j\leqslant\lambda$的$\lambda_j$的特征矢量$x_j$张成的子空间的闭包上的投影。

9. 设$x=(\xi_j)\in l^2$，则有

$$\left\|\left(T-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}P_j\right)x\right\|^2=\left\|\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{j}\xi_je_j\right\|^2=\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}|\xi_j|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{(m+1)^2}\sum_{j=m+1}^{\infty}|\xi_j|^2\leqslant\frac{1}{(m+1)^2}\|x\|^2$$

故有

$$\left\|T-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}P_j\right\|\leqslant\frac{1}{m+1}\longrightarrow0\qquad(m\to\infty)$$

10. 设T的特征值按$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots$排列，并设$Y_1,Y_2,\cdots$是相应的特征空间。又设$P_j$是从$H$到$Y_j$上的投影，则有

$$T=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_jP_j$$

这是由于

$$\left\|\left(T-\sum_{j=1}^{m}\lambda_jP_j\right)x\right\|^2=\sum_{j=m+1}^{\infty}\lambda_j^2\|P_jx\|^2$$

$$\leqslant \lambda_{m+1}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \|P_j x\|^2 = \lambda_{m+1}^2 \|x\|^2$$

于是有

$$\left\|T - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j\right\| \leqslant |\lambda_{m+1}|$$

其中当$m \to \infty$时有 $\lambda_{m+1} \to 0$。

§9.11

1. 对于$\lambda < \lambda_1$（最小的特征值），有$E_\lambda = 0$，E_λ在特征值处正好有一个"跳跃"，并且在$\lambda = \lambda_n$（最大特征值）时有$E_\lambda = I$。当然，这不过证实了我们在§9.7一开始的考虑

2. E_λ在特征值处有"跳跃"，仅在0处凝聚（参见8.3-1），在相邻的两个跳跃之间，E_λ为常数，也参见8.4-4。

3. $\lambda \mapsto E_\lambda$是连续的（$\sigma_p(T) = \phi$），对于$\lambda < 0$和$\lambda \geqslant 1$，它是常数，而在$[0,1] = \sigma(T) = \sigma_c(T)$上，它不是常数。

4. 这时在§9.9中的(1*)内，$\lambda > 0$，它使得(1*)中的积分当$y = x$时为正的，因为

$$W(\lambda) = \langle E_\lambda x, x\rangle = \langle E_\lambda x, E_\lambda x\rangle = \| E_\lambda x \|^2$$

5. 若实的$\lambda_0 \in \rho(T)$，则定理9.11-2蕴含着对一切充分接近λ_0的$\lambda \in \mathbf{R}$有$\lambda \in \rho(T)$。因此$\rho(T) \cap \mathbf{R}$是$\mathbf{R}$的一个开子集，并且它关于$\mathbf{R}$的余集$\sigma(T)$是闭的。

6. （略）

7. §9.2习题7中的T就是一个例子。

8. $y = (\eta_j) = Tx$，此处$x = (\xi_j)$，且

(a) 若$j = 1, \cdots, n$，则$\eta_j = \xi_j$，而若$j > n$，则$\eta_j = 0$；

(b) $\eta_j = \xi_j / j$；

(c) 若$j = 1, \cdots, n$，则$\eta_j = 0$，若$j > n$，则$\eta_j = \xi_j / j$；

(d) $\eta_{2m-1} = 0$，$\eta_{2m} = \xi_{2m}/2m$，其中$m = 1, 2, \cdots$，通过取(e_j)，$e_j = (\delta_{jn})$，可得到一完全标准正交集，其中

(a) $e_1, \cdots, e_n$对应于$\lambda = 1$，而当$j > n$时，e_j对应于$\lambda = 0$；

(b) e_j对应于$\lambda = 1/j$，$j = 1, 2, \cdots$；

(c) $e_1, \cdots, e_n$对应于$\lambda = 0$，而对于整数$j > n$，e_j对应于$\lambda = 1/j$；

(d) $e_1, e_3, e_5, \cdots$对应于$\lambda = 0$，而e_{2m}对应于$\lambda = 1/2m$，此处$m = 1, 2, \cdots$。

9. 设Y是T的所有特征矢量张成子空间的闭包，则$T_1 = T|_Y$有纯点谱，且$T_1(Y) \subset Y$。在Y上T_1还是自伴的。类似地，$T_2 = T|_Z$在$Z = Y^\perp$上是自伴的，并且有纯连续谱，这点从Y的构造可以推出。

10. E_{λ_1}在特征值处有间断，E_{λ_2}是连续的。

§10.1

1.～3. （略）

4. T_1在整个空间有定义。

5. $\mathscr{D}(S+T)$在H中稠密。

6. 由于$\mathscr{D}(S)=H$，故$(S+T)+(-S)=T$，且据习题5知$(S+T)^*-S^*\subset T^*$。将S^*加到两边的表达式上，注意到$\mathscr{D}(S^*)=H$，便得

$$(S+T)^*=(S+T)^*-S^*+S^*\subset S^*+T^*$$

据此和习题5可得到所希望的结果。

7. 据定理2.7-11把T延拓到$\overline{\mathscr{D}(T)}$。再把所得到的算子$\tilde{T}$延拓到$H$，例如，只要对$x\in\overline{\mathscr{D}(T)}^{\perp}$置$\tilde{T}x=0$就行了。

8. (a) 设$e_j=(\delta_{jk})$，则$\|e_j\|=1$，但$\|Te_j\|=j$，于是T是无界的。(b)是。(c)否。

9. 利用海林格-托普里兹定理的证明的思想。

10. 与定理10.1-1的证明极为类似。

§10.2

1. (略)

2. 为证明第二个式子，考虑$x\in\mathscr{D}((SS)^*)$，则对任一$y\in\mathscr{D}(T)$有

$$\langle Ty,S^*x\rangle=\langle STy,x\rangle=\langle y,(ST)^*x\rangle$$

这便证明了$S^*x\in\mathscr{D}(T^*)$且$T^*S^*x=(ST)^*x$，于是有$(ST)^*\subset T^*S^*$，而从本题中的第一公式可得$(ST)^*=T^*S^*$。

3. 利用证明3.10-3的思想。

4. 据10.2-4有$T\subset T^*$，因此据10.2-1(a)有$T^*\supset T^{**}$及$T^{**}\subset T^{***}$，其中用到$\mathscr{D}(T^{**})$的稠密性，它是从10.2-1(b)推出的。再据10.2-4便可推出所希望的结论。

5. 据10.2-1(b)知$T\subset T^{**}$，而据§10.1习题9知T^{**}是有界的。因此T是有界的。

6. 设$x=(\xi_j)$，$z=(\zeta_j)$，则

$$\langle Tx,z\rangle=\sum(\xi_j/j)\bar{\zeta}_j=\sum\xi_j(\bar{\zeta}_j/j)=\langle x,Tz\rangle$$

因此有$T^*=T$。另外有$T^{-1}x=(j\xi_j)$，且T^{-1}的定义域为值域$\mathscr{R}(T)=\{x=(\xi_j)\in l^2|\ \sum j^2|\xi_j|^2<\infty\}$。而由于该值域包含一切只有有限非零项的序列，所以它在l^2中稠密。又由于

$$\|T^{-1}e_j\|=\|je_j\|=j\|e_j\|=j$$

其中$e_j=(\delta_{jk})$，所以T^{-1}是无界的。由定理10.2-2可得到其自伴性：

$$(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}=T^{-1}$$

7. 利用2.7-11。$\tilde{T}$的对称性从T的对称性和内积的连续性（见3.2-2）可以推出。

8. 据题设有$T\subset\tilde{T}$。由10.2-1(a)知$T^*\supset\tilde{T}^*$。又由于$\tilde{T}$是对称的，故据10.2-4有$\tilde{T}^*\supset\tilde{T}$。

9. 设S是T的一个对称延拓，则

$$T\subset S\subset S^*\subset T^*=T$$

(参见10.2-1(a))；因此有$T=S$。

10. (a).否则，据3.3-4存在非零的$v\perp\overline{\mathscr{R}(T)}$。因此对一切$x\in\mathscr{D}(T)$有$\langle Tx,v\rangle=0$

$=\langle x,0\rangle$。这便证明了$v\in\mathscr{D}(T^*)$。又由于$T^*=T$，故而有$v\in\mathscr{D}(T)$，且$Tv=0$，于是据T是内射得$v=0$，但这与$v\neq 0$矛盾。

(b)从10.2-2及$T^*=T$可得。

§10.3

1．例如，由于

$$x_n=\left(1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\cdots,\frac{1}{n^2},0,0,\cdots\right)\longrightarrow x=(1/j^2)\notin\mathscr{D}(T)$$

$$Tx_n=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},0,0\cdots\right)\longrightarrow y=(1/j)\in l^2$$

所以它可以从定理10.3-2(a)推出。

2．$\overline{\mathscr{G}(T)}$可能是这样的：对某一$x$有不止一个的$(x,y)\in\overline{\mathscr{G}(T)}$与之对应。

3．设(w_n)在$H\times H$中是柯西列，其中$w_n=(x_n,y_n)$。则

$$\|w_n-w_m\|^2=\|x_n-x_m\|^2+\|y_n-y_m\|^2$$

表明(x_n)和(y_n)在H中是柯西列，因此$x_n\to x$和$y_n\to y$。从而$w_n\to w=(x,y)$。

4．$\mathscr{G}(T^{-1})$与$\mathscr{G}(T)$同胚，而后者是闭的。

5．我们有$T_1=S^{-1}$，其中S：$l^2\to l^2$是由$Sx=(\xi_j/j)$定义的。显然，S是有界的。由于$\mathscr{D}(S)=l^2$是闭的，据10.3-2(c)知S是闭的，并且据习题4 $S^{-1}=T_1$是闭的。

6．据10.2-1(b)，$T\subset T^{**}$。此外，据§10.2中的习题4知T^{**}是对称的。再据定理10.3-3知T^{**}是闭的。

7．设$(x_0,y_0)\in[U(\mathscr{G}(T))]^\perp$，则对一切$x\in\mathscr{D}(T)$有

$$0=\langle(x_0,y_0),(Tx,-x)\rangle=\langle x_0,Tx\rangle+\langle y_0,-x\rangle$$

亦即$\langle Tx,x_0\rangle=\langle x,y_0\rangle$。因此$x_0\in\mathscr{D}(T^*)$和$y_0=T^*x_0$，所以$(x_0,y_0)\in\mathscr{G}(T^*)$。反之，从$(x_0,y_0)\in\mathscr{G}(T^*)$出发并反过来推导，便可得到$(x_0y_0)\in[U(\mathscr{G}(T))]^\perp$。

8．由于T是闭的和线性的，所以$\mathscr{G}(T)$是闭子空间，并且据10.3-3知$\mathscr{G}(T^*)$也是闭子空间。据习题7，有

$$H\times H=\mathscr{G}(T^*)\oplus U(\mathscr{G}(T))$$

由于U是酉算子，故它保持正交性。又由于$U^2=-I$，故有$U^2(\mathscr{G}(T))=\mathscr{G}(T)$，从而得到

$$(A)\qquad U(H\times H)=U(\mathscr{G}(T^*))\oplus\mathscr{G}(T)$$

现在证明$\overline{\mathscr{D}(T^*)}=H$，否则对某个$y_0\neq 0$，有$y_0\perp\mathscr{D}(T^*)$；因此对于一切$y\in\mathscr{D}(T^*)$有

$$\begin{aligned}0=\langle 0,T^*y\rangle-\langle y_0y\rangle&=\langle(0,y_0);(T^*y,-y)\rangle\\&=\langle(0,y_0),U(y,T^*y)\rangle\end{aligned}$$

亦即

$$(0, y_0) \perp U(\mathscr{G}(T^*)) \text{且}\ (\text{参见}(A))$$
$$(0, y_0) \in [U(\mathscr{G}(T^*))]^{\perp} = \mathscr{G}(T)$$

这蕴含着$y_0 = T\mathbf{0} = 0$，这与$y_0 \neq 0$矛盾。应用习题7于T^*，再利用(A)，便有

$$\mathscr{G}(T^{**}) = [U(\mathscr{G}(T^*))]^{\perp} = \mathscr{G}(T)$$

因此$T^{**} = T$。

9. 据§10.1习题9知T^*是有界的，而据10.3-3知T^*是闭的。因此据10.3-2(c)知$\mathscr{D}(T^*)$是闭的，据习题8知$\mathscr{D}(T^*)$是稠密的，所以$\mathscr{D}(T^*) = H$，在§10.1习题9中用T^*代替T，据此知T^{**}是有界的。据习题8有$T^{**} = T$。

§10.4

1. 其证明和定理9.1-1(a)完全相同。
2. 其证明和定理9.1-1(b)一样。
3. 从10.4-1可以推出。
4. 可得如下结论

$\lambda \in \rho(T) \Longleftrightarrow$既非$(A)$，也非$(B)$，也非$(C)$。

$\lambda \in \sigma_p(T) \Longleftrightarrow (A)$。

$\lambda \in \sigma_c(T) \Longleftrightarrow (C)$但非$(A)$且非$(B)$。

$\lambda \in \sigma_r(T) \Longleftrightarrow (B)$但非$(A)$。

5. T_λ^{-1}存在且$\overline{\mathscr{D}(T_\lambda^{-1})} \neq H$。因此存在$y \neq 0$使得对一切$x \in \mathscr{D}(T_\lambda) = \mathscr{D}(T)$有

$$0 = \langle T_\lambda x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle - \langle x, \bar{\lambda} y \rangle$$

它表明$T^* y = \bar{\lambda} y$。

6. 设$T^* y = \bar{\lambda} y$，这里$y \neq 0$，则对于每个$x \in \mathscr{D}(T)$有

$$\begin{aligned} \langle T_\lambda x, y \rangle &= \langle Tx, y \rangle - \lambda \langle x, y \rangle \\ &= \langle x, T^* y \rangle - \lambda \langle x, y \rangle \\ &= \langle x, \bar{\lambda} y \rangle - \lambda \langle x, y \rangle = 0 \end{aligned}$$

即$y \in \overline{R(T_\lambda)}$，于是若$T_\lambda^{-1}$存在，则它的定义域不可能在$H$中稠密并且$\lambda \in \sigma_r(T)$，或是$T_\lambda^{-1}$不存在且$\lambda \in \sigma_p(T)$。

7. 设$\lambda \in \sigma_r(T)$，则据习题5有$\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$，而据10.4-2和$T = T^*$，它蕴含着$\lambda \in \sigma_p(T)$，这便导出矛盾。

8. 参见§7.2习题6～8，对于不定有界算子，证明也是一样的。

9. $Tx = \lambda x\ (x \neq 0)$蕴含着

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$$

因此$\lambda = \bar{\lambda}$。对应于不同特征值的特征矢量是正交的；象定理9.1-1(b)中一样可以推出；$\sigma_p(T)$的可数性从定理3.6-4(a)可以导出。

10. 据习题9，$\lambda \notin \sigma_p(T)$，因此$T_\lambda^{-1} = R_\lambda$存在，若$y \in \mathscr{D}(\mathscr{R}_\lambda)$，则$x = R_\lambda y \in \mathscr{D}(T_\lambda) =$

$\mathscr{D}(T)$。因为T是对称的，故有

$$\langle x, Tx\rangle - \langle Tx, x\rangle = 0$$

因此

$$\langle R_\lambda y, y\rangle - \langle y, R_\lambda y\rangle = \langle x, T_\lambda x\rangle - \langle T_\lambda x, x\rangle$$
$$= -\langle x, \lambda x\rangle + \langle \lambda x, x\rangle$$
$$= (\lambda - \bar{\lambda})\|x\|^2 = 2i\beta\|R_\lambda\|^2$$

且

$$2|\beta|\ \|R_\lambda y\|^2 \leqslant 2|\langle R_\lambda y, y\rangle| \leqslant R_\lambda y\|\ \|y\|。$$

§10.5

1．$Ux_1 = \lambda_1 x_1$，$Ux_2 = \lambda_2 x_2$，且

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle Ux_1, Ux_2\rangle = \lambda_1\bar{\lambda}_2\langle x_1, x_2\rangle$$

因此由于$\lambda_1\bar{\lambda}_2 \neq 1$，便知$\langle x_1, x_2\rangle = 0$。

2．利用4.13-5。

3．（略）

4．设$Tx = \lambda x (x \neq 0)$，则由于

$$\|x\| = \|Tx\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$$

所以有$|\lambda| = 1$。

5．若λ是一个特征值，则T_λ在全部点上都没有逆，反之亦然。设λ是一个逼近特征值，并且$\|T_\lambda x_n\| \to 0$，$\|x_n\| = 1$，且假定T_λ^{-1}存在。则有

$$y_n = \|T_\lambda x_n\|^{-1} T_\lambda x_n \in \mathscr{R}(T_\lambda) = \mathscr{D}(T_\lambda^{-1})$$

$\|y_n\| = 1$且

$$\|T_\lambda^{-1} y_n\| = \|T_\lambda x_n\|^{-1}\|x_n\| = \|T_\lambda x_n\|^{-1} \longrightarrow \infty$$

它表明T_λ^{-1}是无界的。

反之，若T_λ^{-1}是无界的，则在$\mathscr{D}(T_\lambda^{-1})$中有序列$(y_n)$满足$\|y_n\| = 1$且$\|T^{-1}_\lambda y_n\| \to \infty$。取$x_n = \|T_\lambda^{-1} y_n\|^{-1} T_\lambda^{-1} y_n$，便有$\|x_n\| = 1$且

$$\|T_\lambda x_n\| = \|T_\lambda^{-1} y_n\|^{-1}\|y_n\| = \|T_\lambda^{-1} y_n\|^{-1} \longrightarrow 0$$

6．设λ是U的一个特征值且$Ux = \lambda x$，$x \neq 0$，则有

$$\bar{\lambda} U^{-1} x = \lambda\bar{\lambda} U^{-1} x,\quad \bar{\lambda} x = U^{-1} x$$

且对一切$y \in H$有

$$\langle x, U_\lambda y\rangle = \langle U_\lambda^* x, y\rangle = \langle U^{-1} x - \bar{\lambda} x, y\rangle = 0$$

即$x \perp U_\lambda(H)$，因此$\overline{U_\lambda(H)} \neq H$。

反过来，设$\overline{U_\lambda(H)} \neq H$，$x \perp U_\lambda(H)$，$x \neq 0$，则对于一切$y \in H$有

$$0 = \langle x, U_{\lambda y} \rangle = \langle U^{-1}x - \bar{\lambda}x, y \rangle$$

因此$U^{-1}x = \bar{\lambda}x$，$\lambda UU^{-1}x = \lambda\bar{\lambda}Ux$，$Ux = \lambda x$。

7．$Tx - \lambda x = (-\lambda\xi_1, \xi_1 - \lambda\xi_2, \xi_2 - \lambda\xi_3, \cdots) = 0$蕴含着$x = 0$。

8．据7.3-4，$\sigma(T) \subset M$。考虑方程

$$Tx - \lambda x = (-\lambda\xi_1, \xi_1 - \lambda\xi_2, \cdots) = (1, 0, 0, \cdots)$$

式中$0 < |\lambda| \leqslant 1$，可得到$\xi_1 = -1/\lambda$，$\xi_j = \xi_{j-1}/\lambda = -1/\lambda^j$，$j = 2, 3, \cdots$，因此$x = (\xi_j) \notin l^2$，于是$T_\lambda(l^2)$不是在$l^2$中稠密，且$\lambda \in \sigma(T)$。根据7.3-2，$\sigma(T)$是闭的，所以有$\sigma(T) = M$。

9．直接从定义便可推出。

10．$x = (1, \lambda, \lambda^2, \cdots) \in l^2$且$Tx = \lambda x$。一维。

§10.6

1．$t = i(1+u)/(1-u)$。

2．从(7)和(5)，对于$x \in \mathscr{D}(T)$，有

$$(I-U)^{-1}x = \frac{1}{2i}y = \frac{1}{2i}(T+iI)x$$

于是

$$(I-U)^{-1} = \frac{1}{2i}(T+iI)$$

因此，$(I-U)^{-1}$是有界的当且仅当T是有界的。由于$(I-U)^{-1}$的定义域是$\mathscr{D}(T)$且在H中稠密，故可以得到所希望的结果。

3．对每个$x \in H$我们有$(T+iI)^{-1}x \in \mathscr{D}(T)$，因此

$$S(T+iI)^{-1}x \in \mathscr{D}(T)$$

且

$$\begin{aligned}
&(T+iI)S(T+iI)^{-1}x = S(T+iI)(T+iI)^{-1}x = Sx \\
&S(T+iI)^{-1}x = (T+iI)^{-1}Sx \\
&SUx = (T-iI)(T+iI)^{-1}Sx = USx
\end{aligned}$$

4．由(4)，对任一$x \in \mathscr{D}(T) = \mathscr{D}((I-U)^{-1})$且$y = (I-U)^{-1}x$，有$x = (I-U)y$，$Sx = (I-U)Sy \in \mathscr{D}((I-U)^{-1}) = \mathscr{D}(T)$，$(I-U)^{-1}Sx = Sy = S(I-U)^{-1}x$，$TSx = i(I+U)S(I-U)^{-1}x = STx$。

5．对于每个$x \in \mathscr{D}(T)$，由于T是对称的，则有

$$(A) \qquad \begin{aligned}\|(T \pm iI)x\|^2 &= \|Tx\|^2 \pm \langle Tx, ix \rangle \pm \langle ix, Tx \rangle + \|x\|^2 \\ &= \|Tx\|^2 + \|x\|^2 \geqslant \|x\|^2。\end{aligned}$$

因此$(T+iI)x = 0$意味着$x = 0$，且据2.6-10知$(T+iI)^{-1}$存在，又据(A)知它是有界的。我们置$y = (T+iI)x$并利用（1）和（A），可得到

$$\begin{aligned}\|U_y\|^2 &= \|(T-iI)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2 \\ &= \|(T+iI)x\|^2 = \|y\|^2\end{aligned}$$

6. 设$y_n \to y$，$z_n = Uy_n \to z$，记$x_n = (T+iI)^{-1}y_n$，则据习题5的解答中的（A）可得

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|T(x_n - x_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2$$

这证明了(Tx_n)和(x_n)都是柯西序列，于是$x_n \to x \in H$且$Tx_n \to v \in H$。还有$x \in \mathscr{D}(T)$及$v = Tx$，这是因为T为闭的。因此

$$y_n = (T+iI)x_n \longrightarrow y = (T+iI)x$$
$$(T-iI)x_n \longrightarrow z = (T-iI)x$$

于是$Uy = (T-iI)x = z$，因此$y \in \mathscr{D}(U)$且$z = Uy$。从而据10.3-2知，U是闭的。

7. 据习题6和4.13-5(b)知$\mathscr{D}(U)$是闭的，据习题5知U是一个等距，故$\mathscr{R}(U)$是闭的。

8. 据10.2-4，$T \subset T^*$。为了得到$T = T^*$，只要能证明"$y \in \mathscr{D}(T^*) \Rightarrow y \in \mathscr{D}(T)$"，便有$T^* \subset T$，从而达到目的。由于$U$是酉算子，所以$\mathscr{D}(U) = H$。此外，据（1）有

$$\mathscr{D}(U) = \mathscr{D}((T+iI)^{-1}) = \mathscr{R}(T+iI)$$

因此对于每个固定的$y \in \mathscr{D}(T^*)$存在$y_0 \in \mathscr{D}(T) = \mathscr{D}(T+iI)$使得$(T^*+iI)y = (T+iI)y_0$，之所以有$(T+iI)y_0 = (T^*+iI)y_0$，因为$T \subset T^*$。合在一起，便得到$(T^*+iI)z = 0$，其中$z = y - y_0 \in \mathscr{D}(T^*)$。因此对于每个$x \in \mathscr{D}(T)$，都有

$$\langle (T-iI)x, z\rangle = \langle x, (T^*+iI)z\rangle = 0$$

于是$z \perp \mathscr{R}(T-iI) = \mathscr{R}(U) = H$，故$z = 0$，即有$y = y_0 \in \mathscr{D}(T)$。

§11.2

1. $\pi^{-1/4}$。

2. （略）

3. $T - cI = T - \mu I + (\mu - c)I$蕴含着

$$E_\psi([T-cI]^2) = Var_\psi(T) + 2(\mu - c)E_\psi(T - \mu I) + (\mu - c)^2$$
$$\geqslant Var_\psi(T)$$

其中用到$E_\psi(T - \mu I) = 0$；这里$\mu = \mu_\psi(T)$

4. 我们得到

$$\langle \tilde{D}\psi, \varphi\rangle - \langle \psi, \tilde{D}\varphi\rangle$$
$$= \int_a^b \frac{h}{2\pi i}\psi'(q)\overline{\varphi(q)}dq - \int_a^b \psi(q)\overline{\frac{h}{2\pi i}\varphi'(q)dq}$$
$$= \frac{h}{2\pi i}\int_a^b [\psi'(q)\overline{\varphi(q)} + \psi(q)\overline{\varphi'(q)}]dq$$
$$= \frac{h}{2\pi i}[\psi(b)\overline{\varphi(b)} - \psi(a)\overline{\varphi(a)}]$$

一般来说，它不为零。

5．据§11.1（2）和本节的（4），有

$$1=\int\psi\bar{\psi}dq=\int\bar{\psi}\int\frac{1}{\sqrt{h}}\varphi e^{(2\pi i/h)pq}dpdq$$

$$=\int\varphi\int\frac{1}{\sqrt{h}}\bar{\psi}e^{(2\pi i/h)pq}dqdp$$

据（5），关于q的积分是$\overline{\varphi(p)}$。

6．（略）

7．例如，

$$(D_1Q_2-Q_2D_1)\psi=\frac{\partial}{\partial q_1}(q_2\psi)-q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\psi=0$$

8．（略）

9．μ_i是用矢量积的分量形式给出的。另外两个关系是

$$\mu_2\mu_3-\mu_3\mu_2=\frac{ih}{2\pi}\mu_1$$

$$\mu_3\mu_1-\mu_1\mu_3=\frac{ih}{2\pi}\mu_2$$

从习题7通过直接计算可推出它们，或者通过第一个交换关系中的脚标的轮换得到。

§11.3

1．$q=\pm\sqrt{2E/m\omega_0{}^2}$是最大位移点，其中$E=V$；因此$E_{kin}=0$。

2．对于大的$|q|>\tilde{a}$（这里的$\pm\tilde{a}$是（7）式括号中表达式的零点），ψ的系数是负的，于是ψ和ψ'有相同的符号。因此若对于这样的q，函数ψ和ψ'是正的，则当$q\to\infty$时$\psi(q)$不趋于零。由此可知，当$q\to\infty$时，$\psi(q)\to0$仅当$\psi'(\tilde{a})/\psi(\tilde{a})$具有某个依赖于$E$的负值。关于$\psi'(-\tilde{a})/\psi(-\tilde{a})$类似。由于（7）是二阶的并且在$\psi'/\psi$中消去一个常数，所以只有一个自由常数，但是却有两个条件。

3．$\psi_0''+(1-s^2)\psi_0=0$；ψ_0对应于(11)中的$\lambda=1$；这是和$H_0(s)=1$一致的。

4．（略）

5．从递推公式可得

$$\frac{\alpha_{m+2}}{\alpha_m}\sim\frac{2}{m}$$

记

$$e^{s^2}=1+\beta_2s^2+\cdots+\beta_ms^m+\beta_{m+2}s^{m+2}+\cdots$$

则对偶数m有

$$\frac{\beta_{m+2}}{\beta_m}=\frac{1\Big/\left(\frac{m}{2}+1\right)!}{1\Big/\left(\frac{m}{2}\right)!}=\frac{2}{m+2}$$

这表明，如果这级数不到某项终止，则对应的解在$|s|$很大时象$\exp(s^2)$增长的一样快，所以

ψ象$\exp(s^2/2)$增长的一样快。

6．我们得到

$$e^{2us-u^2}=e^{s^2}\cdot e^{-(u-s)^2}$$
$$=e^{s^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^n}{\partial u^n}e^{-(u-s)^2}\right]\Bigg|_{u=0}\frac{u^n}{n!}$$
$$=e^{s^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{ds^n}(e^{-s^2})u^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(s)u^n$$

等等。

§11.4

1．我们有

$$\triangle\eta+\frac{8\pi^2m}{h^2}E\eta=0$$
$$\eta(q)=\eta_1(q_1)\eta_2(q_2)\eta_3(q_3),\quad E=A_1+A_2+A_3$$
$$\frac{\eta_1''}{\eta_1}+\frac{\eta_2''}{\eta_2}+\frac{\eta_3''}{\eta_3}+\frac{8\pi^2m}{h^2}(A_1+A_2+A_3)=0$$
$$\eta_i''+\frac{8\pi^2m}{h^2}A_i\eta_i=0$$

等等。

2．我们有$\mathscr{H}\psi_0=\lambda_0\psi_0$，$\lambda_0=h\nu/2$，$A^*A\psi_0=\tilde{\lambda}_0\psi_0$，$\tilde{\lambda}_0=2\pi\lambda_0/\omega_0h-1/2$，它为零，因为$\omega_0=2\pi\nu$。因此$A^*A\psi_0=0$，且由(15)有

$$AA^*\psi_0=(A^*A+\tilde{I})\psi_0=\psi_0$$
$$A^*AA^*\psi_0=A^*\psi_0$$

故$\psi_1=A^*\psi_0$是A^*A的对应于$\tilde{\lambda}=1$的特征函数，因为ψ_1不为零；事实上，

$$\|A^*\psi_0\|^2=\langle A^*\psi_0,\ A^*\psi_0\rangle$$
$$=\langle\psi_0,\ AA^*\psi_0\rangle$$
$$=\langle\psi_0,\ \psi_0\rangle=1。$$

设ψ_n满足$\|\psi_n\|=1$且$A^*A\psi_n=n\psi_n$，则有

$$AA^*\psi_n=(A^*A+\tilde{I})\psi_n=(n+1)\psi_n$$
$$A^*A(A^*\psi_n)=(n+1)A^*\psi_n$$

故$\tilde{\psi}_{n+1}=A^*\psi_n$是$A^*A$的对应于$\tilde{\lambda}=n+1$的特征函数。此外还有

$$\|\tilde{\psi}_{n+1}\|^2=\langle A^*\psi_n,\ A^*\psi_n\rangle$$
$$=\langle\psi_n,\ AA^*\psi_n\rangle$$

$$= \langle \psi_n, (n+1)\psi_n \rangle = n+1$$

且$\psi_{n+1} = \tilde{\psi}_{n+1}/\sqrt{(n+1)}$的范数为 1 。

3．据习题 2，有

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} A^*(A^{*n}\psi_0) = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} A^*\sqrt{n!}\psi_n$$

据（15）还有

$$A\psi_n = \sqrt{\frac{1}{n}} A A^* \psi_{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}(A^*A + \tilde{I})\psi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}(n-1+1)\psi_{n-1}。$$

4.据（12）及（13）有

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{\psi_0}(Q) &= \langle \psi_0, Q\psi_0 \rangle = (2\alpha\beta)^{-1} \langle \psi_0, (A+A^*)\psi_0 \rangle \\ &= (2\alpha\beta)^{-1} \langle \psi_0, A\psi_0 \rangle + (2\alpha\beta)^{-1} \langle A\psi_0, \psi_0 \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

其原因是$A\psi_0 = 0$。否则的话，据（18）将有

$$A^*A(A\psi_0) = (\bar{\lambda}_0 - 1)A\psi_0$$

而这表明A^*A将有特征值$\bar{\lambda}_0 - 1$。这与$\bar{\lambda}_0$的定义矛盾。此外，由于均值为零且$A\psi_0 = 0$，再据习题 2，$A^*\psi_0 = \psi_1$，故有

$$\begin{aligned}\mathrm{var}_{\psi_0}(Q) &= \langle \psi_0, Q^2\psi_0 \rangle = \langle Q\psi_0, Q\psi_0 \rangle \\ &= (2\alpha\beta)^{-2} \langle (A+A^*)\psi_0, (A+A^*)\psi_0 \rangle \\ &= \frac{h}{4\pi m\omega_0} \langle A^*\psi_0, A^*\psi_0 \rangle \\ &= \frac{h}{4\pi m\omega_0} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle = \frac{h}{4\pi m\omega_0}\end{aligned}$$

在经典力学中，将得到零。

5．据（13）至（15）有

$$AQ - QA = \frac{1}{2\alpha\beta}[A(A+A^*) - (A+A^*)A]$$

$$= \frac{1}{2\alpha\beta}[AA^* - A^*A] = \sqrt{\frac{h}{4\pi m\omega_0}}\,\tilde{I}$$

故对$s=1$是正确的。我们取归纳假设：若公式对任一固定的 s 都成立。上式从左、从右都用Q乘之便得

$$QAQ^s - Q^{s+1}A = \sqrt{\frac{h}{4\pi m\omega_0}}\,sQ^s$$

$$AQ^{s+1} - Q^sAQ = \sqrt{\frac{h}{4\pi m\omega_0}}\,sQ^s$$

相加便有

$$AQ^{s+1}-Q^{s+1}A+Q(AQ^{s-1}-Q^{s-1}A)Q=\sqrt{\frac{h}{4\pi m\omega_0}}2sQ^s$$

其中

$$AQ^{s-1}-Q^{s-1}A=\sqrt{\frac{h}{4\pi m\omega_0}}(s-1)Q^{s-2}$$

6．对于$s=1$为真（参见习题4）。假定此关系对$s-1$亦真，现证对 s 也真。事实上，据(12)和(13)，由于$A\psi_0=0$（见习题4的解答），令$\gamma=\sqrt{h/4\pi m\omega_0}$，则有

$$\begin{aligned}\langle\psi_0,Q^{2s}\psi_0\rangle &=\langle Q\psi_0,Q^{2s-1}\psi_0\rangle\\ &=\gamma[\langle A\psi_0,Q^{2s-1}\psi_0\rangle+\langle A^*\psi_0,Q^{2s-1}\psi_0\rangle]\\ &=\gamma\langle\psi_0,AQ^{2s-1}\psi_0\rangle\\ &=\gamma\langle\psi_0,[Q^{2s-1}A+\gamma(2s-1)Q^{2s-1}]\psi_0\rangle\\ &=\gamma^2(2s-1)\langle\psi_0,Q^{2s-1}\psi_0\rangle\end{aligned}$$

7．据§11.3(2)，我们可以记$\Psi(q,t)=\psi(q)e^{-i\omega t}$，其中

$$\psi(q)=\psi_1(q)=A_1e^{ib_1q}+B_1e^{-ib_1q}\qquad(q<0)$$
$$\psi(q)=\psi_2(q)=A_2e^{ib_2q}+B_2e^{-ib_2q}\qquad(q\geqslant0)$$

ψ_1中的第一项表示入射波并可选择$A_1=1$，ψ_1中的第二项表示一个反射波。ψ_2中的第一项表示一个传输波，并且据假设没有从右方来的入射波，故$B_2=0$。薛定锷方程表明，电位的不连续性使ψ''在$q=0$不连续，而由ψ和ψ'在0的连续性给出了以下两个条件

$$1+B_1=A_2$$
$$ib_1(1-B_1)=ib_2A_2$$

因此

$$B_1=\frac{b_1-b_2}{b_1+b_2},\quad A_2=\frac{2b_1}{b_1+b_2}$$

注意，$b_2{}^2>0$，故b_2是实的并且传输波为正弦波。

8．质点的数目与密度（分别是1，$|B_1|^2$，$|A_2|^2$）以对应的速度成正比，它分别与b_1和b_2成正比，例如据§11.3中的（3）（4）便可得到。因此质的关联数与$1.b_1=b_1$成比例，而和式与

$$b_1|B_1|^2+b_2|A_2|^2=b_1\frac{(b_1-b_2)^2}{(b_1+b_2)^2}+b_2\frac{(2b_1)^2}{(b_1+b_2)^2}=b_1$$

成比例，此处比例常数是相同的。

9．$b_2{}^2<0,b_2=i\beta_2$（β_2是正实数）。ψ保持正弦的，但是$\psi_2(q)=A_2e^{-\beta_2q}$（指数衰减）。波透入区域$q>0$，这里是经典粒子不能进入的。

§11.5

1.2．（略）

3．由于P_l是l次的，故$|m|\leqslant l$，且z一定不恒等于零。

4．为了求u，可从拉盖尔微分方程

$$\rho L''_{n+l}+(1-\rho)L'_{n+l}+(n+l)L_{n+l}=0$$

出发，将它微分$2l+1$次，$l\leqslant n-1$保证u不恒等于零。n必须是整数，因为若用推广的幂级数法用于关于u的方程，则可以看出，对于大的指数，级数中相邻项的系数之比$\alpha_{\nu+1}/\alpha_\nu$差不多是$1/\nu$，这将影响$u$的指数的增长，以致于当$\rho\to\infty$时$R$不再减小到零。

5．（略）

6．据坐标变换公式可得

$$\frac{\partial}{\partial\phi}=-q_2\frac{\partial}{\partial q_1}+q_1\frac{\partial}{\partial q_2}$$

等等。

7．（略）

8．$\rho=\eta r,\eta=\sqrt{a(E+V_0)}$，$R(r)=\rho^{-1/2}u(\rho)$，$R(r)=\dfrac{c_l}{\sqrt{\eta r}}J_{l+1/2}(\eta r)$，式中$c_l$是正规常数，而$J_\nu$是$\nu$阶第一类贝塞尔函数。

9．$u(\rho)=\rho^{-1/2}v(\rho)$给出了$v''+v=0$，它提供了$J_{1/2}$和$J_{-1/2}$。在0为有限的解是

$$(l=0)\qquad J_{1/2}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sin\rho$$

$$(l=1)\qquad J_{3/2}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\left(\frac{\sin\rho}{\rho}-\cos\rho\right)$$

$$(l=2)\qquad J_{5/2}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\left(\frac{3\sin\rho}{\rho^2}-3\frac{\cos\rho}{\rho}-\sin\rho\right)$$

等等。

10．$\eta=\sqrt{aE}=i\beta$，这里$\beta=\sqrt{a|E|}$，于是$\rho=i\beta r$是纯虚数。因此得到指数递减的解（当$r\to\infty$时，它们必须趋于零）。而对于$r<r_0$，则有振荡解。显然也可用

$$J_{-l-1/2}(\eta r)=J_{-l-1/2}(i\beta r)$$

在区间$(0,r_0)$上，该贝塞尔函数不是有界的。通解是

$$\frac{1}{\sqrt{\beta r}}[k_1J_{l+1/2}(i\beta r)+k_2J_{-l-1/2}(i\beta r)]$$

若要定出k_1，k_2及能量级，可参见L.I.希夫 L.I.Schiff, 1968), *pp.*86-88。

附录3 参 考 文 献

Banach, S.(1922), Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fundamenta Math. **3**, 133-181

Banach,S.(1929), Sur les fonctionnelles linéaires II.Studia Math. 1,223-239

Banach, S.(1932), Théorie des opérations linéaires. New York: Chelsea

Banach, S., et H. Steinhaus(1927), Sur le principe de la condensation de singularités. Fundamenta Math. **9**, 50-61

Berberian,S.(1961), Introduction to Hilbert Space. New York: Oxford UniversityPress

Bernstein, S.N.(1912), Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. Comm. Soc. Math. Kharkow **13**, 1-2

Bielicki, A.(1956), Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov. Bull Acad. Polon. Sci. **4**, 261-268

Birkhoff,G.(1967), Lattice Theory. 3rd ed. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 25. Providence, R. I.: American Mathematical Society

Birkhoff, G., and S. Mac Lane(1965), A Survey of Modern Algebra. 3rd. ed. New York: Macmillan

Bohnenblust, H.F., and A. Sobczyk(1938), Extensions of functionals on complex linear spaces. Bull. Amer. Math. Soc.**44**, 91-93

Bourbaki N.(1955). Éléments de mathématique, livre V. Espaces vectoriels topologiques. Chap. III á V. Paris: Hermann

Bourbaki,N.(1970),Éléments de mathématique,Algèbre. Chap. 1 á 3, Paris: Hermann

Cheney, E. W. (1966), Introduction to Approximation Theory. New York: McGraw-Hill

Churchill, R.V. (1963), Fourier Series and Boundary Value Problems. 2nd ed. New York: McGraw-Hill

Courant, R., and D.Hilbert (1953-62), Methods of Mathematical Physics. 2 vols. New York: Interscience/Wiley

Cramer, H.(1955), The Elements of Probability Theory and Some of its Applications. New York: Wiley

Day, M.M. (1973), Normed Linear Spaces. 3rd ed. New York: Springer

Dieudonné, J. (1960), Foundations of Modern Analysis. New York: Academic Press

Dixmier, J. (1953), Sur les bases orthonormales dans les espaces préhilbertiens. Acta Math. Szeged **15**, 29-30

Dunford, N., and J.T. Schwartz (1958-71), Linear Operators. 3 parts. New York: Interscience/Wiley

Edwards, R.E. (1965), Functional Analysis. New York: Holt, Rinehart and Winston

Enflo, P. (1973), A counterexample to the approximation property. Acta Math. **130**, 309-317

Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F.G. Tricomi (1953-55), Higher Transcendental Functions. 3 vols. New York: McGraw-Hill

Fejér, L. (1910), Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe. Journal Reine Angew. Math. **137**, 1-5

Fréchet, M. (1906), Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rend. Circ. Mat. Palermo **22**, 1-74

Fredholm, I. (1903), Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta Math. **27**, 365-390

Friedrichs, K. (1935), Beiträge zur Theorie der Spektralschar. Math. Annalen **110**, 54-62

Gantmacher, F.R.(1960), The Theory of Matrices. 2 vols. New York: Chelea

Gelfand, I. (1941), Normierte Ringe. Mat. Sbornik (Recueil mathématique) N.S.**9**, (51), 3-24

Gram, J.P. (1883), Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. Journal Reine Angew. Math. **94**, 41-73

Haar, A. (1918), Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. Math. Annalen **78**, 294-311

Hahn, H. (1922), Über Folgen linearer Operationen. Monatshefte Math. Phys. **32**, 3-88

Hahn, H. (1927), Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen. Journal Reine Angew. Math. **157**, 214-229

Halmos, P.R. (1958), Finite-Dimensional Vector Spaces. 2nd ed. New York: Van Nostrand Reinhold

Hamming, R.W. (1950), Error detecting and error correcting codes. Bell System Tech. Journal **29**, 147-160

Hellinger, E, und O. Toeplitz(1910), Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. Math. Annalen **69**, 289-330

Helmberg, G(1969), Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space. New

York: American Elsevier

Hewitt, E., and K. Stromberg (1969), Real and Abstract Analysis. Berlin: Springer

Hilbert, D. (1912), Grundzüge einer allgemeinen Thearie der linearen Integralgleichungen. Repr. 1953. New York: Chelsea

Hille, E. (1973), Analytic Function Theory. Vol. I. 2nd ed. New York: Chelsea

Hille, E., and R.S. Phillips (1957), Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **31**. Rev. ed. Providence, R.I.: American Mathematical Society

Hölder, O. (1889), Über einen Mittelwertsatz. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl., 38-47

Ince, E. L. (1956), Ordinary Differential Equations. New York: Dover

James, R.C. (1950), Bases and reflexivity of Banach spaces. Annals of Math.(2)**52**, 518-527

James, R.C.(1951), A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37**, 174-177

Kelley J.L. (1955), General Topology. New York: Van Nostrand

Kelley, J.L., and I.Namioka (1963), Linear Topological Spaces. New York: Van Nostrand

Kreyszig, E.(1970), Introductory Mathematical Statistics. New York: Wiley

Kreyszig, E. (1972), Advanced Engineering Mathematics. 3rd ed. New York: Wiley

Lebesgue, H. (1909), Sur les intègrales singulières, Ann. de Toulouse (3) 1, 25-117

Lorch, E.R. (1939), On a calculus of operators in reflexive vector spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **45**.217-234

Lorch, E.R. (1962), Spectral Theory. New York: Oxford University Press

Löwig, H. (1934), Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl. Acta Sci. Math. Szeged **7**, 1-33

McShane, E.J. (1944), Integration. Princeton, N.J.: Princeton University Press

Merzbacher, E. (1970), Quantum Mechanics. 2nd ed. New York: Wiley

Minkowski, H. (1896), Geometrie der Zahlen. Leipzig: Teubner

Murray, F.J. (1937), On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p. Trans. Amer Math.Soc. 41, 138-152

Naimark, M. A. (1972), Normed ras. Algebras. 2nd ed. Groningen: Wolters-Noordhoff

Neumann, J. von (1927), Mathematische Begründung der Quantenmechanik. Nachr. Ges. Wiss. Cöttingen. Math.-Phys. Kl., 1-57

Neumann, J. von (1929-30), Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. Math. Annalen **102**, 49-131

Neumann, J. von (1929-30b), Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. Math. Annalen **102**, 370-427

Neumann, J.von (1936), Über adjungierte Funktionaloperatoren. Annals of Math. (2) **33**, 294-310

Poincarè, H. (1896), La mèthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta Math. **20**, 59-142

Pólya, G. (1933), Über die Konvergenz von Quadraturverfahren. Math. Zeitschr. **37**, 264-286

Rellich, F.(1934), Spektrltheorie in nichtseparablen Räumen. Math. Annalen **110**, 342-356

Riesz, F. (1909), Sur les opèrations fonctionnelles linèaires. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **149**, 974-977

Riesz, F. (1918), Über lineare Funktionalgleichungen. Acta Math. **41**, 71-98

Riesz, F. (1934), Zur Theorie des Hilbertschen Raumes. Acta Sci. Math. Szeged **7**, 34-38

Riesz, F., and B. Sz.-Nagy (1955), Functional Analysis. New York: Ungar

Rogosinski, W. (1959), Fourier Series. 2nd ed. New York: Chelsea

Royden, H.L. (1968), Real Analysis. 2nd ed. New York: Macmillan

Sard, A., and S. Weintraub (1971), A Book of Splines. New York: Wiley

Schauder, J. (1930), Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen. Studia Math. 2. 1-6

Schiff, L.I. (1968), Quantum Mechanics. 3rd ed. New York: McGraw-Hill

Schmidt, E. (1907), Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Math. Annalen **63**, 433-476

Schmidt, E. (1908), Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Rend. Circ. Mat. Palermo **25**, 53-77

Schur, I. (1921), Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. Journal Reine Angew. Math. **151**, 79-111

Sobczyk, A. (1941), Projections in Minkowski and Banach spaces. Duke Math. Journal **8**, 78-106

Stone, M.H. (1932), Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **15**. New York: American Mathematical Society

Szegö, G.(1967), Orthogonal Polynomials. 3rd ed. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 23. Providence, R.I.: American Mathematical Society

Taylor, A.E. (1958), Introduction to Functional Analysis. New York: Wiley

Todd, J. (1962), Survey of Numerical Analysis. New York: McGraw-Hill

Wecken, F.J.(1935), Zur Theorie linearer Operatoren. Math. Annalen **110**, 722-725

Weierstrass, K. (1885), Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente. Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 633-639, 789-805

Wiener, N. (1922), Limit in terms of continuous transformation. Bull. Soc. Math. France (2) **50**, 119-134

Wilks, S.S. (1962), Mathematical Statistics. New York: Wiley

Wintner, A. (1929), Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen. Math. Zeitschr. **30**, 228-282

Yosida, K.(1971), Functional Analysis. 3rd ed. Berlin: Springer

Zaanen, A.C. (1964), Linear Analysis. Amsterdam: North-Holland Publ.

Zakon. E.(1973), Mathematical Analysis. Part II. Lecture Notes. Department of Mathematics, University of Windsor, Windsor, Ont.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝泛函分析导论及应用
作者＝（加拿大）欧文·克雷斯齐格
页数＝４８２
ＳＳ号＝１００９７９４５
出版日期＝１９８７年０５月第１版